



Caractérisation formelle des structures multi-échelles géographiques en relativité d'échelle : exemples en géographie physique, géographie urbaine, géohistoire et géographie du peuplement

Maxime Forriez

► To cite this version:

Maxime Forriez. Caractérisation formelle des structures multi-échelles géographiques en relativité d'échelle : exemples en géographie physique, géographie urbaine, géohistoire et géographie du peuplement. Autre. Université d'Avignon, 2010. Français. NNT : 2010AVIG1084 . tel-00691773

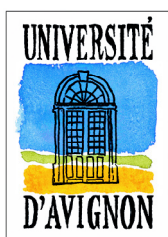
HAL Id: tel-00691773

<https://theses.hal.science/tel-00691773>

Submitted on 27 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'AVIGNON
ET DES PAYS DE VAUCLUSE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE
UNIVERSITÉ D'AVIGNON
ET DES PAYS DE VAUCLUSE



THÈSE

*présentée pour obtenir le grade de Docteur en Sciences Humaines et Sociales
de l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse*

SPÉCIALITÉ : GÉOGRAPHIE

**Caractérisation formelle des structures multi-échelles
géographiques en relativité d'échelle**

Exemples en géographie physique, géographie urbaine,
géohistoire et géographie du peuplement

Maxime Forriez

soutenue le 17 juin 2010 devant un jury composé de :

M. Patrice Abry	Directeur de recherche CNRS à l'ENS de Lyon	Rapporteur
M. André Dauphiné	Professeur honoraire de l'Université de Nice – Sophia–Antipolis	Rapporteur
M. Daniel Delahaye	Professeur à l'Université de Caen–Basse–Normandie	Examineur
M. Guy Lobrichon	Professeur à l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse	Examineur
M ^{me} Denise Pumain	Professeure à l'Université de Paris I Panthéon–Sorbonne	Examinatrice
M. Philippe Martin	Professeur à l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse	Co-directeur de thèse
M. Laurent Nottale	Directeur de recherche CNRS à l'Observatoire de Paris–Meudon	Co-directeur de thèse

École doctorale 355 Espaces, Cultures, Sociétés

UMR ESPACE 6012 (Avignon)

Remerciements

Je remercie mes deux directeurs de thèse, Philippe Martin et Laurent Nottale, de m'avoir suivi avec une très grande patience tout au long de ce travail, et d'avoir accepté de partager avec moi leurs savoirs et leurs connaissances.

Je remercie l'UMR ESPACE - Avignon de m'avoir accueilli entre 2006 et 2010. Je remercie l'équipe toute entière, et en particulier, Joël Charre, Didier Josselin, Loïc Grasland, Jean-Paul Ferrier, Cyrille Genre-Grandpierre, Philippe Ellerkamp, Alain Richaud, Mounir Redjimi, Johnny Douvinet, Cécile Helle et Jacques Maby. Je remercie mes collègues doctorants pour leur soutien, et en particulier, Hiba Alawad, Julie Prud'homme, Igor Catalão. Je remercie les personnels techniques qui ont toujours su être d'une très grande efficacité lors de mes problèmes administratifs, et en particulier, Danielle Riva, Nathalie, Brachet, Nathalie Dugnas et Michel Guérin. Je remercie enfin les étudiants que j'ai connus en salle géomatique pour leurs encouragements et leurs questions qui m'ont beaucoup fait avancés, et en particulier, Adrien L., Adrien C., Thierno et Saliou.

Je remercie toutes les personnes que j'ai croisées à l'Observatoire de Paris-Meudon, et en particulier, Marie-Noëlle Célerier et Thierry Lehner pour leur accueil qui a toujours été chaleureux lors de mes rendez-vous avec Laurent Nottale.

Je remercie ma famille qui m'a permis de faire des études longues et qui ont toujours su m'encourager lors de mes moments de doute. Je remercie en particulier mon père Pascal, ma mère Marie-Pierre, ma sœur Justine, ma grand-mère Denise, Marie-Louise, Fernand, Lysiane, Michel, Joseline, Bernard, Jessica, Paul, Ginette, Jackie, Samuel, Nicolas, Théo et Noa.

Je remercie mes amis qui, malgré la distance, ont toujours su être là lorsque j'avais des problèmes existentiels, et en particulier, Damien, Julien B., Olivier, Julien L., Anthony, Isabelle, Thomas, Stéphanie et Sendy.

Je remercie particulièrement Jean-Pierre Arrignon, professeur d'histoire médiévale à l'Université d'Artois, d'avoir organisé ma première rencontre avec Laurent Nottale, et ainsi avoir permis indirectement que cette thèse soit envisageable.

Je remercie l'équipe archéologique du chantier de Boves de m'avoir appris la persévérance et la rigueur scientifique, et en particulier, Philippe et Sabine Racinet, Richard Jonvel et Sandrine Mouny.

Je remercie également tous les établissements qui m'ont accueilli, l'école Jeanne d'arc, l'école Saint-Clotilde (Douai), le collège et le lycée Saint-Jean (Douai), l'Université d'Artois, l'I.P.A.G. de Valenciennes et le C.I.E.S. Marseille-Corse, ainsi que tous les enseignants que j'ai pu y rencontrer pour tout ce qu'ils m'ont appris.

Je remercie enfin tous les étudiants qui ont suivi mon enseignement grâce à mon expérience de moniteur.

Dédicace

Je tiens à dédicacer ma thèse à ma Grand-mère, Denise, qui nous a quittés au tout début de cette thèse (octobre 2007). Je veux lui rendre un hommage particulier, car c'était une femme extraordinaire de par son abnégation, et ses précieux encouragements qu'elle a toujours sus m'offrir pendant nos vingt-quatre années de vie commune.

Résumé

La caractéristique la plus évidente de l'interface terrestre est son hétérogénéité. Phénoménologiquement, celle-ci, anthropique ou naturelle, transparaît de limites qui définissent les formes déployées dans l'espace géographique. Ces limites sont certes dues à une dynamique temporelle, tout autant que à une dynamique scalaire. Celle-ci se manifeste dans les rapports possibles et changeant existant entre échelles dans la mesure où tout échelle ne peut se concevoir que comme relative à une autre servant de référence. Ceci conduit à la relativité d'échelle (R.E.) qui devrait permettre de définir intrinsèquement l'espace géographique. Le premier objectif est de montrer la possibilité d'utiliser la R.E. en géographie. Au coeur de la R.E., on trouve la géométrie fractale qui reste indispensable pour essayer de comprendre l'organisation scalaire du monde. Jusqu'à présent les fractales n'étaient utilisées que comme un outil de description plus ou moins pertinent. En R.E., les formes fractales deviennent une conséquence d'un espace formel intrinsèquement irrégulier. La fractalité peut donc être une voie de compréhension du monde utilisant l'espace de ses échelles, c'est-à-dire de ses résolutions. L'objectif central de cette étude est donc de construire une méthodologie fractale générale nécessaire à l'étude d'une morphologie quelconque à travers divers exemples issus de la géographie physique, de la géographie urbaine, de la géohistoire et de la géographie du peuplement. L'objectif final est d'aboutir à des solutions formelles accessibles à une large communauté de géographes, ce qui n'est pas le cas de la théorie de la R.E. dans son formalisme actuel. D'un point de vue épistémologique, le développement en géographie de la R.E. pose la question de la re-naturalisation de cette discipline des Sciences humaines et sociales et de sa constitution en science analytique, donc plus largement de proposer une nouvelle définition de la géographie.

Mots clés. Épistémologie, transition fractal - non fractal, hydrographie, morphologie urbaine, château, monde

Abstract

Formal characterization of geographic multi-scale structures in scale relativity

Examples in physical geography, urban geography, geohistory and geography of the settlement

The most obvious characteristic of the terrestrial interface is its heterogeneity. Phenomenologically, this one, human or natural, show limits that define the forms deployed in geographic space. These limits are certainly due to temporal dynamic, all as much as a scale dynamic. This one is manifested in the possible relationships and variables that exist between scales inasmuch as every scale can no conceive than relative to another that is used as reference. This leads to the scale relativity (SR) which should allow to define intrinsically the geographical space. The first objective is to show the possibility of using SR in geography. At the heart of the SR, we found that fractal geometry is indispensable to try to understand the organization in the scales of the world. So far fractals no were used than as a tool of describing more or less relevant. In SR, the fractal forms become a consequence of a formal space intrinsically irregular. The fractality can be thus a way of understanding of the world using the space of scales, that is to say its resolutions. The central objective of this study is thus to build a general fractal methodology necessary under investigation of an unspecified morphology through various examples resulting from the physical geography, the urban geography, the geohistory and the geography of the settlement. The final objective is to lead to solutions formal accessible at a broad community from geographers, which is not the case of the theory of the R.E in its current formalism. From an epistemological point of view, the development in geography of the R.E raises the question of the Re-naturalization of this discipline of the human and social sciences and of the constitution in analytical science, therefore more largely to propose a new definition of the geography.

Keywords. Epistemology, transition fractal - non fractal, hydrography, urban morphology, castle, world

1

Introduction générale

Pour certaines personnes, la géographie a comme principal objet d'étude l'interface terrestre dont la caractéristique la plus évidente est d'être hétérogène. Phénoménologiquement, cette hétérogénéité, qu'elle soit d'origine anthropique ou naturelle, transparaît à travers des limites qui définissent des formes déployées dans l'espace terrestre.

Par ailleurs, de plus en plus, cet espace terrestre peut être considéré comme un monde « plein », surtout en zone urbaine. L'une des conséquences en est que les possibilités d'expansion spatiale *stricto sensu* - déplacement des frontières, conquête, changement d'attribut de lieux, *etc.* - deviennent de plus en plus difficile. Cela étant, nature et théories permettent d'identifier un autre « front » dont le rôle apparaît de plus en plus essentiel, mais dont la prise en compte est toujours insuffisante, surtout en géographie. Cette dimension du monde, après celle de l'espace *stricto sensu* (longueur, largeur, hauteur, ou en géographie, longitude, latitude, altitude) et celle du temps, correspond aux échelles (Nottale, 1993 ; Nottale, 1998) ; celles-ci n'étant pas uniquement conçues comme une simple facteur de réduction pour une représentation, mais comme une jauge définissant, en partie, l'information qui peut être obtenue. Dès lors, il est possible de penser théoriser la façon dont cette information varie continûment en fonction des échelles. C'est tout l'objet de la géométrie fractale (Mandelbrot, 1967 ; 1975 ; 1977 ; 1982 ; Nottale et Schneider, 1984 ; Nottale, 1989 ; 1992 ; 1993 ; 1998). Dans ce cadre, la physique possède une gamme d'échelles très étendue qui va de l'infiniment petit à l'infiniment grand. De ce fait, si l'on compare la géographie à la physique, il apparaît que la géographie possède des objets d'étude qui se placent scalairement en position médiane dans ce continuum des échelles de l'univers, et qu'il appartient à notre discipline de formaliser la structuration scalaire du monde autour des échelles anthropiques (10^{-4} et 10^8), et de contribuer ainsi à la définition d'une cosmologie universelle tout en se référant à une base scientifique déductive construite à partir de principes très généraux comme celui de la relativité (Nottale, 1998). Pour autant, cela ne signifie pas que la géographie va se transformer en une « physique géographique ». En effet, la géographie, charnière entre l'Homme et la Nature, peut s'ouvrir à ce mode de pensée afin de permettre la construction d'une véritable théorie géographique. De ce fait, cette thèse espère être un jalon dans cette dynamique qui s'enracine tant dans l'approche multi-scalaire des géographes que dans la possibilité conservée de raisonner tant sur des objets naturels qu'anthropiques. Se pose alors la question de la base commune pour construire une théorie générale de la géographie qui permettrait de dépasser la distinction traditionnelle entre la géographie physique et la géographie humaine. Cette thèse proposera de multiples exemples qui seront issus de la géographie physique ainsi que de la géographie humaine, et qui constitueront autant de briques pour une discussion à venir plus large sur ces questions. Tout ceci implique que cette dimension d'échelle (c'est-à-dire une organisation dans l'ordre des échelles de nature fractale) soit mieux comprise et utilisée puisque cela devient l'une des principales dimensions du développement des sociétés.

L'état de l'art sur la question des échelles en géographie humaine et physique a été, en partie, réalisé à l'occasion d'une question récente proposée à l'agrégation « Echelle et temporalité » (2004-2006) (Baudelle et Regnauld, 2004 ; Volvey, 2005). La question apparaît donc d'une grande actualité. Par exemple, les agglomérations urbaines rivalisent d'imagination pour faire entrer un maximum d'activités et de personnes dans des surfaces au sol aussi petites que possibles (gratte-ciel, immeubles de grande hauteur, ville souterraine, *etc.*). Ceci est une condition d'une maximisation des interactions, des relations, des métissages, condition de l'innovation et de la ville compacte que la crise énergétique actuelle et à venir (*peak oil*) remet sur le devant de la scène dans la mesure où l'étalement urbain est extrêmement coûteux en termes de temps, de matériaux et d'énergie. En d'autres termes, développer une ville dont l'étalement serait limité revient à rechercher une optimisation scalaire, sans abandonner un objectif de qualité de vie, ni une recherche d'intensification de l'usage de la matière grise.

Les formes fractales sont déjà importantes par l'irrégularité ou la lacunarité qu'elles permettent et manifestent, et le sont encore plus par le fait qu'elles sont l'unique moyen de remplir davantage un espace, tout en organisant un stockage de matière, mais surtout d'informations et de lignes, de surfaces, de volumes maximisant les lieux d'échange, conçus comme des « points structurés ». Cette solution est amplement employée par la nature - par exemple, la surface de nos poumons avoisine les 400 m² - ce qui fournit autant de cas à partir desquels il est possible de développer un formalisme physico-mathématique qui modélise cet ordre scalaire. Cela étant, cette maximisation des morphologies d'échange n'a de sens que si l'on considère que toutes activités rencontrent une limite qui est fixée par la vitesse des réactions, du transfert matériel de tel ou tel élément, du temps nécessaire pour associer ceci ou cela, *etc.* En d'autres termes, la fractalité des morphologies d'échanges naturelles montre que les cinétiques des réactions chimiques, en particulier, sont trop lentes par rapport aux débits des flux. Analogiquement, on peut penser qu'il en est de même pour les dynamiques anthropiques, et qu'à côté d'une optimisation par accélération des vitesses (mais l'information financière circule aujourd'hui à la vitesse limite de la lumière), il existe une optimisation par les échelles en établissant des rapports scalaires spécifiques généralement déployées dans l'espace ou localement situés. Ceux-ci ouvrent sur la question de la variation des rapports scalaires dans l'espace dont on peut penser hypothétiquement qu'elle est porteuse de limites ou d'autres discontinuités phénoménologiquement perceptibles.

Pour suivre cette voie, le géographe doit se donner les moyens de construire des outils d'une approche fractale c'est-à-dire d'une approche qui considère la façon de passer d'une échelle à l'autre par une loi spécifique. Dans cette perspective, il apparaît que les dynamiques observées dans l'espace géographique peuvent correspondre tout à la fois à une causalité fonctionnelle (Figure 1. A) (flux circulant et apport ou exportation de matière par exemple), à une causalité formelle (Figure 1. B) (la configuration existante joue un rôle dans les modalités de circulation des flux) et à une causalité structurelle (Figure 1. C) nécessaire, par exemple, pour penser tant les processus sans sujet (Martin, 2004) que la récurrence d'archétypes morphologiques sur différents substrats.

Cela conduit à faire l'hypothèse que les répartitions observées dans l'espace terrestre ne relèvent pas de dynamiques aléatoires, dans le sens où il n'existerait pas de lois, mais des processus dont les dynamiques seraient connues, ne serait-ce qu'à travers des lois de probabilité, et dont les morphologies, et plus largement les structures spatiales, seraient les résultantes. Déployées dans l'ordre des échelles, ces morphologies doivent résulter à la fois « d'effets d'échelle », ou de « force d'échelle » qui traduisent l'arbitrage naturel ou anthropique de « conflits d'échelle » et de « dynamiques d'échelle » (Nottale, 1998). Ceci appelle un processus de théorisation (Figure 1. D) fondé sur les échelles elles-mêmes.

Ceci amène à insister sur une précision fondamentale. La géographie, comme dans d'autres sciences par ailleurs, s'est toujours inscrite dans une approche qui étudie le mouvement, c'est-à-dire la catégorie possédant pour variables d'état celles de l'espace et celle du temps. Partant de ce constant, la théorie de la relativité d'échelle montre que la catégorie « mouvement » n'est pas unique, et qu'à côté d'elle existe une catégorie propre à l'échelle (Nottale, 1998). Cependant, la géographie possède une approche spécifique des échelles, dans le sens où il existe une véritable pensée sur et de l'échelle, ce qui n'est pas le cas de nombreuses disciplines dans lesquelles l'échelle n'est qu'une résolution. Cette thèse s'efforcera de montrer que la transformation de la notion d'échelle en une catégorie propre, indépendante du mouvement, est porteuse, en géographie, de conséquences qui permettent d'ouvrir la porte d'un champ de recherche beaucoup plus large que celui développé à l'occasion de la question de l'agrégation citée précédemment.

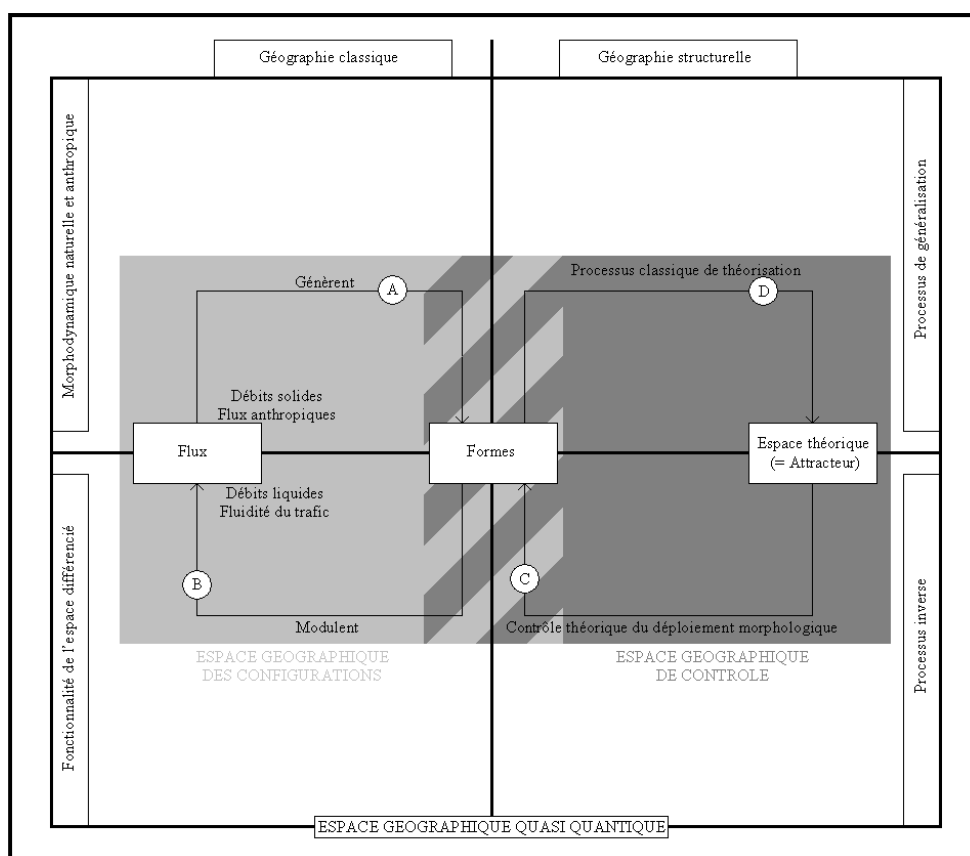


Figure 1. Espace géographique et causalités

Le premier type de causalité (A) renvoie à des études de variables marqueurs du fonctionnement. Le second (B) à la prise en compte du rôle de filtre que jouent les configurations existantes. Le troisième à une démarche théorique (D) qui doit *in fine* modéliser la composante structurale (C), la règle contrôlant en quelque sorte l'apparaître morphologique.

Cette thèse s'articulera autour de trois objectifs.

- Objectif 1. Montrer le lien entre l'étude des formes géographiques et la relativité d'échelle.
- Objectif 2. Définir un cadre multi-scalaire théorique général en géographie capable d'explicitier les morphologies de l'espace géographique, et plus largement les structures scalaires existant en géographie.
- Objectif 3. Articuler le temps et l'espace et leurs échelles respectives dans une démarche géographique.

1.1. Objectif 1. Un lien entre la morphologie et la relativité d'échelle

En partant de l'observation et de la quantification des morphologies naturelles (reliefs principalement) par des méthodes connues, au moins, depuis Henri Baulig (1959), comment est-il possible d'aboutir à une modélisation formelle des conditions théoriques de leur déploiement ? La géomorphologie sera entendue dans cette thèse comme un domaine expérimental très large qui désignera toute analyse morphologique en géographie. En géographie humaine, les actions anthropiques comptent peu, sorties de la petite échelle et sur le temps long. Cela évite d'avoir à traiter immédiatement les questions du choix, de la volonté, de la liberté, *etc.* que ne manqueront pas de se poser pour les morphologies d'origine anthropique.

1.1.1. Mesure de caractéristiques morphologiques

L'expérience montre qu'il est très difficile d'arriver à modéliser les morphologies produites par la circulation des flux, tant en géographie physique qu'en géographie humaine. Cette approche se heurte à la question de la multiplicité des variables et à celle de la multiplicité de leurs combinaisons. Si cela était possible, cela signifierait, d'une part que le problème des processus sans sujet soit résolu - ce qui n'est pas le cas - et d'autre part, que la connaissance des règles structurelles de combinaison de ces variables soit connues (ce qui n'est pas le cas également).

Dans cette perspective, des outils spécifiques comme la géométrie fractale, doivent être mis en œuvre. Il s'agit dès lors, dans un premier temps, de mesurer les caractéristiques fractales d'objets inclus dans un espace qui sera considéré comme euclidien. Pour ce faire et afin d'avoir une statistique des caractéristiques d'échelle, la mise au point d'outils automatisant cette tâche a été une clé dans cette étude, dans la mesure où les outils disponibles, qu'ils soient payant ou gratuit, ne sont pas totalement satisfaisants, tant au plan des solutions formelles adoptées que vis-à-vis de la chaîne des traitements à mettre en œuvre qui ne dépasse pas sa complexité et son ampleur les capacités propres de ces outils. Un apprentissage au logiciel *Mathematica*©Wolfram a été nécessaire. La totalité des calculs est des résultats obtenus, du simple tableau aux cartes, a été réalisée grâce à ce logiciel. On peut envisager l'écriture de très nombreuses pages de calcul dont une transcription et une intégration dans une plateforme plus ergonomique du type système d'informations géographiques peut être envisagée. Ceci correspond à l'arrière-plan de cette thèse qui est déposée à l'Université d'Avignon - UMR ESPACE, ainsi que les données utilisées permettant leur vérification.

1.1.2. Place de la thèse dans les théories de la morphogenèse

Si la morphogenèse est une question ancienne, « la création de nouvelles formes est devenue un sujet de recherche dans de nombreuses disciplines [...] » (Dauphiné, 2003, p. 149). La généralisation de cet intérêt souligne le caractère aujourd'hui primordial de ce questionnement qui s'appuie sur les travaux précurseurs de René Thom (1974 ; 1983 ; 1991 ; 1993) dont la profondeur peut être illustrée par la Figure 2.

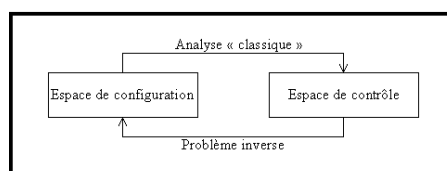


Figure 2. Espace de configuration et espace de contrôle

Classiquement, la morphogenèse correspond à trois situations bien différentes (Figure 3). Il s'agit d'une part de la question de la conservation d'une forme, d'autre part de celle de la modification d'une forme, et enfin de celle de l'émergence des morphologies à partir d'une absence de configuration spatiale prédisposant à cette émergence. Toutefois, « si l'émergence existe dans toutes les sciences, le géographe focalise plutôt son attention sur l'émergence des formes spatiales » (Dauphiné, 2003, p. 150). En géographie, l'espace de configuration correspond à l'espace support : celui des localisations (lieux). Il s'agit d'un état à partir duquel on devrait être capable de construire l'espace de contrôle qui est une description mathématique « simplifiée » de l'espace de configuration et de sa dynamique potentielle.

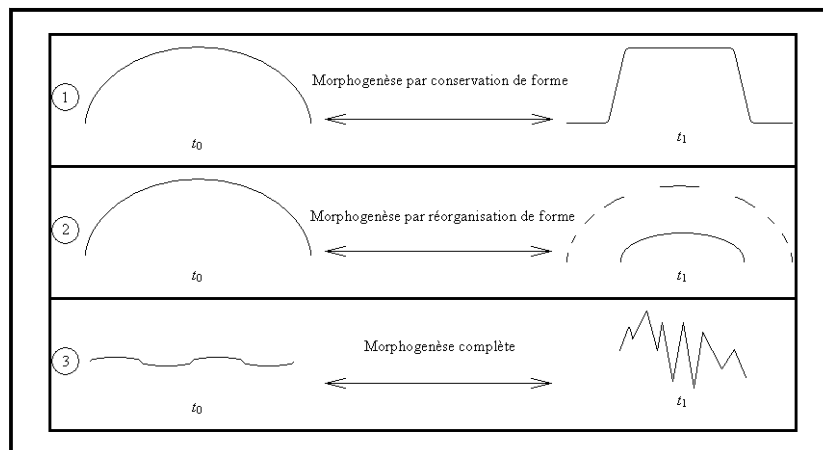


Figure 3. Typologie des morphogenèses

Le type 1 correspond à une conservation de la masse et à un changement de forme, ce qui conduit à une variation de la surface d'échange. Le bilan de masse est nul, car les apports compensent les départs, donc la surface globale reste constante, malgré le changement d'échelle. Elle correspondrait à un moulage, par exemple.

Le type 2 correspond à une conservation de la forme et à un changement de masse. La surface d'échange varie. Le bilan de masse est négatif. Il y a donc un changement d'échelle. La solution inverse est envisageable ; elle correspondrait à un ballon que l'on gonfle, par exemple.

Le type 3 correspond à un double changement de forme et de masse. La surface d'échange varie fortement : dans un cas (à gauche), il y a une « contraction scalaire », dans l'autre (à droite), un « déploiement scalaire ».

Une méthode devenue classique en analyse spatiale consiste à essayer de caractériser ces espaces (attracteurs) parfois à différentes dates, sans toujours chercher à comprendre le rôle de l'espace de contrôle dans la cristallisation de l'espace de configuration. Si l'on prend l'exemple pédagogique de la ville, les travaux menés jusqu'à présent correspondent essentiellement à une approche purement descriptive, notamment par les fractales dont l'objectif final annoncé ou sous-jacent est de caractériser cet espace de contrôle. Dans certains cas, les auteurs réalisent une description de l'évolution temporelle de la dimension fractale (Frankhauser, 1994 ; Tannier et Pumain, 2005). Ces travaux permettent parfois de caractériser des bifurcations, mais après coup. En conséquence, la fractalité avérée n'est généralement pas utilisée dans la modélisation du comportement actuel ou futur du système urbain. L'introduction de la relativité d'échelle en géographie urbaine, et plus largement en géographie physique et humaine, permettrait, du moins en principe, de développer de telles modélisations dynamiques, ce qui devrait permettre éventuellement de se positionner en amont de la bifurcation, et ainsi pouvoir agir à notre convenance sur la direction prise par le système. C'est tout le programme de recherche des théories du chaos (Gleick, 1991).

Actuellement, ce type de réflexion est dominé par les automates cellulaires et les systèmes multi-agents (White, 1998 ; White et Engelen, 1993 ; White et Engelen, 1997). C'est ce que Jean Petitot appelle « l'approche computationnelle » qui est pour lui « la seule façon pour [les] sciences [n'ayant pas la possibilité de recréer leur objet d'étude en laboratoire] d'accéder à une méthode expérimentale authentique permettant de tester les modèles » (Petitot, 1998). Toutefois, même si cette méthode est essentielle et fournit de bons résultats, il n'en demeure pas moins qu'elle ne permet pas de comprendre les raisons profondes de l'émergence des formes. De plus, ces approches sont locales au sens où elles ne sont guère généralisables - ce qui ne veut pas dire qu'elle ne soient pas applicables dans différents cas - dans la mesure où rien, ou presque, ne légitime scientifiquement (principes, lois, concepts) leurs fondements. En conséquence, elles ne débouchent pas sur des lois et offrent des extrapolations spatiales ou temporelles auxquelles il n'est guère possible d'estimer le niveau de véracité. C'est tout l'inverse avec une construction théorique basée sur des principes fondamentaux. Celle-ci peut conduire à des lois de portée universelle. C'est l'un des intérêts de la théorie de la relativité d'échelle.

Cela étant, comme, d'une part, « le monde du géographe est avant tout un ensemble de formes créées par d'innombrables processus physiques et par l'action des hommes » (Dauphiné, 2003, p. 148), et comme, d'autre part, « la nature est un immense réserve de formes fractales » (Dauphiné, 2003, p. 179), d'un point de vue purement conceptuel, on peut espérer que l'approche par la relativité d'échelle permettra de rendre compte de certaines caractéristiques essentielles de ces morphologies comme leurs limites, leurs tailles, leurs rapports réciproques, donc de définir des concepts efficaces et objectifs pour chacune de ces caractéristiques qui renvoie à l'idée de discontinuité (Brunet, 1968), c'est-à-dire celle d'hétérogénéité, ou de différenciation.

1.2. Objectif 2. Un cadre multi-scalaire théorique général en géographie

Depuis Yves Lacoste (1976), la démarche multi-scalaire fait l'originalité de la géographie. La paternité du raisonnement multi-scalaire peut être débattu, car la période de l'immédiat après-guerre avait vu naître beaucoup de réflexions sur l'idée d'échelle, mais c'est bien Yves Lacoste qui a le mieux formalisé cette notion en géographie (Verdier, 2004). Diverses études en analyse spatiale (Piron, 1990 ; Piron, 1993, par exemple) ont pourtant montré la grande difficulté de quantifier et d'articuler numériquement les différentes échelles en géographie. Cette thèse essaye de montrer les liens plus ou moins complexes entre l'étude multi-scalaire en géographie et la relativité d'échelle de l'astrophysicien Laurent Nottale (1993 ; 1998 ; 2010). En effet, ces deux approches fonctionnent en suivant une philosophie et une analyse commune du monde.

Cette articulation peut se faire, en partie, en passant par le concept de forme. Toute forme pour être définie possède une limite qui contribue à sa clôture logique (cohérence interne) et à sa définition en extension (frontière avec ce qui est autre), mais cette limite n'est visible qu'à une certaine échelle. Ainsi, l'établissement d'une relation entre l'existence d'une forme et l'échelle à laquelle on peut percevoir cette forme transparaît. C'est très clair dans la traduction cartographique des formes : à trop petite échelle, la forme ne peut être signifiée ; à trop grande échelle, elle déborde du cadre de la carte. Dans un cas comme dans l'autre, cela conduit « automatiquement » à modifier la problématique géographique et à l'adapter à l'échelle de la carte, donc à la taille de la forme.

La notion de limite en géographie, tant humaine que physique, est consubstantielle à notre discipline dans la mesure où il n'y a pas de géographie possible dans un espace homogène. C'est pourtant dans le cadre d'un espace homogène que Roger Brunet construisit la table des vingt-huit chorèmes. Cela étant, cette notion en géographie demeure encore très empirique, car elle n'a été abordée qu'à travers une perception (approche phénoménologique) et des mesures qui lui sont propres (caractérisation fractale par exemple), ou qui l'instrumentent dans des travaux sur des aires (ensemble de lieux dotés d'attributs divers) qu'elle enclôt (zone urbaine, forêt, *etc.*). C'est toute la question du découpage de l'espace par le géographe qui est appelé parfois par le politique à fixer des limites générales et indispensables à l'application d'un droit, d'une mesure, *etc.* C'est donc une des démarches fondamentales de territorialisation, d'appropriation dans tous les sens du terme (contrôle physique, matériel, imaginaire, juridique, *etc.*) d'un territoire. Moultes exemples historiques témoignent de cela tant lors des phases de conquête (colonisation sud et nord américaines, africaine, *etc.*) qu'à l'issue de conflits (cf. les traités de Versailles, du Trianon, *etc.*). Plus prosaïquement, une ZEP, une ZNIEF, un PLU, par exemple, nécessitent une limite. Ce fut peut-être un des grands intérêts de la géographie régionale que de se poser cette question en évitant d'y répondre par des évidences. Quelle est la limite de la région lyonnaise ? Quelle est celle du territoire méditerranéen de la France ? Quelle est celle de la latinité ? En d'autres termes, on peut déplorer que peu de choses, en dehors des intensions et des fragiles éléments indiqués ci-dessus, ne vient étayer conceptuellement et théoriquement cette notion, pourtant centrale de la géographie, ce qui explique d'ailleurs, tant le flou de ce concept largement prospectif que l'importance numérique du vocabulaire qui essaye d'en faire le tour : limite, discontinuité, front, marge, frontière, *etc.* Cela même si l'on peut donner ou trouver des définitions à tous ces termes. Généralement, chacune donne une explication de ces dénominations sans que leurs causalités fondamentales (structurelles) ne soient abordées. Comment expliquer que le monde ne soit pas homogène autrement qu'en le constatant, et en remarquant que s'il n'en était pas ainsi, on ne serait pas. La limite est donc un attribut de la vie et de la conscience.

En conséquence, le choix de telle ou telle limite reste largement arbitraire, c'est-à-dire qu'il dépend fortement de l'individu ou du groupe d'individus qui la perçoivent, et qui ont eu à la tracer (cf. les problèmes de frontière). Reste donc entière la question de l'explication de l'émergence des limites dont l'ubiquité tant pour des objets naturels qu'anthropiques conduit à faire l'hypothèse qu'elle renvoie à des mécanismes généraux, aussi bien pour des morphologies naturelles que pour des formes anthropiques. Par ailleurs, lorsque l'on étudie cette limite en tant que telle, on s'aperçoit que la géométrie adaptée à sa description est souvent une géométrie particulière (dans le sens où elle est peu employée) qui est celle des objets irréguliers ou lacunaires. Cette géométrie que Benoît Mandelbrot a qualifiée de « fractale », met en exergue des caractéristiques spatiales difficilement accessibles par la simple perception visuelle, voire auditive. Par ailleurs, la complexité vernaculaire du monde ne se comprendrait pas sans des entités plus ou moins spécifiques et spécialisées. Toutefois, celles-ci ne peuvent exister sans être délimitées, donc l'explication d'une forme de la complexité du monde, c'est-à-dire de l'espace géographique, passe par l'explication générique des limites.

À un certain niveau de généralisation et d'abstraction, le propre de la géométrie fractale est d'étudier les relations entre la morphogénèse (l'apparition d'une limite, donc d'une forme qui s'isole d'un fond) et le concept d'échelle qui, dans une première approche, peut être mis en œuvre à travers celui d'échelles géographiques conçues comme étant à la fois un rapport homothétique (1 / 25 000 par exemple) et une assimilation implicite du numérateur à la taille de l'homme (Volvey, 2005), ce qui fait que peut être établi une correspondance entre la taille d'un objet, ou d'une entité, et l'échelle qui permet de le ou la représenter dans un document à l'échelle humaine, à l'échelle du mètre carré essentiellement (cf. la taille des cartes).

Cette approche géographique contient donc implicitement l'idée de découpage, de délimitation ce qui conduit le géographe à procéder à de tels découpages ou délimitations (l'exemple le plus emblématique est peut-être celui de l'établissement d'une frontière) en s'appuyant sur des limites visibles (crête, cours d'eau, littoral, *etc.*) ou construites (limite de l'aire de vie d'une population parlant majoritairement la langue *x*, « bordure » d'une ville, *etc.*). Cela étant, même si ces limites sont identifiées ou identifiables, rien n'est dit, dans cette démarche, sur les raisons fondamentales de leur existence. D'où émergent-elles ?

En effet, la limite peut être abordée théoriquement en se questionnant sur l'échelle à laquelle elle apparaît, pour une entité, et à laquelle elle disparaît pour cette même entité - ce qui définit la gamme d'échelles de l'entité - dans un cadre théorique fractal. Autrement dit, il est possible de postuler qu'il existe un lien modélisable entre la limite que pose le géographe, et la gamme d'échelles en œuvre dans l'entité : entre cette gamme et l'échelle de perception d'une entité.

Roger Brunet (1968) s'est penché précocement sur cette question bien avant qu'elle ne fasse retour autour d'une thématique proposée à l'agrégation de géographie au tournant du siècle (cf. les travaux sur « échelle et temporalité en géographie »). Il avait alors identifié trois grandes catégories de limites en géographie : le point, la ligne, la surface. Aujourd'hui, on pourrait ajouter les volumes à cette liste, ce qui ne la dénaturerait pas dans la mesure où, de toute évidence, elle correspond à des archétypes euclidiens comme le cercle, le carré, *etc.* Toutefois, historiquement, c'est au même moment, ou presque, que Benoît Mandelbrot (1967) fit cette remarque pleine de bon sens qui change tout : « les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, l'aboiement d'un chien n'est pas régulier et la lumière ne se propage pas en ligne droite ».

Au-delà du truisme, et peut-être parce que c'est un truisme, cette remarque ouvre des perspectives extraordinaires. Là où Euclide, et bon nombre de mathématiciens prestigieux avaient considéré que le problème essentiel, car premier à être abordé, était celui des courbes lisses (les coniques par exemple) Benoît Mandelbrot affirme, lui, que la question fondamentale est celle des courbes non dérivables, des courbes ou des surfaces phénoménologiquement irrégulières, les formes euclidiennes devenant l'une des limites de cette irrégularité lorsque la dimension tend vers 0, 1, 2, 3 pour des objets dont la dimension topologique est successivement 0, 1, 2, 3. L'autre limite étant celle de l'irrégularité « totale » lorsqu'une entité de dimension topologique 0 tend vers 1, celle de dimension topologique 1 tend vers 2, *etc.*

On voit, dès lors, comment la posture historiquement datée de Roger Brunet doit nécessairement être dépassée, et cela, même si, comme il l'a affirmé à juste titre, toute discontinuité est une manifestation fondamentale de l'organisation de l'espace géographique dont la compréhension constitue le préalable fondamental à la construction d'une géographie scientifique. C'est ce qu'essaye de construire cette thèse.

Considérer la limite à partir d'archétypes particuliers de la géométrie euclidienne qui renvoient à une action de perception, ne semble pas être la bonne voie si l'on souhaite développer une approche théorique dans la mesure où rien ne fonde cette limite « choisie » en dehors d'une approche phénoménologique, ou alors il faut naturaliser la phénoménologie, c'est-à-dire faire découler la perception de l'émergence, en particulier, de mécanismes naturels qui, eux-mêmes s'appuieraient sur la manifestation biophysicochimique de l'émergence.

La cohérence fonctionnelle des entités renvoie à une gamme d'échelles finie à l'intérieur de laquelle le rapport entre les échelles peut être invariant ou covariant (cf. Objectif 3). Cette gamme se traduit spatialement (dans l'espace tangible) par la manifestation de la fractalité dans l'ordre des échelles (irrégularité, lacunarité) dans les limites de cette gamme et par la cristallisation de limites dites de coupures aux grandes et aux petites échelles.

Si l'on prend l'exemple d'un arbre qui n'est pas en tant que tel un objet géographique, mais qui est un bon support didactique, il est clair qu'il exhibe une morphologie fractale (à sa limite) où il se structure en échelles selon un mode hiérarchique particulier. Pourtant, chacun sait d'une part que les arbres « ne montent pas au ciel » comme disent les boursiers, et que, d'autre part, il est constitué de cellules végétales. Existent donc tant au niveau de l'enveloppe de chaque cellule (qui n'est pas un objet fractal) qu'au niveau de la frondaison, des échelles de coupure qui sont porteuses de limites phénoménologiquement perceptibles. Il semble en être de même pour bon nombre d'objets dont certains sont géographiques (dont certains entrent dans le projet du géographe) et d'autres non.

Toutefois, parmi les objets géographiques, il faut formuler une remarque qui nuance et complique la question. Lors de certaines phases historiques des villes que l'on perçoit comme presque stables alors qu'elles sont en phase de croissance ou de développement, des limites à petite échelle ont été évidemment présentes, sans quoi l'entité n'aurait pas la cohérence et la clôture qui lui permettent d'exister, qui sont mobiles dans l'espace tangible (interface terrestre), et qui constituent un front (parfois une marge) dont on peut penser qu'il se déplace à la suite de l'intégration d'échelles plus petites ; c'est-à-dire par accroissement de la gamme d'échelles qui constitue l'entité, et pas fondamentalement, à la suite d'un fonctionnement classiquement décrit (flux de matière et d'énergie, voire d'information). Ce développement dans l'ordre des échelles correspondant ainsi à une complexification théorique qui autorise une évolution de l'entité vers un état plus complexe. Cependant, cette complexité scalaire est ici structurellement déterminée, et non pas la conséquence d'un fonctionnement dont rien ne permet de modéliser le sens dans l'espace. Pourquoi y a-t-il concentration et non dispersion à l'échelle d'une ville ? Pourquoi y a-t-il dispersion et non concentration à l'échelle d'un réseau urbain ? Autrement dit, les raisons, par exemple, de productivités liées à la proximité, valides à l'échelle de la ville ne le seraient plus à l'échelle du réseau. De plus, la validité de ces raisons serait contrainte par la taille de l'entité. Ainsi, elle serait donc d'autant plus forte que la taille de l'agglomération croît. La ville finissant par croître parce que la validité croît. Il s'agit ici d'une relation circulaire tautologique de toute évidence. Il devient, dès lors, par exemple, impossible d'expliquer le tissu de petites villes non agricoles que l'on rencontre partout, et par conséquent la hiérarchie urbaine elle-même, sauf à faire intervenir d'autres facteurs tout aussi spécieux.

1.3. Objectif 3. Une démarche géographique articulant temps, espace et échelles

L'approche empirique par la description du fonctionnement ne peut être la voie essentielle de la compréhension. Ceci n'est pas nouveau et il faut être reconnaissant à Jean-Paul Hubert (1993) de l'avoir souligné et d'avoir indiqué que la géographie ne pourrait sortir de cette impasse qu'en faisant un effort de théorisation.

Toutefois, il apparaît que l'universalité de la géométrie fractale doit conduire à se poser la question de son utilisation dans une approche purement structurelle. En d'autres termes, est-il possible de trouver un formalisme théorique qui instrumente la fractalité afin d'explicitier les règles de niveau structurel qui expliqueraient les processus sans sujet à l'œuvre dans la constitution, par exemple, d'une ville ?

Dès lors, il devient possible de réfléchir en termes de covariance d'échelle (qui est une invariance plus profonde où c'est la forme des équations qui est conservée plutôt que seulement leurs coefficients numériques) plutôt qu'en termes d'invariance d'échelle (qui n'est qu'un cas particulier de covariance) pour chacune de ces morphologies qui se trouvent ainsi liées à un espace à cinq dimensions (trois dimensions de l'espace classique, une correspondant au temps, et une autre pour la dimension d'échelle) ; l'étape suivante consistant à caractériser des lois d'échelle. Cela peut se faire en posant comme principe fondamental - comme cela a déjà été fait en physique - que ces lois ne doivent pas dépendre du référentiel utilisé (en introduisant l'échelle dans la définition de l'état du référentiel) cela afin d'accéder à une universalité maximale.

Ainsi, comme dans la théorie de la relativité généralisée, la mise en œuvre de la covariance dans des modèles morphogénétiques permet de construire des équations relativistes d'échelle. Les solutions de ces équations définissent les lois d'échelle possibles, c'est-à-dire des lois caractérisant de façon explicite la dépendance des diverses grandeurs en fonction de la résolution. Cela revient à établir la façon dont ces grandeurs se transforment lorsque l'on passe d'une échelle d'observation à une autre. C'est ainsi qu'un véritable espace des échelles (espace contenant toutes les résolutions) est défini et permet d'aborder de manière nouvelle la question de l'organisation interne des systèmes structurés en échelle. Il est clair que cela est fondamental tant en géographie humaine qu'en géographie physique.

Parmi les lois déduites de ce formalisme, le géographe retrouvera les lois suivant un modèle « puissance », qui sont des lois de type fractal (invariance d'échelle), qu'il avait utilisées dans un cadre empirique. Elles sont maintenant, dans le nouveau cadre, établies à partir de principes universels tant pour les lois les plus simples que pour les lois les plus générales. Parmi celles-ci, on peut citer celles qui intègrent des corrections log-périodiques, qui ont été appliquées avec succès dans des analyses spatio-temporelle (Forriez, 2005 ; Forriez et Martin, 2008 ; Martin et Forriez, 2008), ainsi que dans des réflexions plus générales impliquant une « dynamique d'échelle ».

Tout comme avec la relativité d'échelle qui mène naturellement à une nouvelle généralisation de la géométrie de l'espace-temps qui n'y est plus seulement courbe, mais aussi non-différentiable (ce qui signifie que l'on ne peut plus y définir une dérivée, donc des vitesses ou des accélérations au sens ordinaire, dans des approches de nature physique) et fractal (c'est-à-dire explicitement dépendant de l'échelle de résolution, cette dépendance allant jusqu'à la divergence quand l'échelle tend vers zéro), il est possible en géographie de penser un espace voire un espace-temps dont les coordonnées sont fractales.

Il faut souligner que ce concept d'espace-temps fractal ne se réduit pas à celui d'objet fractal auto-similaire - popularisé par Benoît Mandelbrot - qui concerne la description empirique d'objets dans un espace qui reste euclidien, mais permet en plus de formaliser tant des lois d'échelle que des dynamiques d'échelle qui sont à la base de toute morphogenèse. Ainsi, en relativité d'échelle, c'est l'espace-temps lui-même qui devient fractal ce qui implique des propriétés nouvelles pour les objets qu'il contient. On peut ainsi hypothétiquement considérer que les formes elles-mêmes, dans une certaine mesure, sont le reflet d'états stationnaires présents dans des attracteurs, plus ou moins étranges (c'est-à-dire chaotique). Ceci conduit à des modèles et des caractérisations qui commencent à être entrevus et qu'il faut préciser *via* cette thèse.

La géographie semble donc être une science particulièrement bien adaptée pour mettre en œuvre les modes d'analyse et les outils de la théorie de la relativité d'échelle. Dès lors, la géographie pourrait tirer un grand bénéfice en termes conceptuels et appliqués de l'utilisation de ces principes et méthodes.

Dans cette perspective, les invariants obtenus par l'analyse des structures spatiales fractales pourraient servir à caler ou à valider la théorisation dont on espère qu'elle permettra de rendre compte de la cohérence par niveau (par échelle dans le langage géographique courant) d'entités, donc de l'émergence des limites de ces entités ; limites qui sont en rapport avec la cohérence de l'entité, qui peuvent être fractales ou non, et qui sont le support d'un certain nombre de réactions ou d'échanges entre l'entité et son

environnement. Derrière cette question se cache peut-être la question centrale de la géographie, du moins, la question sur laquelle une grande partie de sa pratique se fonde, à savoir « qu'est-ce qui détermine les échelles fondamentales de la nature ? » (Nottale, 1998, p. 149).

Dans ce contexte, cette théorisation s'appuie sur une description structurelle qui fait l'hypothèse d'une dynamique d'échelle ; c'est-à-dire d'une dynamique mue par la modification de la gamme des échelles (ou des rapports entre les échelles) dont la conséquence est la mobilité des limites ; limites consubstantielles à la gamme puisque celle-ci, par définition, ne peut s'étendre de moins à plus l'infini. Autrement dit, il s'agit de l'idée qu'à n'importe quelle échelle de nouvelles structures apparaîtront. C'est donc une manière élégante de contourner la difficulté du chaos apparent de cette organisation. L'approche multi-scalaire « classique », celle de Yves Lacoste (1976), l'avait bien identifiée empiriquement.

En d'autres termes, il faut postuler que la dynamique fondamentale est une « dynamique d'échelle » (variation positive ou négative de la gamme d'échelles) qui se traduit par une dynamique dans l'espace tangible. Cela implique que la modélisation doit se situer préférentiellement à ce niveau très théorique et pas seulement au niveau des conséquences tangibles. Elle doit donc porter sur les causes des manifestations phénoménologiquement perceptibles c'est-à-dire sur le niveau de la dynamique « interne » d'échelle.

Ce qui est proposé ici consiste à passer d'une modélisation des manifestations fractales des dynamiques « internes » d'échelle (mesures de caractéristiques fractales, par exemple, mais aussi analyse spatiale d'objets structurés en échelles, mais plongés dans un espace euclidien comme un arbre dans un cube ou une coupe topographique sur une feuille de papier, *etc.*), à une modélisation de la dynamique « interne » d'échelle, elle-même à partir de laquelle conséquemment sera obtenu la modélisation des manifestations fractales de l'espace tangible.

Par ailleurs, le lien entre échelles et limites pourrait peut-être permettre de résoudre le problème de la forme optimale de tel ou tel objet géographique dans la mesure où la gamme d'échelles possible renvoie à des déterminants structurels formalisables à partir d'un espace-temps fractal à cinq dimensions, tel celui conçu et utilisé par Laurent Nottale (1993 ; 1998). Ainsi, la conquête d'un espace des échelles par une articulation des limites entre elles en fonction de leur inclusion ou de leur indépendance permettrait d'offrir de nouveaux outils pertinents aux urbanistes, par exemple, ou tout autre ingénieur.

L'argument qui est au cœur de la thèse est que la géographie est d'abord scalaire avant d'être spatiale. Aussi, une réflexion épistémologique au sujet des échelles en géographie s'imposera, car le terme renvoie très souvent à des réalités fort différentes d'un auteur à un autre. Au terme de cette réflexion, l'introduction des structures fractales permet de faire la transition avec les parties suivantes qui proposeront d'avancer dans ces investigations à travers quelques cas rencontrés tant en géographie physique qu'en géographie humaine. En géographie physique, le cas du réseau hydrographique des Gardons permettra d'introduire les concepts d'arborescence fractale et de transition fractal - non fractal. En géographie urbaine, une réflexion sera menée autour de la définition de la limite des villes. Une première étude s'intéressera aux taches urbaines de différentes villes du monde. Deux études complémentaires seront ensuite menées par l'intermédiaire de la « ville d'Avignon » définie par son réseau intra-urbain et de la répartition du bâti dans la communauté d'agglomération de Montbéliard. Elles auront pour objectif de montrer les rapports étroits entre échelle, limite et irrégularité. En géohistoire, l'étude de la répartition de mottes et de châteaux en Picardie historique consistera à mener une recherche réellement spatio-temporelle sur un temps long (environ dix siècles) tout en explicitant un élément structurant important dans la localisation actuelle des villes et des villages français. En géographie du peuplement, la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire permettra de réaliser une analyse utilisant l'intégralité des méthodes proposées dans cette thèse. Elle permettra également de réaliser un lien entre peuplement et ville *via* d'une part, les structures rang - taille de chaque État du monde, et d'autre part, une analyse multi-échelle complète. Le plan choisi se structure donc en échelles : on part d'une petite étendue (20-50 km) pour arriver à une grande étendue (la planète entière), en passant par une étendue intermédiaire (200 km).

Partie 1. Échelles, limites et modèles : la forme en géographie

2

Échelles en géographie

La géographie utilise abondamment le concept d'échelle qui possède plusieurs significations. En effet, « les notions d'échelle et de changements d'échelle sont au centre de beaucoup de préoccupations : on cherche à prendre en compte les relations ou interactions entre des entités relatives à des échelles différentes. L'analyse ou la modélisation de ces interactions est devenue pour toute discipline une nécessité » (Mathian et Piron, 2001, p. 61). Toutefois, avant de développer davantage le sujet, il est bon de rappeler qu'il s'agit d'une préoccupation récente. En effet, « dans la géographie française de la fin du XIX^e siècle, et sous réserve d'inventaire, le terme d'échelle semble réservé à la cartographie » (Robic, 2002). Le glissement d'une notion marginale à une notion centrale s'est réalisé dans le courant du XX^e siècle, avec notamment l'avènement de la Nouvelle géographie (Brunet, 1968), et de l'analyse spatiale (Lacoste, 1976 ; Marceau, 1999). Autour du terme « échelle » gravite des concepts prospectifs comme « résolution », « niveau » ou encore « échelon ».

2.1. Échelle, résolution et niveau

Le terme « échelle » vient du latin *scala* qui signifie échelle dans le sens de l'outil servant à grimper, ainsi que du terme *scalare* qui signifie escalier. En français, ces termes ont donné le terme « scalaire » qui fut essentiellement repris en mathématique pour désigner un nombre réel ou complexe quelconque. Par exemple, on appelle produit scalaire de deux vecteurs, l'opération qui associe les coordonnées de ces vecteurs pour donner un nombre, un scalaire. De plus, en physique, on distingue le champ scalaire du champ vectoriel. Le champ scalaire correspond à un « champ de nombres », à un vecteur ayant une composante, tandis qu'un champ vectoriel est un vecteur ayant plusieurs composantes. En géographie, « scalaire » correspond à un adjectif épithète renvoyant au terme « échelle ». Pour finir, aujourd'hui, utilisée au sens figuré, l'échelle en géographie est devenue une notion très générale qui est synonyme d'ordre de grandeur.

2.1.1. L'échelle en géographie

En géographie, l'échelle recouvre deux réalités : l'une est quantitative, l'autre qualitative. La notion quantitative correspond à un rapport entre la mesure d'une distance sur une carte et la mesure d'une distance sur le terrain (Baudelle et Regnault, 2004, p. 8). Il s'agit donc d'un simple rapport homothétique. Cependant, l'échelle est aussi pour le géographe une notion qualitative qui fut introduite par Yves Lacoste, dans son célèbre ouvrage de 1976, *La géographie, ça sert d'abord à faire la guerre*. Il inventa un nouveau type de raisonnement en géographie fondé sur l'articulation des échelles entre elles pour étudier un territoire. En reprenant la racine latine, il le baptisa : approche multi-scalaire (qui signifie littéralement « plusieurs échelles ») consistant à expliquer l'état (social, économique, *etc.*) d'un territoire par l'emboîtement des échelles. Il partait d'un postulat, basique aujourd'hui, qu'une localisation n'avait pas les mêmes intérêts géopolitiques en fonction du niveau administratif et politique. Depuis, c'est surtout cette analyse qui fut mise en œuvre par les géographes.

Depuis, la notion d'échelle s'est complexifiée. L'approche la plus simple est sans doute celle de l'écologue Jérôme Mathieu (2007) qui rappelle qu'il existe plusieurs types d'échelles : l'échelle d'observation, l'échelle des processus spatiaux et l'échelle des niveaux d'organisation. L'échelle d'observation est fondamentale, car elle précise la qualité de l'information des structures spatiales étudiées (Piron, 1992 ; Piron, 1993). Il faut évidemment que cette échelle soit en adéquation avec l'objet étudié. Autrement dit, il est nécessaire que l'instrument de mesure (ou l'outil d'observation) soit adapté (Marceau, 1999). Par exemple, mesurer une salle de cours en parsec ou en angström n'a aucun sens. Autrement dit, lorsque l'on analyse une mesure, tous nos résultats dépendent souvent de l'échelle d'observation (Mandelbrot, 1977 ; Nottale, 1993), car l'information même d'une structure dépend de la résolution : « il faut choisir une échelle de description » (Delahaye, 1999, p. 23). Une fois l'échelle d'observation fixée, il faut définir la ou les échelles du ou des processus spatiaux. Pour ce, il faut fixer une étendue c'est-à-dire la limite d'une zone d'étude. Cela permet de fixer une résolution qui n'est pas une échelle géographique au sens de la cartographie. La résolution est la limite du mesurable. Ainsi, la limite des mesures effectuées sur une carte papier est le rapport entre le millimètre (une règle fournit rarement une mesure en deçà) et l'échelle cartographique.

Avant de poursuivre, il est bon de rappeler que c'est la résolution qui commande la définition des petites et grandes échelles en géographie. À savoir que, plus une résolution est fine (par rapport à l'objet étudié), plus l'échelle est grande. *A contrario*, plus une résolution est grossière (par rapport à l'objet étudié), plus l'échelle est petite. Cette originalité de la géographie est toujours bonne à rappeler, car, pour toutes les autres disciplines, l'échelle reste une question de taille. Généralement, la taille servant de référence est la taille humaine (Volvey, 2005, p. 18). Plus la taille est grande (par rapport à un être humain), plus l'échelle est grande. De même, plus la taille est petite (par rapport à un être humain), plus l'échelle est petite. Cette ambiguïté entre la résolution et la taille marque bien l'extrême difficulté de définir le terme « échelle ». Toutefois, l'étendue (ou encore la « fenêtre ») et la résolution doivent pouvoir fournir une sorte de compromis : une haute résolution ne peut qu'avoir une faible étendue, et vice-versa. Dans l'étude de la ville d'Avignon, la grande étendue et la grande résolution (1 pixel pour 1 × 1 m) aboutit à une saturation de

la mémoire d'un ordinateur, ce qui nécessite des partitions de cette image (cf. chapitre 8). Enfin, l'échelle des niveaux d'organisation permet d'expliquer l'émergence spatiale des objets géographiques. Il existe des objets à une résolution de 1 / 100 m comme les villes qui n'ont pas du tout la même morphologie à 1 / 25 000 m, et surtout, si l'on conserve la même étendue, elles n'ont pas du tout le même environnement. Pourtant, c'est le même objet géographique. L'échelle a donc des propriétés émergentes que l'on nomme niveau, celles-ci permettant de faire apparaître de nouvelles limites. Le niveau possède un terme qui lui est presque synonyme : l'échelon lorsqu'il s'agit d'un territoire issu d'une structure politico-administrative. Comme le rappelle Roger Brunet (Brunet *et alii*, 1992, p. 176), l'échelon correspond au barreau d'une échelle. Par extension, un échelon définit un niveau d'analyse, c'est-à-dire un palier dans une hiérarchie (Brunet *et alii*, 1992, p. 349). Autrement dit, niveau et échelon correspondent aux aspects structurels de la notion d'échelle. En règle générale, le niveau renvoie à une étude mono-scalaire car il correspond à l'échelle d'étude idéale de l'objet géographique étudié. « Chaque unité géographique associe, à un niveau donné ayant sa propre logique, des acteurs et leur stratégie, spécifique à la fois d'une formation sociale et d'une dimension spatiale et temporelle, particulière » (Bouzat, 1990, p. 66). Elle devient alors son échelle privilégiée, ce que déplore d'ailleurs Marie Piron : « très souvent, l'information traitée en géographie est observée à une échelle [On considère l'échelle comme le niveau d'analyse utilisé pour le traitement des données] qui correspond à un certain niveau d'agrégation spatial » (Piron, 1993).

Pour remédier à ce constat, Marie Piron mit en œuvre ce qu'elle appelle « l'analyse des systèmes en échelles ». Marie Piron avait parfaitement compris ce qui bloquait le développement quantitatif de l'approche multi-scalaire, à savoir que « le processus d'agrégation transforme l'information puisque celle-ci est analysée non plus suivant l'unité élémentaire d'observation, mais suivant une unité spatiale définissant le niveau d'agrégation géographique » (Piron, 1993). Autrement dit, selon elle, il existe un « système d'échelles » qui est « défini par un ensemble de niveaux d'analyse, de données descriptives de ces niveaux et de relations entre eux » (Piron, 1993). Certains sceptiques diraient, « Et alors ? C'est normal et trivial ! ». En fait, le système d'échelle d'un objet est une donnée fondamentale. Le choix de tel ou tel niveau permet de masquer des informations présentes au niveau précédent ou suivant. Cela revient à nier qu'il existe une relation entre les niveaux d'étude. C'est donc une approche contraire à ce qui était annoncé dans une approche multi-scalaire. Marie Piron développa un modèle de comparaison entre les niveaux d'observation de données de la ville d'Ouagadougou à partir d'une analyse multivariée effectuée à chacun de ces niveaux d'analyse. Ce faisant, elle compara les gains et les pertes d'informations entre ces niveaux. Enfin, il existerait des objets qui restent constamment apparents quel que soit le niveau choisi. Ce type d'objet fut appelé « transcalaire » par Claude Raffestin. Ainsi, un phénomène transcalaire « intéresse toutes les échelles géographiques » (2001).

Pour conclure, « travailler simultanément sur plusieurs échelles permet de décider du niveau d'analyse pertinent pour un phénomène donné et de saisir l'influence des mêmes facteurs sur des niveaux différents. Cela nous conduit à réfléchir parallèlement à la pertinence des découpages géographiques presque toujours arbitraires servant de base à la stratification et à la cartographie » (Piron, 1993). Toutefois, l'étude de la relation entre les niveaux revient à poser deux nouvelles questions. (1) Pourquoi et comment les différents niveaux se réorganisent-ils ? (2) Pourquoi et comment les différents niveaux se simplifient-ils ou se complexifient-ils ? Autrement dit, ce type d'analyse renvoie au concept d'émergence, ce que l'on peut définir comme une « apparition inattendue et soudaine (dans une série d'événements ou d'idées) » (Mayet, 2005, p. 5). En effet, généralement, cette rupture peut s'expliquer si l'on change de niveau, en allant vers la petite ou la grande échelle (Petitot, 2004). De plus, l'émergence peut engendrer de l'ordre ou de la simplification. Cette réorganisation apparente est un phénomène appelé auto organisation qui correspond à « l'apparition spontanée d'une forme ou d'une structure qui ne résulte pas d'un programme codé comme un algorithme (Sapoval, 1997, p. 166).

2.1.2. Échelles et géométrie fractale

À partir de là, entre en scène la géométrie fractale (cf. chapitre 4). En effet, l'idée de « système d'échelle » de Marie Piron n'est rien d'autre que la définition triviale de cette géométrie : « le processus de l'analyse du système d'échelles revient à faire des « allers-retours » entre les niveaux pour comprendre les mécanismes d'organisation d'un espace » (Piron, 1993), c'est-à-dire étudier la relation entre ces niveaux. De plus, la géométrie fractale répond aux quatre questions sans réponses de Marie Piron, à savoir : (1) « quel est l'effet du découpage géographique sur la perception d'un phénomène donné, autrement dit quel niveau d'analyse choisir et quelles sont les conséquences de ce choix ? (2) À quel niveau une variable perd-elle son pouvoir de discrimination ? (3) Trouve-t-on les mêmes éléments d'organisation aux différentes échelles ? (4) Quelle est la nature de l'hétérogénéité interne des unités spatiales ? » (Piron, 1993) L'application de la géométrie fractale dans différents domaines de la géographie physique et humaine à la fin des années 1980 a permis de renouveler la question des échelles. Cette géométrie fractale fut inventée par le mathématicien Benoît Mandelbrot (1975). Il s'agit d'une nouvelle approche mathématique consistant à analyser les résolutions. Il avait donc besoin d'inventer de nouveaux mots pour qualifier des objets qui se développent dans les échelles. Il les appela d'abord objets à « comportement scalant », qui est un anglicisme renvoyant à une invariance sous les dilatations et les contractions. En effet, la langue anglaise a conservé le terme *scale*, très proche de sa racine latine *scala*, pour désigner entre autres une résolution. D'ailleurs, en géographie, l'échelle « est toujours employée au sens d'échelle de résolution spatiale, mais il fait tout aussi bien référence à l'échelle de représentation cartographique qu'aux niveaux d'observation et d'analyse » (Mathian et Piron, 2001, p. 61).

Il est désormais important, pour ne pas dire essentiel, de distinguer échelle et résolution. L'échelle désigne plutôt une catégorie générale, tandis que la résolution correspond plutôt à une variable permettant de quantifier ce concept d'échelle. Il faut insister une nouvelle fois sur le fait que la résolution est un rapport entre une longueur mesurée sur le terrain, par exemple, et la longueur reportée sur une carte, sur un plan, sur un schéma, *etc.* Par exemple, lorsque l'on dit 1 millimètre représente 100 mètres, cela signifie qu'en deçà 1 millimètre on ne possède plus aucune information sur la mesure opérée sur le terrain. De même, on appelle ainsi la série de divisions sur un instrument de mesure. La résolution est donc un maillage. On peut ainsi définir différent type de maillage. Le plus courant, le plus utilisé est évidemment le maillage carré, mais il n'est pas unique. Il existe également le maillage rectangulaire, hexagonal et circulaire, *etc.*

Échelle, résolution et niveau ne sont jamais uniques car, « d'une façon plus générale, tout changement d'échelle modifie les perceptions et les représentations, et parfois même la nature des phénomènes. [...] Le changement constant d'échelle, s'il est maîtrisé, est extrêmement utile et la compréhension trans-scalaire et multiscale de l'espace est toujours supérieure à une vision monoscale » (Brunet *et alii*, 1992, p. 175).

2.2. Multi-échelle, multi-résolution et multi-niveau

Étudier une échelle, une résolution et un niveau a peu d'intérêt, car « il se passe beaucoup de choses quand on change d'échelle, c'est-à-dire d'ordre de grandeur dans les échelles et dans la taille des phénomènes » (Brunet *et alii*, 1992, p. 175). De plus, « le changement d'échelle sert de signe de reconnaissance des géographes [et] sert de marqueur corporatif » (Lévy et Lussault, 2003, p. 287). Pour étudier les changements d'échelle, il existe différents concepts communs entre la géographie et d'autres sciences : multi-échelle, multi-scalaire, multi-résolution et multi-niveau. Pour définir rigoureusement ces termes, il faut procéder de manière analogique par rapport aux définitions données des termes « échelle », « résolution » et « niveau ». Ainsi, l'approche multi-échelle est une expression générique pour désigner les différentes relations qu'il peut exister entre les échelles, d'où l'importance de la théorie de la relativité d'échelle où seules les relations ont un sens, et non pas les échelles elles-mêmes dans l'absolu.

2.2.1. L'approche multi-scalaire

L'approche multi-scalaire est l'approche multi-échelle la plus ancienne en géographie. Il s'agit de celle d'Yves Lacoste (1976). Elle consiste à étudier l'emboîtement d'un objet à différentes échelles. Pour cela, il faut « classer les différentes catégories d'ensembles spatiaux, non pas en fonction des échelles de représentation, mais en fonction de leur différence de taille dans la réalité » (Lacoste, 1976, p. 68). C'est ainsi qu'il faut « ordonner la description et le raisonnement géographique en différents niveaux d'analyse spatiale qui correspondent à différents ordres de grandeurs des objets géographiques, c'est-à-dire des ensembles spatiaux qu'il importe de prendre en considération pour rendre compte de la diversité des combinaisons de phénomènes à la surface du globe » (Lacoste, 1976, p. 68). A la suite des investigations d'Yves Lacoste, plusieurs méthodes d'analyse quantitative ont vu le jour. D'abord, on utilisa l'analyse de la variance (Haggett, 1973 ; Sanders, 1989 ; Grasland, 1991). Puis, on utilisa des études multidimensionnelles comme l'analyse en composantes principales et l'analyse factorielle des correspondances (Rozenblat, 1989). Enfin, Stewart Fotheringham et David. Wong (1991) utilisèrent des modèles de régression linéaire multiple pour traiter le problème de l'unité zonale modifiable (M.A.U.P.). Le M.A.U.P. est un objet d'étude extrêmement intéressant, car ils montrent comment une structure change avec la résolution initiale utilisée. Jusqu'à présent, l'objectif de ceux qui l'étudient est de supprimer ce problème. La relativité d'échelle montre que c'est impossible (Nottale, 1989 ; 1993 ; 1998 ; 2001a ; 2001b ; 2002a ; 2002b). De plus, toutes ces méthodes souffrent d'un manque théorique sous-jacent ; théorie qui pourrait être celle de la relativité d'échelle.

2.2.2. L'approche multi-résolution

L'approche multi-résolution consiste à étudier un objet géographique à plusieurs résolutions données. Elle permet de trouver quels sont les « bons » niveaux d'observation possibles. C'est une telle approche qui sera développée dans le cas de l'étude morphométrique d'Avignon (cf. chapitre 8).

2.2.3. L'approche multi-niveau

L'approche multi-niveau consiste à mettre en relation les niveaux d'observation et les niveaux d'organisation (Mathian et Piron, 2001, p. 62). En effet, les différentes tailles d'un objet s'articulent autour de plusieurs niveaux d'organisation, c'est-à-dire de niveaux à partir desquels l'environnement spatial d'un objet change. La relation de dépendance entre ces niveaux est double : soit il s'agit d'une inclusion, soit il s'agit d'une intersection. La première a été la plus utilisée jusqu'à présent. Elle consiste à prétendre qu'un objet géographique s'emboîte comme les poupées gigognes. La seconde est plus rarement utilisée, du moins de manière explicite. Elle consiste à dire que l'information entre les niveaux change de nature. Cela renvoie à tous les problèmes autour de l'agrégation, notamment du M.A.U.P. (Fotheringham et Wong, 1991).

2.3. Effet d'échelle et effet de maillage

Tout cela, conduit naturellement à ce que tous les géographes appellent « l'effet d'échelle » (Claval, 2003, p. 56-58) d'une part, et « l'effet de maillage » d'autre part. « Le premier appelé « effet d'échelle » est lié au biais introduit par le choix d'un échelon pour l'observation d'une distribution. Le second, appelé « effet de maillage », est lié au biais introduit par le choix d'un maillage, pour un échelon donné » (Mathian et Piron, 2001, p. 63). L'effet de maillage concerne donc la résolution. En fait, les deux effets observés correspondent à différents aspects de la manifestation de la fractalité d'un objet (Nottale, 1993). Comme cela sera montré dans le chapitre 8, avec l'exemple de l'étude morphométrique de la ville d'Avignon, les deux effets sont intimement liés et dans la pratique, les distinguer est une gageure.

Aujourd'hui, le concept d'échelle en géographie semble être menacé. En effet, pour Denise Pumain (2003), les échelles intermédiaires entre le local et le global sont peu étudiées. Elle se pose d'ailleurs la question de leur existence. Pour elle, le territoire ne présente plus d'intérêt, seuls les réseaux comptent.

De plus, l'analyse multi-scalaire d'Yves Lacoste reste valable pour des problèmes géopolitiques (Raffestin, 2001). Par contre, dans les autres analyses menées dans les différentes sous-disciplines de la géographie, elle semble caduque. En géographie humaine, par exemple, aujourd'hui, dans l'ère des nouvelles technologies de l'informatique et de la communication, ce qui compte est d'être branché, connecté. La distance ne compte désormais plus, car chaque individu a directement accès au reste du monde. Toutefois, l'analyse multi-échelle conserve tout son sens dans l'analyse de morphologies tangibles, *via* notamment la géométrie fractale. Ainsi, la notion d'échelle conduit à celle de limite. Les deux sont intimement liées.

3

Limites et discontinuités en géographie

Limites et discontinuités sont au cœur de l'analyse spatiale (Brunet, 1968). Dans *Le Robert* (1973), la première définition d'une limite est une « ligne qui sépare deux terrains ou territoires contigus (bord, confin, frontière, lisière) ». Le dictionnaire poursuit la définition en précisant qu'il s'agit à la fois d'un début et d'une fin. Cette première partie de la définition décrit la limite comme quelque chose de ponctuel : « point que ne peut ou ne doit pas dépasser une activité, une influence (barrière, borne, extrémité) ». La limite est donc perçue comme un point que l'on ne peut franchir, un point contre lequel on butte. Cependant, la limite « sépare autant qu'elle unit » (Martin, 2003c, p. 129). Pour le géographe, « la limite est ce qui permet de circonscrire un ensemble spatial donné. [...] La limite apparaît comme la périphérie d'un ensemble cohérent, construit à partir d'un centre, d'un pouvoir et de l'appropriation identitaire de cet espace » (Renard, 2002, p. 40). Les limites peuvent alors se classer en deux catégories : les limites progressives et les limites linéaires. « En géographie, l'absence de limite serait un espace isotrope et homogène ; c'est-à-dire en géomorphologie une plaine particulièrement plane et infinie dont l'érosion se ferait par des dépôts également distribués de matériel » (Martin, 2003c, p. 128). Par ailleurs, la limite, si elle s'accroît, devient une discontinuité, c'est-à-dire, en géographie, une unité spatiale particulière qui est, soit organisée, soit désorganisée. Philippe Martin propose deux catégories de discontinuités : les discontinuités topologiques entre deux états quasiment statiques et les discontinuités correspondant à des lignes ou à des surfaces entre deux entités en mouvement plus ou moins rapide. Elle semble alors plus unir qu'elle ne sépare (Martin, 2003c, p. 128). Il est important de noter que les limites peuvent émerger sans aucune action anthropique. Pourquoi et comment les limites émergent-elles ? Comment se cristallisent-elles ? Ces questions posent à nouveau le problème de la morphogénèse.

La cristallisation se réalise essentiellement grâce à la naissance d'une cohérence. D'après *Le Robert*, une cohérence est une « union étroite des divers éléments d'un corps ». La cohérence est liée donc à la notion d'existence. Celle d'un système fait alors émerger ses limites tangibles qui participe à la définition d'une forme. Celles-ci matérialisent le degré de fermeture. Il existe un « dedans » et un « dehors », le « dehors » étant ce que l'on nomme l'environnement. À partir de là, ce « dehors » structure le « dedans ». Autrement dit, dans le « dedans » émerge une identité (Gay, 2004). Par ailleurs, l'émergence des limites est aussi liée à la notion d'échelle, car toute limite possède un niveau privilégié dans lequel il est possible de la percevoir. En effet, la limite « permet de circonscrire des objets d'étude à des échelles spécifiques dont l'articulation peut conduire à un discours explicatif, voire démonstratif » (Martin, 2003c, p. 129). Une échelle $n - 1$ est incluse dans une échelle n , par exemple. Cet emboîtement contribue à faire émerger une limite, donc une forme. Encore une fois, l'échelle et la taille sont au cœur de la réflexion, sans elles nul problème ne peut être défini. Aujourd'hui, on possède un outil qui permet de décrire l'emboîtement des échelles : c'est la géométrie fractale. « La mesure d'une chose dépend de l'outil de mesure que l'on utilise. Le mathématicien Benoît Mandelbrot a eu l'intuition de transformer « outil » en « échelle » » (Baudelle et Regnaud, 2004, p. 101).

L'analyse spatiale permet de définir méthodologiquement une limite ou une discontinuité. Cette approche se caractérise par « l'ensemble des méthodes et des techniques qui décrivent la manière dont un ou plusieurs phénomènes s'inscrivent dans l'espace - qu'il s'agisse de leur distribution, de leur configuration ou de leur covariation - afin de déceler et de quantifier les interrelations qui sous-tendent les organisations spatiales » (Voiron-Canaccio, 1995, p. 14). Au cours de son évolution, elle a privilégié trois approches. Tout d'abord, l'approche classique de Roger Brunet consiste à rapprocher l'explication des discontinuités spatiales de la théorie des systèmes. Ensuite, cette approche a évolué vers des modélisations de différentes natures (graphique, discursif, mathématique). Toutefois, celle-ci semble aujourd'hui arriver à une impasse (Martin, 1997 ; 2003a ; 2003b ; 2006a ; 2006b ; 2006c ; 2006d ; 2006e ; 2008a ; 2008b ; 2008c). Aussi, une approche plus globale semble percer aujourd'hui, même si cela se fait de manière inconsciente : l'approche relativiste d'échelle.

3.1. L'approche classique : la théorie des discontinuités de Roger Brunet

L'approche que l'on appellera classique est celle qui se fonde sur le concept de discontinuité. Roger Brunet (1968) fut le premier géographe français à tenter de définir clairement ce concept en géographie.

3.1.1. Le concept de discontinuité en géographie

Une discontinuité est une rupture apparaissant dans l'espace ou dans le temps. Les discontinuités temporelles représentent les discontinuités les mieux connues, car il demeure plus simple d'identifier ce type de discontinuités que celles de l'espace. Toutefois, selon Roger Brunet, l'espace est riche en discontinuités de toutes sortes marquées par des interfaces, des limites et des frontières, que l'on soit en géographie humaine ou physique. Les discontinuités de l'espace peuvent être franches, brutales (une frontière, un mur...) ou progressives, ménagées (une transition, une marge, une marche, une plage).

En première typologie, on peut prétendre qu'il existe deux types de discontinuités : les discontinuités exogènes, provoquées de l'extérieur et les discontinuités endogènes, produites par le processus lui-même, par le fonctionnement du système, sans intervention directe de l'environnement. La discontinuité endogène rétablit une forme de continuité là où l'on voit souvent une rupture inexplicable ou jugée exogène.

En seconde typologie, on peut distinguer les discontinuités matérielles des discontinuités symboliques. Ces deux catégories reposent sur l'espace vécu et perçu par les individus.

Roger Brunet fonde sa théorie des discontinuités sur la notion de seuil qui permet de définir des discontinuités progressives. Finalement, Roger Brunet matérialise cette idée *via* les chorèmes, ce qui lui permet d'affirmer que l'espace géographique comporte quatre grandes sortes de discontinuités (Brunet, 1980). La première discontinuité connue est celle qui associe les réseaux routiers, les ghettos, les quartiers, *etc.* Ensuite, il y a toutes celles qui résultent du jeu des principales lois de l'espace connues. De plus, il y a toutes les lignes de contact (ou interfaces) comme les franges et les bordures, *etc.* Enfin, il existe toutes les limites de contrées qui marquent le passage d'un système spatial à un autre.

3.1.2. Les dix-sept points de la théorie de Roger Brunet (1968)

Roger Brunet fonde sa théorie des discontinuités sur dix-sept points.

1. « L'évolution des phénomènes naturels et l'évolution des phénomènes sociaux [sont] produite[s] par l'interaction de divers agents au sein de complexes. Ces interactions peuvent être contradictoires ou cumulatives.
2. La croissance graduelle de l'un des paramètres, de plusieurs d'entre eux ou d'une variable extérieure peut faire apparaître des discontinuités dans l'évolution.
3. Ces discontinuités se marquent généralement par des seuils.
4. Ceux-ci correspondent soit à un cisaillement, soit à un changement d'état, soit à un relais dans les mécanismes fondamentaux, parfois à deux de ces transformations.
5. Ils sont, pour les phénomènes envisagés, soit seuils de manifestation ou d'extinction, soit seuils de divergence, de renversement, d'opposition ou de saturation provoquant plafonnement ou précipitation.
6. Selon la rapidité avec laquelle ils sont franchis, on distingue seuils angulaires et seuils d'inflexion.
7. Le franchissement d'un seuil résulte d'une préparation lente, apparemment continue, mais généralement faite d'une série de discontinuités à petite échelle, durant laquelle s'additionnent les tensions ou les informations.
8. Il peut être facilité, mais non nécessairement, par l'action d'un catalyseur et par la présence d'une zone de faiblesse.
9. Une nouvelle période d'évolution graduelle tendant à effacer les effets de la discontinuité ou à préparer une nouvelle discontinuité suit généralement le franchissement d'un seuil.
10. Celui-ci marque ordinairement une mutation qualitative, provoquée par ces modifications quantitatives progressives.
11. Le franchissement d'un seuil peut n'être qu'une oscillation réversible, ou bien provoquer des conséquences irréversibles, ou bien déclencher des processus de compensation.
12. Il peut provoquer, avec quelque retard des rétroactions - généralement inférieures à l'action.
13. Il peut entraîner un renversement dans le sens de l'évolution ou dans la nature des phénomènes.
14. Bien des oscillations sont dues au retard et à l'excès avec lesquels agissent les rétroactions.
15. Beaucoup de phénomènes ne se manifestent, beaucoup d'observations ne sont valables, qu'entre deux seuils, au-delà desquels le contraire peut être vrai.
16. Les discontinuités dans l'évolution (discontinuités dynamiques) peuvent faire apparaître des discontinuités matérielles (discontinuités statiques).
17. La notion de discontinuité est relative ; elle dépend de l'échelle d'observation » (Brunet, 1968, p. 76-77).

La théorie de Roger Brunet n'a pas beaucoup vieilli. Les points n°1 à 16 représentent l'application de la théorie des systèmes en géographie. Les points n°6, 7 et 8 sont plus spécifiques à l'espace géographique. En fait, l'objectif de Roger Brunet était d'étudier les discontinuités pour elles-mêmes afin d'en comprendre leur origine. Autrement dit, Roger Brunet reprend à sa manière la problématique de René Thom, à savoir comment le continu permet-il de produire l'émergence d'une discontinuité. Parmi tous ces points, seul le n°17 est original dans sa manière de l'expliquer, car il montre que Roger Brunet a parfaitement compris l'importance de la dépendance d'échelle pour les objets géographiques. Ce point correspond à la définition d'un objet fractal. Pourquoi n'utilise-t-il pas le terme ?

En fait, les objets fractals étaient mal connus à cette époque. Certes, l'article de Benoît Mandelbrot (1967) sur les côtes de la Grande-Bretagne avait été publié, mais pas encore son ouvrage de vulgarisation de 1975 dans lequel le terme « fractal » fut inventé pour désigner tout objet dépendant d'échelle. La concomitance temporelle de ces deux approches a fait que les fractales sont presque passées inaperçues en géographie. Les premiers textes en géographie sur le sujet datent de la fin des années 1980 (Dauphiné, 1987 ; Martin, 1991 ; Frankhauser, 1994 ; Dauphiné, 1995). Ces travaux fondateurs en géographie française n'ont pourtant pas pris en compte l'idée que la fractalité définissait de manière mathématique « l'effet d'échelle », et permettait de dépasser un problème insoluble dans le cadre de l'analyse spatiale classique. De nos jours, la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale (1984 ; 1989 ; 1992 ; 1993 ; 1997 ; 1998 ; 2001a ; 2001b ; 2002a ; 2002b ; 2010) qui s'appuie sur les travaux de Benoît Mandelbrot (1975 ; 1982 ; 1997), offre la possibilité de créer des outils permettant un dépassement complet du concept d'effet d'échelle tout en précisant la totalité de sa portée. La différence fondamentale, s'il fallait en trouver une, est que Laurent Nottale a défini des espaces mathématiques fractals alors que chez Benoît Mandelbrot, ce n'était que des objets. De plus, en relativité d'échelle, la fractalité apparaît comme une propriété relative au sens einsteinien du terme.

3.2. L'approche par la modélisation

Le modèle est une « représentation formalisée et épurée du réel ou d'un système de relations » (Brunet *et alii*, 1992, p. 334). La géographie a connu un fort développement des modèles depuis les années 1970 grâce au développement de la théorie des systèmes. Le processus de création d'un modèle s'appelle modélisation. Il existe trois types de modélisation en géographie : la modélisation discursive, la modélisation graphique et la modélisation mathématique (Durand-Dastès, 1995). Les deux premières ont connu un réel essor, tandis que la troisième s'est très peu développée.

La modélisation mathématique a-t-elle une place en géographie ? La réponse à cette question est très controversée. L'analyse spatiale qui pourtant utilise abondamment la description de ses entités spatiales par des équations mathématiques, reste sceptique quant à la modélisation mathématique *stricto sensu* (Haggett, 1965 ; 1973 ; Dauphiné, 1978 ; 1987 ; 1995 ; Voiron-Canicchio, 1995 ; Brunet, 2001). La géographie humaniste rejette purement et simplement ce type de modélisation (Lévy et Lussault, 2003 ; Volvey, 2005). L'objectif de cette partie est de montrer qu'une telle modélisation peut être envisagée en géographie, à condition d'en comprendre l'intégralité de sa mise en œuvre et d'accepter ses règles exigeantes. Il faut avant tout définir ce qu'est un modèle mathématique afin d'en dégager son processus de modélisation et ses techniques de simulation.

3.2.1. Définition d'un modèle

Selon Daniel Durand (2002), le terme de modèle s'applique à toute représentation ou transcription abstraite d'une réalité concrète. Cette représentation doit être assez simplifiée pour être intelligible, mais suffisamment fidèle pour être utile et fiable. C'est ainsi que Peter Haggett (1973) peut souligner que le modèle est économique car il permet de transmettre ce qu'il y a de général dans l'information sous une forme très condensée. Par ailleurs, Peter Haggett définit un modèle de la manière suivante : « *a simplified version of reality built in order to demonstrate certain of the properties of reality* » (Haggett, 1965). Traditionnellement, on traduit cette phrase par « représentation simplifiée en vue d'une démonstration », mais Roger Brunet (2001) a raison de rappeler que la définition de Peter Haggett a été mal traduite. En effet, « *demonstrate* » signifie plutôt « mettre en évidence » que « démontrer ». De plus, lorsque l'on utilise la traduction officielle, on oublie un terme important : « *built* », c'est-à-dire « construit ». Ainsi, tout modèle, aussi réaliste soit-il, n'est qu'un « reconstruit », une reconstruction de la réalité dans le but de prévoir le devenir de cette réalité. On peut donc prétendre qu'un « modèle est une description d'un phénomène [...] qui permet d'en prévoir certains aspects, par exemple son évolution dans le futur, et éventuellement d'expliquer le phénomène à partir des phénomènes plus simples ou de principes généraux » (Bertrandias, 1997, p. 109), l'explication étant donnée par une théorie.

Pour décrire et construire un modèle, il faut un langage *ad hoc*. Ce langage peut se classer en trois catégories : le langage discursif, le langage graphique et le langage mathématique (Pumain et Robic, 2002 ; Durand, 2002). Le langage discursif permet de découvrir de nouvelles connaissances, mais il utilise un lexique flou et il manque de rigueur. Ainsi, il dépend fortement de la logique de son concepteur. Le langage graphique est un peu plus rigoureux. Il fait appel aux règles plus ou moins flexibles de la sémiologie. Il suppose également, pour être efficace, d'avoir été longuement pensé. Cependant, il demeure généralement propre à celui qui a mis en évidence tel ou tel élément graphique. Le langage mathématique est le plus rigoureux. Toutefois, il manque de souplesse, et quoi qu'on en dise, il dépend aussi de son concepteur, même s'il utilise un langage qui se veut vérifiable par tous. En effet, si les deux autres langages souffrent de leur manque de règles, le langage mathématique souffre de son « trop plein de règles ». Malgré tout, il reste l'unique langage d'une théorie s'organisant en loi, car « le langage mathématique [...] est [...] utilisé pour des mises en ordre dans la réalité empirique » (Durand-Dastès, 2001, p. 40). Cette thèse s'intéresse avant tout à ce langage, car « le livre de la Nature est écrit en langage mathématique » (Galilée, 1623), mais elle n'exclura évidemment pas les deux autres, car une science doit manipuler les trois.

On peut nuancer le propos en remarquant que Jean-Paul et Françoise Bertrandias (1997) ignorent le langage discursif, mais ajoutent ce qu'ils appellent le langage analogique qui permet d'étudier un système en fonction d'un autre avec lequel il présente des analogies structurelles. En géographie, l'archétype est le modèle gravitaire appliqué aux populations de villes. Il permet d'expliquer la polarisation des flux humains vers les villes, c'est-à-dire pourquoi la ville « attire » les Hommes.

On peut donc prétendre que les propriétés du modèle dépendent du langage utilisé. En géographie (Figure 4), les quatre langages coexistent, mais le langage discursif demeure celui qui est le plus utilisé. Pour conclure, on peut prétendre qu'un bon modèle peut être décodé dans les quatre langages.

Langage discursif	Langage graphique	Langage analogique	Langage mathématique
Description d'un processus en géographie physique et humaine	Carte	Modèle gravitaire	Loi rang-taille
Description d'un paysage	Coupe topographique	Modèles macroéconomiques	(Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009)
Description d'un objet géographique	Modèle numérique de terrain		« Lois » de Horton (Forriez <i>et alii</i> , 2009)
	Chorèmes		
	Automate cellulaire		
	Système multi-agent		

Figure 4. Synthèse des différents types de langage en géographie

3.2.1.1. Le modèle discursif

C'est le modèle classique de la géographie dans le sens où « géographie » signifie étymologiquement « description de la terre ». Il existe deux manières de décrire le monde. On peut le décrire à la manière d'un récit le plus complet possible, mais on peut aussi décrire de manière « raisonnée » en sélectionnant les éléments remarquables observés. On dresse ainsi des typologies.

3.2.1.2. Le modèle graphique

Il existe plusieurs sortes de modèles graphiques : la carte, les chorèmes et les simulations informatiques.

■ La carte

En géographie, c'est un modèle ancien qui est apparu avec les premières cartes. La carte reste l'outil privilégié du géographe pour représenter spatialement les phénomènes (Brunet, 2001). Elle a une fonction qui reste essentiellement un outil dressant un inventaire. En effet, la position permet d'effectuer un classement, ce qui fait que, classiquement, la carte vient à la fin de l'analyse géographique. Elle réalise une synthèse d'informations décrites auparavant dans un développement littéraire. Autrement dit, la carte est un moyen de communication très commode permettant la transmission d'une ou des informations, car l'écriture graphique est facile à comprendre et à utiliser. Trois symboles suffisent à l'élaboration d'une légende : le point, la ligne et l'aire. De plus, il faut qu'une carte réponde à une problématique, ce qui n'est plus forcément le cas avec les systèmes d'information géographique. Pour conclure, la carte ne peut faire passer qu'un nombre limité de messages, car l'œil ne peut percevoir qu'au plus 6 à 8 classes de figurés. Toutefois, la sémiologie reste très rigoureuse, ce qui fait que l'on « ne lit pas une carte aussi facilement qu'un texte » (Roger Brunet) et « ne fait pas une carte qui veut » (Roger Brunet).

■ Les chorèmes

Dans les années 1970, Roger Brunet remarqua que les formes d'organisation sur le globe pouvaient être modélisées par des structures élémentaires qu'il appellera chorèmes en 1980. Leur but était d'essayer de doter la géographie (française) d'un langage propre. Ce fut une réussite partielle. Nombreux sont ceux qui ne reconnaissent pas en ces symboles les structures élémentaires des phénomènes géographiques. Toutefois, ils restent le modèle graphique de référence, d'un point de vue didactique, en géographie (Ferras, 1993).

Les chorèmes sont peu nombreux. Roger Brunet constitua une table de vingt-huit structures élémentaires, appelée aussi « socle chorématique » ou « alphabet du monde » (Figure 5). Elle correspond à un tableau à double entrée : en ligne, on trouve la forme des phénomènes géographiques de base dus aux sociétés ; en colonne, on trouve les configurations géométriques élémentaires (point, ligne, aire et réseau).

	Point	Ligne	Aire	Réseau
Maillage	 chef-lieu	 limite administrative	 État, région...	 centres, limites et polygones
Quadrillage	 tête de réseau, carrefour	 voies de communication	 aire de desserte, irrigation, drainage	 réseau
Attraction	 points attirés satellites	 lignes d'isotropie, orbites	 aire d'attraction	 liaisons préférentielles
Contact	 point de passage	 rupture, interface	 aires en contact	 port, rivière, base, tête de pont
Tropisme	 flux directionnel	 ligne de partage	 surfaces de tendance	 dissymétries
Dynamique territoriale	 évolutions ponctuelles	 axes de propagation	 aires d'extension	 état du changement
Hierarchie	 semis urbain	 région de dépendance	 limites administratives	 sous-ensemble

Source : *Géographie universelle*, Belin-Reclus, 1990.

Figure 5. La table des chorèmes de Roger Brunet (Brunet, 1980)

Roger Brunet (1990, p. 118-128) résume les phénomènes géographiques en sept catégories. Le maillage correspond au processus d'appropriation de l'espace, c'est-à-dire au contrôle et à la maîtrise d'un territoire. Le quadrillage (ou treillage) correspond au réseau de communication. L'attraction permet de mesurer l'attractivité d'un lieu : il existe des lieux plus attractifs que d'autres. Le tropisme renvoie à la notion de dissymétrie. La dynamique territoriale essaye de comprendre l'organisation propre de l'objet « territoire ». La hiérarchie permet d'expliquer l'organisation spatiale en ordonnant les objets géographiques avec des pondérations réelles ou fictives. On peut également ajouter que la critique de cette table a été virulente. (1) Où est la place de la dynamique ? (2) Comment modéliser un phénomène d'émergence ? (3) Il y a trop de flèches dans les différents chorèmes.

Malgré tout, comme la carte, la modélisation graphique se veut rigoureuse. Pour créer un modèle graphique, il faut partir d'une carte. Il faut d'abord identifier le principe d'organisation en jeu c'est-à-dire les structures élémentaires à combiner. Ensuite, il faut identifier une configuration territoriale, c'est-à-dire la forme de l'organisation spatiale en construisant un schéma, mais la forme du territoire importe peu. Par défaut, on utilise le cercle pour représenter ce dernier. Enfin, il faut mettre en avant les particularités et les singularités locales. Le modèle final est le résultat de la combinaison des structures élémentaires et de la confrontation de celles-ci avec des contingences locales. Cependant, ce n'est pas une simple superposition ou une simple addition. Il faut combiner les chorèmes de sorte que le modèle corresponde au mieux à ce que l'on a observé.

Toutefois, on peut rencontrer un même modèle de nombreuses fois dans l'espace géographique. Dans ce cas, on peut construire un modèle intermédiaire constitué de chorèmes que l'on peut ensuite adapter aux cas particuliers. On appelle ce type de modèles graphiques : chorotypes. Autrement dit, le chorotype se veut être un modèle général d'un type d'organisation spatiale.

Cependant, la modélisation graphique par les chorèmes est vivement critiquée par la communauté géographique. Philippe Cadène (1992) souligna les deux problèmes essentiels de la modélisation graphique : (1) le problème de la théorie sous-jacente des modèles graphiques ; (2) le problème de la démarche. Pour Roger Brunet (1968), tout modèle spatial doit reposer sur une théorie sociale. Cependant, il faut distinguer la théorie des modèles graphiques (soit structuraliste, soit systémique) et la théorie économique et sociale sous-jacente (idéologie). Cette position montre paradoxalement la limite des chorèmes car les théories sociales sont généralement insuffisantes pour expliquer l'espace géographique. En effet, les chorèmes sont marqués par l'idéologie marxiste. Ils ont été utilisés pour instrumentaliser des rapports dominants-dominés. Par exemple, la ville domine la campagne, ou plus exactement, la ville doit dominer la campagne. Il n'est donc guère étonnant que devant le recul considérable du marxisme ; les chorèmes ont peu à peu été abandonnés par les géographes français.

En ce qui concerne la démarche, on rencontre deux types de difficultés : (1) celle de la hiérarchie entre les détails secondaires et les résidus ; (2) celle de l'explication des règles de construction. En effet, comme dans toute modélisation, les détails disparaissent, mais le fait que la construction des chorèmes ne soit pas une simple addition montre que le problème n'est pas si simple.

On peut alors dresser un tableau (Figure 6) résumant les avantages et les inconvénients de la modélisation graphique par les chorèmes. Les critiques négatives étant plus nombreuses, cela permet d'affirmer que les modèles graphiques doivent être réinvestis par les géographes pour être perfectionnés ou abandonnés définitivement. Il est difficile de trancher, car leur abandon signifieraient qu'ils n'ont rien apportés à la géographie, à chacun de se positionner sur cette question. La modélisation graphique par les chorèmes avait pour but d'établir les principes d'organisation spatiale en géographie. L'objectif est bien de dépasser la contingence des lieux. Cependant, il ne faut pas oublier que la table des chorèmes était provisoire, mais comme tout ce qui tarde à être révisé, elle est devenue définitive.

Avantages – Qualités	Inconvénients – Limites	Solutions actuelles aux limites
Simplification en formes élémentaires	Excès de simplification	
Pouvoir de communication de la modélisation graphique (pour donner à voir de l'information, pour transmettre et présenter des résultats)	La question de la différenciation entre les éléments essentiels et les détails secondaires (résidus)	
Binôme de la représentation graphique et du commentaire qui l'accompagne	Mauvaise utilisation (exemple : l'absence de textes explicatifs)	
Complémentarité avec les autres outils de modélisation en géographie		
Mettre en évidence des régularités de l'organisation de l'espace : c'est un instrument d'intelligibilité de l'espace	<ul style="list-style-type: none"> – Règle de reproductibilité non respectée – Caractère irréfutable en question (subjectivité) – Modèle graphique, vu comme un « produit fini » 	
Processus de construction–déconstruction qui caractérise toute démarche de modélisation graphique		
Expérimentation (approche prospective possible)		
Modélisation graphique propre à la géographie : elle a été conçue par des géographes et pour des géographes		
Champ de recherche à explorer (avancées méthodologiques possibles)	<ul style="list-style-type: none"> – Le problème de l'échelle : comment emboîter des formes et comment rendre compte de l'émergence à une échelle et de la disparition une autre – Le problème de la dynamique et de la profondeur temporelle – L'inaptitude à rendre compte des réseaux – Le retour à une démarche idiographique – L'outil ne permet que de soulever des questions (caractères démonstratifs) – L'absence de référence à un cadre théorique (métrique et valuation des structures élémentaires) 	<ul style="list-style-type: none"> – Le jeu d'échelle : un chorème n'a pas d'échelle propre mais on peut faire un jeu d'emboîtement – L'insertion du temps : soit on réalise différentes séquences, soit on adopte la technique de Christian Grataloup (1996)

Figure 6. Avantages et inconvénients des chorèmes en géographie

■ Principes de l'organisation spatiale en géographie

Il s'agit ici de proposer quelques éléments de définition des principes premiers qui seraient spécifiques à une démarche géographique, et de relancer un vieux débat soulevé au *Géopoint* de 1980. Les principes géographiques ne sont pas aussi affirmés que ceux de la physique. Aussi, il faut formuler les principes géographiques sous forme de questions qui doivent être résolues avant de traiter un problème géographique. La recherche de principes géographiques est de passer de la question « comment où ? » (modèle) à « pourquoi où ? » (théorie). De plus, cela permettrait de résoudre partiellement le problème de l'idéologie qu'il peut y avoir derrière la quantification. La mathématisation de ces principes permettrait de faire progresser la conceptualisation de la géographie, car l'invention de nouvelles structures mathématiques modifiera les théories géographiques (Figure 7).

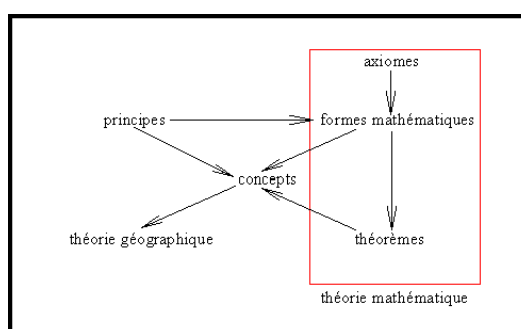


Figure 7. La théorie géographique

■ Le principe de continuité et finitude

L'interface terrestre est-elle continue ou discontinue ? Est-elle finie ou infinie ? La réponse à ces questions reste difficile. C'est plus une question de choix méthodologique.

Traditionnellement, l'analyse spatiale présente l'interface terrestre comme étant infinie et discontinue. Une discontinuité est une rupture apparaissant dans l'espace ou dans le temps. L'espace est riche en discontinuités de toutes sortes, marquées par des interfaces, des limites et des frontières. Les discontinuités peuvent être : (1) franches, brutales (une frontière, un mur...) ou (2) progressives, ménagées (une transition, une marge, une marche, une plage). Il existe deux types de discontinuités : les discontinuités exogènes, provoquées de l'extérieur et les discontinuités endogènes, produites par le processus lui-même, par le fonctionnement du système, sans intervention directe de l'environnement. Dans de nombreux cas, les discontinuités apparaissent dans l'étagement des phénomènes géographiques en altitude. La discontinuité endogène rétablit une forme de continuité là où l'on voit souvent une rupture inexplicable ou jugée exogène. D'après Roger Brunet, l'espace géographique comporte quatre grandes sortes de discontinuités : (1) toutes celles qui sont associées à l'approximation, aux maillages ; (2) toutes celles qui résultent du jeu des principales lois de l'espace ; (3) toutes les lignes de contact (ou interface) ; (4) toutes les limites de contrées qui marquent le passage d'un système spatial à un autre.

Toutefois, on se rend bien compte aujourd'hui que l'interface terrestre est finie. C'est une évidence géométriquement. La terre présente une surface « sphérique ». Cependant, paradoxalement, l'Homme ressent cet espace géographique de manière infinie, or l'interface terrestre n'est qu'une bande coincée entre le manteau et l'atmosphère. Elle reste un espace continu. Cependant, bien qu'ayant cette qualité, elle est partitionnée par des discontinuités anthropiques et physiques. Comment émergent de telles discontinuités ? Les processus spatiaux ont toujours été envisagés de manière purement descriptive soit par des modèles discursifs, soit par des modèles mathématiques. Pour ces derniers, il n'y a jamais eu réellement d'analyse, au sens mathématique du terme. Pourquoi ? La réponse est simple : aucun outil ne permet de quantifier et d'analyser ces processus spatiaux. On verra par la suite qu'un espoir est permis grâce à l'analyse fractale^[1] qui tentera de montrer que la discontinuité émerge du continu.

Enfin, la Terre présente une surface finie, mais non bornée, face à laquelle les Hommes ne peuvent rien, sauf s'ils parviennent, un jour, à organiser des voyages interplanétaires ou intergalactiques. Les fronts pionniers vont donc disparaître. Nous sommes alors dans une logique de fonctionnement complètement paradoxale d'infinité reposant sur la surface, alors que, manifestement, nous sommes en réalité dans une logique finie. Dès lors, comment organiser autrement la Terre ? Il n'y a plus qu'une seule solution : c'est « conquérir » l'espace des échelles (terrestres) qui lui est réellement infini, dans la mesure où l'on pourra toujours créer un niveau intermédiaire plus ou moins pertinent. Il faut souligner que la géographie a tout de même été pionnière dans les raisonnements d'emboîtement d'échelles et d'effets d'échelle. Elle a montré que la seule manière d'organiser les territoires, au sens très large du terme, à l'heure actuelle, était de favoriser le partenariat des différents acteurs qui interviennent à différentes échelles. Autrement dit, un nouveau « front pionnier » se met en marche : la conquête, ou plus précisément, la maîtrise des échelles.

Cependant, la conquête des échelles ne concerne plus uniquement la géographie. La découverte des fractales a ouvert un important champ transdisciplinaire qui montre que tous les phénomènes naturels et/ou anthropiques prennent des formes fractales issues de dynamiques chaotiques, qui ont été démontrées par Laurent Nottale comme étant inévitables. Même si ces courants tendent à s'essouffler aujourd'hui, il n'en reste pas moins qu'ils ont mis en évidence toute sorte de règles d'échelle. Cette thèse se propose d'aller au-delà de ces approches à la lumière de la relativité d'échelle de Laurent Nottale.

Pour conclure, l'Humanité, si elle veut survivre, n'aura pas d'autres choix que de se partager les maigres ressources de notre planète, mais aussi, de commencer à apprendre à vivre avec la Nature, surtout dans les sociétés occidentales. Celles-ci ont dès lors une énorme responsabilité : il faut qu'elles admettent que le modèle tant admiré par de nombreux pays en voie de développement, est certainement le pire qui soit pour l'avenir de l'espèce humaine à moyen et long terme. En effet, certains spécialistes avancent l'idée que si la planète entière vivait en suivant les mêmes us et coutumes que l'Occident, il faudrait deux ou trois planètes pour subvenir à la demande globale. Il est donc urgent de modifier notre approche de la gestion des territoires. Le géographe deviendrait alors le porte-parole et le chercheur par excellence de cette nouvelle philosophie du monde, surtout à l'heure de la mondialisation. Définir un principe de continuité et d'infinitude serait donc le bienvenu en géographie.

■ Le principe d'anisotropie et d'hétérogénéité

Il s'agit de notions mathématiques précises. Isotrope signifie que toutes les directions sont équivalentes. L'espace isotrope est un espace idéal, non dissymétrique, non orienté, non différencié, qui est parfois introduit dans la réflexion théorique des économistes. De manière plus rigoureuse, l'isotropie correspond à une invariance sous les rotations. *A contrario*, anisotrope signifie que toutes les directions ne se « valent » pas. En règle générale, la géographie est contrainte de poser comme hypothèse fondamentale l'anisotropie de son espace, même dans la modélisation.

Homogène signifie de même origine. Un espace homogène est défini par des parties qui se ressemblent, ou forment un tout, quelles que soient leurs origines. De manière plus mathématique, l'homogénéité se définit par une invariance sous les translations. Par contre, hétérogène signifie qui a une autre nature. L'espace hétérogène désigne ce qui est fait de parties de nature différente et peu liées, ce qui manque d'unité. Le choix est plus délicat.

Toutefois, en géographie, on étudie les deux aspects. Par exemple, pour les automates cellulaires ou pour les systèmes multi-agents, l'espace de départ est isotrope et homogène. Puis, progressivement, il devient anisotrope et hétérogène. Un problème épistémologique se pose alors sur l'origine de cette anisotropie de l'espace géographique : soit, au départ, il était isotrope et homogène, soit il était anisotrope et homogène dès le début (ce qui est peu probable, mais reste possible).

Aussi, il est difficile d'ériger en principe géographique les notions de continuité - discontinuité, de finitude - infinité, d'isotropie - anisotropie et d'homogénéité - hétérogénéité. Il faut, comme la physique, étudier l'espace géographique à la lumière des couples possibles.

■ Le principe d'interaction (ou des actions réciproques)

Le mouvement est une variation au cours du temps de la position. Il s'oppose au terme statique qui désigne les positions fixes. La mesure du mouvement s'effectue par la vitesse, elle-même complétée par l'accélération qui correspond à une variation des vitesses. *A contrario*, en géographie, la position des lieux est « fixe », mais le temps s'écoule, à quelques exceptions près comme la dérive des continents ou l'abandon d'un lieu par l'homme (Durand-Dastès, 1984).

À l'origine, la dynamique désigne la physique des forces et des accélérations. Elle se décompose en deux : la cinématique qui étudie le mouvement et la statique qui étudie l'immobilisme. L'objectif des lois de la dynamique est de déduire le mouvement des corps à partir de la connaissance des forces s'exerçant sur eux et des conditions initiales du mouvement. La dynamique est fondée sur l'axiome suivant : tout changement de lieux se produit uniquement dans le temps. Autrement dit, tout mouvement est un changement continu de lieu auquel correspondent des valeurs du temps variant également d'une manière continue. Les trois lois de la dynamique ont été formulées par Isaac Newton. La première loi d'Isaac Newton énonce le principe de l'inertie. La seconde loi précise que, dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures^[2] est égale à l'accélération pondérée par la masse.

L'action se définit par le fait que des objets exercent des forces les uns sur les autres, et les forces sont des causes de déformation, de mouvement ou de propagation. *A contrario*, l'interaction se définit par des actions réciproques. Elle s'exerce soit par un contact direct, soit à distance. Si deux corps A et B sont en contact, l'action de A sur B s'accompagne toujours de l'action de B sur A, que les corps soient immobiles ou en mouvement. Autrement dit, mathématiquement, lorsqu'un corps A exerce sur un corps B une force \mathbf{F} de A sur B, le corps B exerce une force \mathbf{F} de B sur A telle que $\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = - \mathbf{F}_{B \rightarrow A}$.

Cette règle a été importée en sciences humaines *via* l'économiste William J. Reilly (1931). Il proposa un modèle dit gravitaire pour expliquer les échanges commerciaux entre plusieurs villes. Les échanges commerciaux entre la ville A et ses villes intermédiaires, ou par analogie, ses satellites, ainsi que ceux entre la ville B et ses villes intermédiaires, sont notés respectivement B_A et B_B . Ceux-ci sont reliés aux nombres d'habitants de chacune de ces villes (notés respectivement P_A et P_B) et aux distances moyennes entre les villes A et B avec leurs villes intermédiaires respectives (D_A et D_B) par la formule suivante :

$$\frac{B_A}{B_B} = \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^N \left(\frac{D_B}{D_A} \right)^n$$

où N et n représentent la sensibilité de la dépendance des échanges commerciaux avec les prédictions individuelles (Reilly, 1931).

Cette formule fut corrigée par Paul D. Converse (1948) qui introduit la distance D_{AB} entre la ville A et la ville B. Cela permet, selon lui, de définir la limite BPD entre la zone d'attraction de la ville A et celle de la ville B.

$$BPD = \frac{D_{AB}}{1 + \sqrt{\frac{P_A}{P_B}}}$$

De plus, il introduit dans la formule de William J. Reilly ce qu'il appelle un « facteur d'inertie » valant 4 qui détermine la part des échanges entre la ville A et la ville B :

$$\frac{B_A}{B_B} = \left(\frac{P_A}{P_B} \right) \left(\frac{4}{d} \right)^2$$

où d représente une certaine distance à l'extérieur de la ville.

Walter Isard (1956) proposa un modèle plus proche de la loi d'Isaac Newton. Peter Haggett (1973) importa ce modèle en géographie. Chaque ville possède une « force d'attraction » F différente :

$$F_{A \rightarrow B} = \alpha_1 \frac{P_A P_B}{D_{AB}^{\gamma_1}}$$

$$F_{B \rightarrow A} = \alpha_2 \frac{P_A P_B}{D_{AB}^{\gamma_2}}$$

où α_n et γ_n ($n = \{1, 2\}$) représentent les paramètres du modèle. Il est important de noter que le paramètre γ peut être différent de 2, à la différence du modèle d'Isaac Newton. De plus, en règle générale, $F_{A \rightarrow B}$ et $F_{B \rightarrow A}$ ne sont pas identiques (Pumain et Saint-Julien, 2001). Ce modèle a été érigé en principe en géographie. Le principe d'interaction permet d'étudier l'arrangement entre les lieux. Ainsi, « tout ce qui se trouve ou se passe dans un lieu donné est en partie déterminé par tout ce qui se passe ou se trouve dans un ensemble de lieux en relation avec le lieu considéré » (Durand-Dastès, 1990).

Cependant, d'autres modèles gravitaires dits « probabilistes » existent. Par exemple, David Huff (1964) construisit un modèle probabiliste à l'échelle intra-urbaine :

$$p_{AB} = \frac{S_B}{T_{AB}^n} \times \frac{1}{\sum_{B=1}^m \left(\frac{S_B}{T_{AB}} \right)^n}$$

où p_{AB} représente la probabilité qu'un consommateur fasse le trajet entre un point A et un centre commercial B. T_{AB} correspond au temps de trajet entre ces deux points ; S_B à la superficie du centre commercial B ; n au facteur de sensibilité.

William C. Black (1987), quant à lui, définit p_{AB} de la manière suivante :

$$p_{AB} = \frac{\pi A_{AB}^N \pi D_{AB}^n}{\sum_{k=1}^m (\pi A_{ABk} \pi D_{ABk})}$$

où A représente les facteurs d'attraction comme la taille et l'apparence du commerce et D les facteurs de répulsion comme le temps du trajet ou le prix.

Enfin, Barry J. Babin *et alii* (1991) proposèrent de revenir sur le modèle de William J. Reilly en remplaçant la population par l'attractivité A et la distance moyenne par le coût moyen C associé au choix du centre :

$$\frac{B_A}{B_B} = \left(\frac{A_A}{A_B} \right)^N \left(\frac{C_B}{C_A} \right)^n.$$

Tous ces modèles gravitaires ont le même défaut : la connaissance du centre est *a priori*. Le modélisateur décide où se localise ses centres (ou ses pôles), et ensuite, ils les comparent entre eux, les autres localisations étant par défaut des satellites. Dans les chapitres suivants, cette thèse essaiera de proposer une méthode pour déduire la position des pôles dans un espace géographique.

■ Les modèles graphiques

Dans les années 1990, avec la généralisation des ordinateurs, des outils de modélisation graphique beaucoup plus puissants sont apparus. Les modèles numériques d'élévation et/ou de terrain ont permis de mieux appréhender les reliefs que la carte topographique. En même temps, sont apparus les automates cellulaires et les systèmes multi-agents. Certes, ils possèdent une interface numérique, mais ils demeurent avant tout utilisés pour leur interface graphique.

3.2.1.3. Le modèle analogique

Dans les années 1960, la géographie a développé des axes analogiques importants avec d'autres disciplines. Le cas d'école est bien sûr le modèle gravitaire d'Isaac Newton : deux villes « s'attirent » proportionnellement à leur population et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare (Reilly, 1931). Analogie qui s'est montrée plus ou moins pertinente, mais elle s'est mainte fois avérée utile, par défaut.

3.2.1.4. Le modèle mathématique

« Un modèle mathématique d'une certaine réalité ou d'un certain système se caractérise comme l'ensemble des variables choisies pour la description et les relations mathématiques qu'elles présentent entre elles » (Bertrandias, 1997, p. 111). Au final, un modèle doit prévoir certaines variables au moyen de calculs, de dessins ou du fonctionnement d'un mécanisme analogue. Toutefois, il doit aussi expliquer le phénomène étudié au moyen d'hypothèses, de principes généraux [c'est-à-dire les principes premiers] ou par coordination de mécanismes simples, ce qu'offre le modèle mathématique. Ainsi, « le langage mathématique permet d'organiser et de relier les lois intervenant dans un modèle. Certaines lois élémentaires (comportement des éléments indécomposables du système) ou fondamentales (conservation [...]) [de certaines quantités]) sont prises comme point de départ et forment les hypothèses de base et les axiomes du modèle. A partir de ces lois, d'autres lois sont obtenues comme résultat de calculs ou de raisonnements utilisant les règles algébriques habituelles (opérations sur les entiers, plus généralement sur les types, évaluation ou transformation des expressions) complétées par les notions d'analyse [...] (dérivation, intégration, passage à la limite) » (Bertrandias, 1997, p. 111). C'est de là que l'on tire « la puissance des modèles mathématiques [qui] tient à l'aide apportée par les concepts spécifiquement mathématiques (nombre, fonctions, limites par exemple) mais aussi au langage mathématique lui-même dans sa syntaxe (numérotation de position, forme des expressions, notation différentielle par exemple) » (Bertrandias, 1997, p. 111). Autrement dit, il ne suffit pas de poser une équation mathématique pour avoir un modèle mathématique. Le modèle mathématique ne doit donc pas être associé systématiquement à une mise en équation.

En géographie, le modèle mathématique n'existe presque pas (Franc, 2001). Il faut donc largement l'explorer. Avec, toutefois, une réserve formulée par André Dauphiné, « si les mathématiques, mal utilisées, peuvent entraîner une sclérose, un appauvrissement des concepts, elles peuvent inversement enrichir des concepts flous, et permettre le passage du construit au concept » (Dauphiné, 1978, p. 20). C'est dans cette optique qu'il faut comprendre les développements récents sur la loi rang - population urbaine (Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009) et les travaux de Philippe Martin sur les reliefs (Martin, 1997 ; 2004 ; 2005 ; 2006b ; 2006c ; 2008c ; 2009).

3.2.2. La modélisation mathématique

La modélisation mathématique est une modélisation particulière, mais elle respecte les grandes règles de construction connues des géographes, auxquelles il faut ajouter la rigueur du langage mathématique.

3.2.2.1. Étapes préliminaires à la modélisation mathématique

Les étapes préliminaires à la modélisation mathématique sont au nombre de deux. (1) On crée des variables quantifiées et quantifiables de grandeurs considérées comme étant importantes. Leurs valeurs respectives sont le résultat de mesures ou d'observations. (2) On recherche des relations mathématiques entre ces variables, fondées sur des principes premiers (c'est-à-dire universels) et fondamentaux.

Ces relations deviennent des lois si on peut les formuler au moyen d'objets mathématiques. Une fois qu'une fonction unifiant les variables entre elles (la plus simple possible) a été identifiée, on peut lui appliquer toutes les règles mathématiques connues pour trouver ses différentes formes, et surtout comprendre les différents rapports qui existent entre ces formes mathématiques. On appelle cet ensemble de fonctions reliées un modèle mathématique. Il est important de noter que c'est ce modèle qui doit s'adapter au phénomène géographique étudié, et non l'inverse. La loi rang-taille appliquée à la hiérarchisation de la population urbaine fournit un bon exemple de ce qu'il ne faut pas faire. Durant une vingtaine d'années, les utilisateurs se sont bornés à rechercher une droite de régression dans l'espace du logarithme de l'inverse du rang (présenté dans un ordre décroissant) *versus* le logarithme de la population, or il est apparu récemment (Rosen et Resnick, 1980 ; Laherrère, 1996 ; Forriez et Martin, 2007, Forriez et Martin, 2009) que le bon modèle pour les données de 2000 du réseau urbain mondial, par exemple, était un polynôme du second degré caractérisé par une demi parabole. Cet exemple montre qu'il faut toujours partir des données, et ne jamais appliquer, en première étape, un modèle mathématique préconçu.

3.2.2.2. Typologie des modèles

Les modèles se classent en une double typologie (Figure 8). Ils sont soit descriptifs, soit explicatifs. Ils sont soit déterministes, soit aléatoires. Il est important de noter qu'un modèle aléatoire ne signifie en aucune façon que le modèle ne soit pas nomothétique car, formellement, il obéit aux lois de la statistique et des probabilités.

	Modèle déterministe	Modèle probabiliste
Modèle descriptif	Modèle mathématique descriptif	Statistique descriptive
Modèle explicatif	Modèle mathématique prédictif	Statistique quantique

Figure 8. Double typologie des modèles

Le modèle déterministe fait souvent appel aux équations différentielles ou à un système différentiel. Il correspond à une ou plusieurs variables. Dans ce type de modèle, le hasard n'intervient pas : aucun facteur ne peut perturber le modèle. De ce fait, ce modèle n'existe presque pas en géographie. Il existe quelques modèles déterministes en géographie physique, mais il est évident qu'en géographie humaine, cela n'a guère de sens.

Le modèle probabiliste se fonde, quant à lui, plutôt sur les probabilités et les variables aléatoires, utilisables grâce aux estimations et aux tests statistiques. Le plus évolué est le modèle quantique qui permet d'obtenir des statistiques explicatives de phénomènes spatiaux, temporels et spatio-temporels.

La distinction n'est peut-être qu'une approximation, car il existe des évolutions déterministes et causales au cours du temps d'une densité de probabilité. Dans ce cas, les deux peuvent être combinés, ce qui correspondra un « déterminisme de structure » (Nottale *et alii*, 2009).

3.2.2.3. Processus de la modélisation mathématique

On peut résumer ce processus en cinq grandes étapes qui sont :

1. le choix des variables ;
2. la formulation du modèle ;
3. l'identification des paramètres ;
4. la validation du modèle ;
5. l'extension à des situations générales.

« La modélisation d'un phénomène commence dès le choix des aspects qu'on choisit de considérer ensemble et qu'on regroupe souvent en un système : un état du système est caractérisé par les valeurs présentes ou passées de variables qu'on appelle variable d'état et l'interaction du système avec d'autres réalités est précisé par des variables d'entrée et des variables de sortie. En général, le système évolue dans le temps et passe d'un état à un autre sous l'effet des variables d'entrée : si le nouvel état est défini de manière prévisible et unique à partir des valeurs des variables dans l'état précédent, on dit que le système est déterministe » (Bertrandias, 1997, p. 109), ce qui introduit bien le processus de modélisation.

■ Le choix des variables

Le choix des variables reste l'opération la plus délicate. En général, le choix s'opère de manière aléatoire. On choisit telles ou telles variables quantitatives parce qu'on les a « sous la main ». Cependant, lorsqu'on a le choix, il faut distinguer les variables importantes des variables négligeables.

De plus, il existe deux types de variables : les variables qui peuvent être mises à jour dont la valeur est observable et contrôlable, et les variables exprimées en fonction de variables plus simples ou plus accessibles (par exemple le rang dans les lois rang - taille à la place de la localisation géographique).

■ La formulation du modèle

La formulation du modèle s'effectue dans un langage précis dont il ne faudra jamais oublier les limites. En modélisation mathématique, la formulation correspond à la mise en équation. Celle-ci est loin d'être simple car il n'existe aucune méthode universelle. Toutefois, la technique la plus employée reste de poser des hypothèses « parfaites » et de formuler la ou les équations dans le langage d'une théorie mathématique pertinente, et ensuite de complexifier les équations pour essayer de se rapprocher de la réalité.

■ L'identification des paramètres

« Un modèle est souvent susceptible de s'adapter à plusieurs situations réelles, chaque situation particulière étant caractérisée par les valeurs de variables appelées paramètres. Dans le processus de modélisation, l'adaptation à telle situation précise est la phase d'identification : comment déterminer (c'est-à-dire identifier) les paramètres du modèle ? » (Bertrandias, 1997, p. 110). En effet, la plupart du temps, ce sont des constantes. Ce sont des valeurs que l'on ne peut expliquer, mais elles sont indispensables à la pertinence du modèle. Elles correspondent souvent à une application à un cas pratique d'un modèle purement théorique.

■ La validation du modèle

Cette validation s'opère en comparant le modèle avec la réalité. Le modèle est-il adapté à la situation étudiée ? Les écarts avec le modèle sont-ils acceptables ou doit-on changer de modèle ? La loi rang - population urbaine fournit une nouvelle fois un bon exemple. Le modèle « droite de régression dans l'espace $[\ln(1/r), \ln(P)]$ ne fonctionnant presque jamais, car les écarts étaient trop importants entre la réalité et le modèle, le modèle « parabole en $[\ln(1/r), \ln(P)]$ » a pu être validé (Forriez et Martin, 2007, Forriez et Martin, 2009).

■ L'extension du modèle

L'extension du modèle cherche à répondre à la question suivante. « En tenant compte de variables supplémentaires jusqu'alors négligées ou en raffinant les mesures et les observations, peut-on adapter le modèle à une situation plus complexe ou à un niveau d'observation plus fin ? » (Bertrandias, 1997, p. 110). Cette étape peut être l'occasion de préciser certains paramètres, c'est-à-dire de théoriser davantage le modèle. Ainsi, le modèle s'approchera de plus en plus de la réalité observée.

3.2.2.4. La simulation

La simulation numérique est une étape importante qui achève généralement une modélisation mathématique. En effet, après la modélisation qui est un processus purement théorique, elle permet d'éprouver un modèle. Elle n'est pas propre à la modélisation mathématique, mais avec le développement fulgurant de l'informatique ces dernières années, elle permet de tester des modèles mathématiques, comme jamais ils n'ont pu l'être. En géographie, la simulation est surtout utilisée abondamment pour tester un système multi-agent ou un automate cellulaire (White, 1998 ; White et Engelen, 1993 ; 1997).

3.2.2.5. La théorisation

Précédemment, on avait précisé que les paramètres d'un modèle étaient des constantes que l'on ne peut expliquer. La théorisation est le processus (mathématique) permettant de justifier, et surtout de prédire, la valeur de ces constantes, souvent à partir de mesures indépendantes. En géographie, cela n'existe pas encore, mais aujourd'hui il semblerait que cela devienne une réalité, du moins en géographie physique grâce aux travaux de Philippe Martin et de Laurent Nottale. On peut donc dire que l'explication des constantes engendre une nouvelle théorie scientifique. Ainsi, « une théorie scientifique n'est rien d'autre qu'une représentation mathématique, dans les formules, des équations et des règles de correspondance des objets physiques qu'on veut étudier et des comportements qu'ils vont avoir dans différentes circonstances » (Zwirn, 2006, p. 52).

3.2.3. La modélisation mathématique est-elle possible en géographie ?

Tout au long des paragraphes précédents, la quasi-inexistence de la modélisation mathématique en géographie a été montrée. La raison est fort simple. Le géographe privilégie les démarches inductives, ce qui, bien sûr, va *a contrario* de la modélisation mathématique qui trouve sa justification dans la démarche déductive. Nous avons également insisté sur la puissance de cette modélisation. On crée une loi de toute pièce, et on vérifie si elle fonctionne dans les cas observés. La géographie peut commencer à s'engager dans cette voie, car elle possède désormais suffisamment des quantités de variables localisées ou qui dépendent de la localisation. On peut donc parfaitement créer des lois où la variable spatiale est infinitésimale, par exemple, et vérifier si elle fonctionne. Toutefois, il ne faut pas oublier que la nature mathématique de l'espace géographique est fractal, ce qui pourrait impliquer dans certaines situations et sous certaines conditions restrictives une dynamique de type quantique, et non classique (Forriez, 2007). Cette variable spatiale dépendra donc explicitement de sa résolution. C'est en s'engageant dans cette voie que la géographie pourra affirmer son statut de science originale et autonome. Cela sera douloureux ; cela suscitera des craintes et des doutes, mais la quantification en analyse spatiale en sortira grandie. De plus, l'approche relativiste au sens einsteinien du terme a souvent été adoptée sans le savoir en géographie.

3.3. L'approche relativiste

La première approche naturelle de l'espace géographique reste de le considérer comme lisse, c'est-à-dire de le penser avec des figures, des objets, des espaces euclidiens (carré, cercle, pavé, cylindre, *etc.*), or paradoxalement, ces êtres géométriques caractérisent très mal l'espace géographique. Ainsi, pourquoi continuer à considérer les objets et/ou l'espace géographique par ce qu'ils ne sont pas ? La terre n'est pas une boule lisse dénuée de rugosité. Comment donc la caractériser ?

3.3.1. La nature de l'espace géographique

Fondamentalement, il existe deux couples possibles. L'espace est soit homogène, soit hétérogène et soit isotrope, soit anisotrope (cf. paragraphe 3.2.1.2.).

3.3.1.1. Homogène et isotrope

Homogène et isotrope ont été défini précédemment. En règle générale, un espace homogène est isotrope, ce qui signifie que toutes les directions sont équivalentes. Il n'y a donc pas de rugosité. Pendant longtemps la plupart des modèles géographiques ont été fondés sur ces concepts. Parmi les modèles les plus célèbres, on peut citer les modèles de Johann van Thünen, le modèle de Walter Christaller.

Plus récemment, Roger Brunet (1980) a renouvelé le genre avec les chorèmes et la chorématique. Il admet pour construire sa chorématique une hypothèse extrêmement forte : l'espace géographique est fondamentalement isotrope et homogène. Comme cela a déjà été signalé, cette nature de l'espace peut se résumer en vingt-huit formes élémentaires appelées chorèmes (Figure 5). Selon lui, la combinaison de ces formes simples explique alors le caractère apparent de l'espace géographique, à savoir la nature anisotrope et hétérogène.

3.3.1.2. Hétérogène et anisotrope

Dans un espace hétérogène, la densité de l'objet considéré varie en fonction de la surface considérée ; elle dépend donc de l'échelle d'observation. La position défendue ici est de prendre l'hypothèse inverse de Roger Brunet, à savoir que l'espace géographique est fondamentalement anisotrope et hétérogène. Pour être clair dès le début, il ne s'agit pas de prétendre que la démarche de Roger Brunet n'ait aucun intérêt, bien au contraire, ce raisonnement inverse va permettre de l'enrichir considérablement. Si l'espace est rugueux par définition, quel est l'outil le plus simple pour le représenter ? En fait, lorsque Roger Brunet établit sa théorie des discontinuités, la théorie des fractales est apparue de manière concomitante. Autrement dit, l'outil permettant de décrire des phénomènes anisotropes et hétérogènes n'a pas pu l'inspirer. En effet, la géométrie fractale amène à étudier directement l'anisotropie et l'hétérogénéité. Toutefois, les fractales étaient peu fonctionnelles en géographie, car leur définition sous forme d'objet ne permettait pas une bonne application du concept. Ainsi, il faut passer à une position relativiste telle que le propose Laurent Nottale (Nottale, 1984 ; 1989 ; 1992).

3.3.1.3. Continu ou discontinu

Si les couples homogène - hétérogène et isotrope - anisotrope sont facilement perceptibles, le couple continu - discontinu l'est beaucoup moins. C'est pourtant selon Roger Brunet (1968) le concept clé de la géographie. Il faut tout de suite préciser qu'un espace peut être continu, anisotrope et hétérogène (montagne, organisation d'une ville) ; discontinu, anisotrope et hétérogène (archipel, réseau urbain) ; continu, isotrope et homogène (villes américaines, boule de billard, courbe de Van Koch) ; discontinu, isotrope et homogène (tapis de Sierpinski, ensemble triadique de Cantor, graphique de la fonction inverse). Pour les deux derniers, il est difficile de trouver des archétypes géographiques, même si on les rencontre abondamment.

3.3.1.4. Synthèse : l'émergence des limites

Les trois couples possibles permettant la description de l'espace géographique sont intimement liés à l'échelle d'observation : généralement, plus l'échelle est fine, plus l'objet sera discontinu, anisotrope et hétérogène. *A contrario*, plus l'échelle sera grossière, plus l'objet sera continu, isotrope et homogène. Toutefois, le problème n'est pas si simple, car si l'objet géographique devient certes continu, il n'en est rien de l'espace géographique. Par exemple, à l'échelle planétaire, les grandes structures urbaines peuvent être représentées par des taches qui sont continues si on les considère comme des objets indépendants, mais l'ensemble de ces taches forme un espace géographique discontinu.

On arrive à l'idée que limites d'un objet, espace, continuité - discontinuité, isotropie - anisotropie et homogénéité - hétérogénéité sont des notions fondamentalement liées à l'échelle d'observation (chapitre 2 ; Béguin et Pumain, 1994, p. 13-18). Autrement dit, tous ces concepts sont relatifs à la résolution. De plus, selon les situations et les localisations, le modélisateur spatial choisira l'un ou l'autre de ces concepts dans l'un de ces deux couples. Ainsi, ce choix peut s'effectuer :

1. en fonction de son échelle. Cela permet de rappeler que la base de la fractalité est l'étude de l'apparition et de la disparition d'une structure spatiale en fonction de son échelle qui se traduit généralement par un jeu d'emboîtement d'échelle qui est parfaitement modélisable de manière mathématique ;
2. en fonction de critères personnels. La frontière empirique entre homogénéité et hétérogénéité et entre isotropie et anisotropie est extrêmement flexible. Chacun possède un regard différent de la même situation : l'un va percevoir une hétérogénéité, l'autre une homogénéité pour des raisons logico-culturelles différentes.

Ainsi, un des enjeux de l'analyse spatiale est de trouver des techniques qui permettent d'objectiver ce choix. Pour comprendre la morphogenèse d'un objet - espace géographique, il faut nécessairement adopter une position relativiste au sens einsteinien du terme.

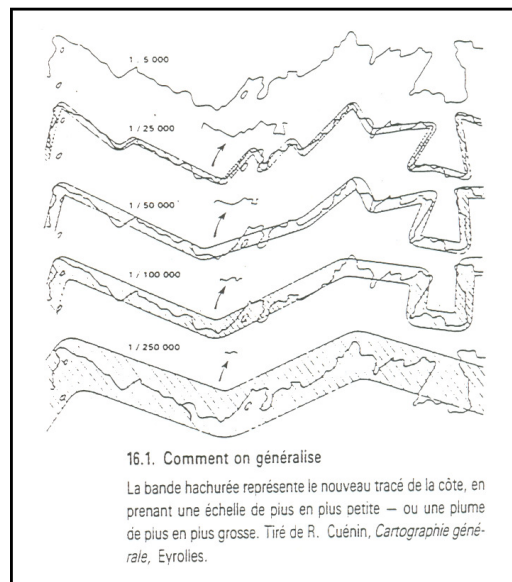


Figure 9. Objet géographique et résolution (Cuénin, 1972)

3.3.2. La position relativiste

L'idée d'introduire la notion de « relativité » en géographie est déjà relativement ancienne (Brunet, 1990 ; Parrochia, 2006). Toutefois, comment appliquer la théorie de la relativité à un espace géographique ? Daniel Parrochia (2006) réalise une excellente synthèse sur la mise en œuvre intuitive du principe de relativité en géographie. Toutefois, il ne faut pas confondre relativisme et relativité. Le relativisme est une philosophie qui prétend que tout est relatif. En fait, il s'agit d'un cliché posé par la post-modernité. Par contre, « ce qu'affirme le principe de relativité, c'est qu'il existe certaines grandeurs particulières, caractérisant l'état du système de coordonnées, grandeurs qui ne peuvent jamais être définies de manière absolue. En un sens plus général encore, on peut dire que ces grandeurs réalisent l'interface entre nous et le monde extérieur, sur lequel nous voulons effectuer des mesures » (Nottale, 1998, p. 103). « La relativité consiste en fait en une recherche de l'universel à travers une analyse du relatif » (Nottale, 1998, p. 104). La relativité est donc un principe philosophique très général qui peut se formuler de la manière suivante : « toute chose est définie relativement à un système de référence », c'est-à-dire qu'il faut systématiquement définir ce référentiel.

3.3.2.1. Principe de relativité

La relativité est un des plus anciens principes de la physique. Laurent Nottale (1998) résume bien son histoire. Pour la simplifier, on peut dire que la relativité est marquée par trois grandes étapes : l'œuvre de Galilée (relativité du mouvement) et l'œuvre de Henri Poincaré et d'Albert Einstein pour la relativité restreinte et d'Albert Einstein pour la relativité généralisée.

Avec Laurent Nottale, le « principe d'échelle » de Benoît Mandelbrot (1975) est identifié au grand principe physique de la relativité, ce qui aboutit à la définition d'une relativité d'échelle. Ceci revient à dire que les lois de la nature doivent être valides quel que soit le système de coordonnées choisi. Un système de coordonnées est défini par une liste de nombres, ces nombres représentant les valeurs de grandeurs qui caractérisent l'état du système de coordonnées. Celui-ci se définit par un état de position, d'orientation, de mouvement et d'échelle. Le premier se caractérise par les trois coordonnées spatiales et une temporelle ; le second par trois angles (ou six dans le cadre d'un espace-temps) ; le troisième par trois vitesses et trois accélérations ; le quatrième par quatre résolutions spatio-temporelles et leurs corrélations (Nottale, 2010). Les valeurs des grandeurs sont donc relatives à un autre système de coordonnées. Ce principe est extrêmement fort : une loi transcrivant un phénomène naturel observé ne doit pas dépendre du support, de l'espace support choisi. Il dépasse donc naturellement, presque lui-même le cadre de la seule physique.

En géographie, cela fait une cinquantaine d'années que nous recherchons des lois spatiales, mélangeant les aspects naturels et les aspects anthropiques. Malheureusement, la dépendance de nos lois par rapport au système de coordonnées choisi est évidente. En introduisant le principe de relativité dans notre discipline, le sens de nos mesures et interprétations ne pourra qu'être plus fort.

En fait, il existe « trois grandes relativités du mouvement » : la relativité galiléenne, la relativité restreinte et la relativité généralisée. A celles-ci, l'idée de Laurent Nottale est de rajouter une relativité d'échelle qui, par analogie, se subdivisera en « relativité galiléenne d'échelle », « relativité restreinte d'échelle » et « relativité généralisée d'échelle ». La relativité restreinte d'échelle étant quelque chose de spécifique à la physique, elle ne devrait pas exister en géographie (Nottale, 2010). Par contre, la relativité d'échelle galiléenne explique les cas où la dimension fractale est constante dans l'espace-temps. De plus, la relativité généralisée d'échelle sera au cœur de cette thèse. Celle-ci permet de rendre compte des dimensions fractales variables. En première approximation, tous les cas étudiés dans cette thèse correspondront à ce que l'on appelle une « dynamique d'échelle ». Ainsi, il semble de plus en plus évident que l'espace géographique ne pourra être défini que par cette approche.

La relativité d'échelle est une représentation géométrique de la nature, par l'intermédiaire d'un espace, et non plus un objet ! L'objet est ponctuel et peu commode à généraliser. Un espace est plus pratique car il est défini de l'intérieur, donc descriptible en tout point.

■ Relativité galiléenne

C'est une première forme de relativité. Elle consiste à séparer espace et temps. La position devient une conséquence du temps dans le cadre d'un déplacement. Elle est à la base de la mécanique newtonienne dont le fer de lance est le principe d'inertie. Dans ce cadre, la vitesse reste constante. Relativités restreinte et généralisée montrent que ce n'est qu'un cas particulier, qu'une première approximation. Toutefois, on constate que « l'origine et l'orientation d'un système de coordonnées ne sont pas absolues et dépendent d'un choix du système de référence. L'état du mouvement est lui aussi dépendant d'un système de référence non absolu » (Da Rocha, 2004, p. 3).

■ Relativité restreinte

La relativité restreinte change de cadre théorique par rapport à la relativité galiléenne. En effet, on ne sépare plus désormais l'espace et le temps, mais on construit un espace-temps (à quatre dimensions) plat (c'est-à-dire non courbe). La construction de cette théorie n'est possible que si l'on pose l'invariance de la vitesse de la lumière qui devient donc la vitesse maximale de propagation des interactions. Autrement dit, la vitesse de la lumière est la manifestation d'un infini inaccessible (par effet de projection d'un espace à quatre dimensions dans un espace à trois dimensions). De plus, chaque référentiel possède, pour les distinguer, un temps propre, c'est-à-dire le temps indiqué sur l'horloge liée à ce référentiel. Un changement de référentiel quadridimensionnel s'opère grâce à la transformation de Lorentz, c'est-à-dire une rotation dans l'espace-temps. En fait, la relativité restreinte n'est qu'une étape intermédiaire vers la relativité généralisée, mais étant donné la grande valeur de la vitesse de lumière, la théorie de la relativité restreinte est inapplicable en géographie ; elle n'est citée que pour mémoire.

■ Relativité généralisée

La différence entre la relativité restreinte et la relativité généralisée modifie profondément les équations de la physique par le simple fait de ne plus avoir un espace-temps plat, mais courbe. Aussi, pour y remédier, Albert Einstein introduisit les principes de covariance et d'équivalence qui montrent, entre autres, que la matière équivaut à la géométrie, elle-même restant relative (Nottale, 1998, p. 83). Cette géométrie se retrouve évidemment en géographie lorsque l'on trace une carte ou un modèle numérique de terrain. De plus, les temps en géographie sont propres à chaque objet, la durée de vie d'une montagne n'est pas la même que celle d'une ville par exemple.

■ Les principes de covariance et d'équivalence

Le principe de covariance exige que les équations doivent garder leur forme (la plus simple possible) dans les transformations du système de coordonnées (Nottale, 1998). On distingue deux types de covariance : la covariance faible et la covariance forte. La covariance faible correspond au cas où les équations ont gardé, sous une transformation plus générale, la même forme que sous la transformation particulière précédente. La covariance forte correspond au cas où la forme la plus simple possible des équations a été obtenue.

Le principe d'équivalence articule les principes de relativité et de covariance pour un « objet » donné. Il montre comment un objet physique peut être remplacé, dans des conditions bien précises, par un autre équivalent (Nottale, 1998). Par exemple, le champ de gravitation est localement équivalent à un champ d'accélération.

■ Vers une relativité d'échelle

« Position, orientation et mouvement sont les notions relatives prises en compte par les théories actuelles d'Einstein, qui énonce ainsi le principe de relativité, « les lois de la nature sont valides dans tout système de référence, quel que soit son état ». Cependant, la question que l'on peut légitimement se poser est de savoir si l'état d'un système de référence est pleinement caractérisé par les seules données de position, orientation et mouvement » (Da Rocha, 2004, p. 4). De ce fait, « l'effet d'échelle » de la géographie peut modifier parfois profondément la vision que l'on a de l'objet étudié. Aussi, à l'état temporel et à l'état spatial, il serait peut-être utile d'ajouter un état d'échelle. Certes, on place toujours une échelle sur une carte, mais toujours de manière neutre, or celle-ci est toujours riche en informations si l'on possède les bons outils pour l'analyser, l'outil privilégié est bien entendu l'analyse fractale.

■ État d'échelle d'un système

Daniel Da Rocha résume parfaitement l'ensemble des états d'échelle possible d'un système de coordonnées. « Un système de coordonnées à résolution trop élevée ne donnera pas le même résultat qu'un système de coordonnées caractérisé par une résolution bien plus faible. [...] En diminuant la résolution de la mesure (du moment qu'elle est suffisamment faible par rapport à la distance parcourue), on peut retracer le parcours de manière plus précise et calculer ainsi la distance parcourue avec une meilleure précision. Mais cette distance ne changera pas de manière explicite en fonction de la résolution. Il n'en est pas de même dans d'autres situations, en particulier pour les systèmes quantiques » (Da Rocha, 2004, p. 5). Cette propriété est caractéristique d'objets mathématiques connus : les fractales. Tout au long, de cette thèse, le terme fractal devra être entendu comme étant un être ou un objet qui présentent des structures à toutes les échelles. Ce qui signifie qu'il existe une structure géométrique différente lorsque l'on passe d'une échelle à une autre (Eckert, 1921 ; Cuénin, 1972 ; Béguin et Pumain, 1994).

■ Principe de relativité d'échelle

Le principe de la relativité d'échelle se formule alors : « les lois de la nature sont valables pour tous les systèmes de coordonnées, quel que soit leur état d'échelle » (Nottale, 1998). C'est donc une formulation complémentaire à la relativité du mouvement, car si ce dernier reste le principal objet de la physique, l'échelle est un problème que l'on rencontre quelle que soit la discipline, et principalement la géographie qui, depuis la formalisation d'Yves Lacoste (1976) a largement compris l'intérêt d'une analyse multi-échelle. Certes, l'analyse multi-scalaire qu'Yves Lacoste avait conçue, était essentiellement littéraire, et il n'a pas eu besoin des fractales, en tant qu'objet mathématique, pour arriver à décrire des emboîtements d'échelle. Toutefois, elle correspond parfaitement à la philosophie de la géométrie fractale.

Si l'échelle permet de comprendre l'émergence des limites d'un objet à une échelle donnée, elle apporte aussi un nouvel éclairage sur la définition d'un objet ou d'un espace en géographie.

3.3.2.2. Objet ou espace géographique ?

En géographie, un problème de définition existe entre objet localisé et l'espace dans lequel il est plongé (Maby, 2003). En réalité, seule une position relativiste permet de distinguer les deux. Un objet est toujours caractérisé de l'extérieur (Figure 10.a.).

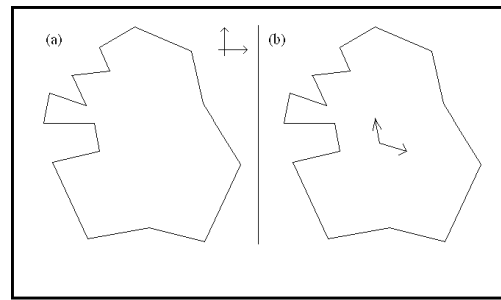


Figure 10. Objet ou espace

Dans la Figure 10.a., l'objet est l'aire de forme tortueuse, et pour la mesurer on est obligé de se munir d'un repère placé à l'extérieur de celui-ci, ce qui revient à comprendre que sans information provenant de l'extérieur de l'objet, on ne peut pas savoir que l'on se trouve sur cet objet.

A contrario, un espace est toujours caractérisé de l'intérieur (Figure 10.b.), c'est-à-dire qu'aucun point extérieur n'est nécessaire pour le définir. Le repère fondamental est donc interne à l'objet. La capacité de se placer dans un repère interne à l'objet fait partie de la méthode (ou du mode de pensée) relativiste. Autrement dit, on peut savoir, par un raisonnement purement géométrique, que l'on est sur un objet particulier sans caractérisation extérieure. L'analyse spatiale a donc souvent adopté une position relativiste sans le savoir (Parrochia, 2006). Prenons un exemple simple : le réseau urbain. Pour voir la répartition des villes (les objets), il faut bien une référence pour les percevoir : une région administrative, un pays, *etc.* (territoire ou espace). Les villes sont caractérisées dans un extérieur appelé région administrative, par exemple, mais celle-ci est bien définie de l'intérieur dans le sens où ce n'est pas n'importe quoi, elle a un contenu, une identité, et rien ne pourra y changer.

3.3.2.3. Espace géographique fractal

Un des problèmes majeurs de la fractalité était une impossibilité de caractériser une fractale de l'intérieur. La position relativiste était donc impossible. C'est alors qu'intervient le physicien Laurent Nottale qui montra comment caractériser la courbe de Van Koch de l'intérieur grâce à une base 4 de numération (Nottale et Schneider, 1984). Depuis, Laurent Nottale fabriqua sans relâche de nouveaux espaces fractals extrêmement généraux (1992 ; 1993).

De grief, le rapport échelle - limite conduit naturellement à la question des formes optimales. Qu'est-ce qu'une forme optimale ? Peut-on définir l'échelle comme un élément clé à optimiser ? Existe-t-il des formes optimales en géographie humaine ? Existe-t-il des formes optimales en géographie physique ?

3.3.3. Les formes optimales

Les formes optimales sont très difficiles à définir. Qu'est-ce qu'être optimal ? Être optimal par rapport à quoi ? En effet, juger si une organisation spatiale est optimale reste très arbitraire ? Les échelles peuvent-elles être un critère d'optimalité ?

3.3.3.1. Définition de l'optimisation

La forme, grâce à son existence géométrique et topologique, pose inévitablement la question de son optimisation. Existe-t-il une organisation spatiale optimale ? Tel est souvent formulé le problème. Pourtant, il n'y a pas de question plus maladroite que celle-ci. En effet, une forme optimale ne peut l'être qu'en fonction d'un ou de plusieurs paramètres. Par exemple, un cercle minimise la distance par rapport à la surface. L'optimalité a par conséquent besoin de critères pour exister. Dans ce cas, toutes les formes euclidiennes ou fractales sont potentiellement optimales. Pourtant, le concept d'optimalité a fait son chemin dans les sciences humaines. On trouve aujourd'hui le terme partout.

Les concepts d'optimalité et d'optimisation ont besoin d'être défini car ils n'ont fait qu'une timide apparition en géographie (Martin, 1991 ; 2004 ; Pumain, Robic, 2002). D'abord, il faut rappeler que l'optimisation est une branche récente des mathématiques (Hiriart-Urruty, 1996). De plus, le terme « optimisation » est récent dans les dictionnaires français. Il faut ajouter à cela le fait que les termes « optimisation » et « optimiser » sont désuets. Le retour de ces concepts dans le langage scientifique marque un profond intérêt pour la question, mais surtout un besoin de définir de nouveau ces termes.

« Optimiser » est un terme neutre. Il désigne à la fois « minimiser » et « maximiser ». Actuellement, on associe, à tort, l'optimisation à la minimisation à cause, sans doute des développements économiques sur le sujet (Hiriart-Urruty, 1996). Toutefois, le principe d'optimisation en mathématique correspond à une annulation de la dérivée.

Traditionnellement, un problème d'optimisation se résume en trois composantes majeures :

1. il faut des variables d'état (ou des paramètres) ;
2. il faut des contraintes sur ces paramètres. Cependant, il faut noter que les contraintes peuvent être facultatives, dans ce cas, on parlera d'optimisation sans contraintes ;
3. il faut un ou des critères pour optimiser ces variables d'état : ce sont les conditions d'optimalité, conditions sans lesquelles le problème d'optimisation n'existe pas.

Mathématiquement, minimiser $f(x)$ sous la condition $x \in C$ se formule de la manière suivante :

$$(P) \begin{cases} \min[f(x)] \\ x \in C \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} D_f = X \\ C \subset X \end{cases}$$

La fonction f qui, $x \in X$, associe la valeur $f(x)$, est le critère. La partie C de X est l'ensemble des contraintes. Si $C = X$, alors x ne possède aucune contrainte dans son choix. C'est la définition mathématique de l'optimisation sans contraintes (Hiriart-Urruty, 1996).

3.3.3.2. Optimisation en géographie

En géographie, l'enseignement de cette définition montre que l'optimisation spatiale n'existe pas en soi. Elle est toujours la résultante d'une action naturelle (par les lois de la physique) ou humaine (par les choix d'aménagement), et de l'organisation du milieu. L'optimisation s'effectue donc toujours par rapport à quelque chose : une entité physique (surface, volume, énergie, *etc.*) ou une entité anthropique (économie, droit, sociologie, *etc.*). Autrement dit, une optimisation spatiale se réalise toujours au dépend d'une autre.

Cela conduit naturellement à s'interroger sur la définition de l'optimisation des formes. L'optimisation de la forme a pour objet la recherche de la meilleure forme possible pour un certain problème (Henrot et Sokolowski, 2003). La définition la plus courante est fondée sur le principe de Pierre-Louis de Maupertuis : « les formes optimales résultent, par définition, de la minimisation d'un chemin, d'un temps de parcours, d'une tension mécanique, d'une énergie, d'une quantité de matériaux, *etc.* Ce souci d'économie régit la Nature toute entière, aussi n'est-il pas surprenant de trouver des formes optimales partout (Figure 11) » (Octavia, 2005, p. 14-15).

Conditions d'optimalité	Formes optimales
Pour un périmètre fixé, la surface est la plus grande	Cercle (démonstré par Jacob Steiner en 1838)
Minimiser la surface extérieure (donc la perte d'énergie) en maximisant le volume	Sphère Demi-sphère (igloo des esquimaux)
Minimiser la surface extérieure en maximisant le volume et la hauteur	Cône (tipi des Indiens) : $\frac{\text{hauteur}}{\text{rayon}} = \sqrt{2}$
Maximiser le pavage de l'espace en conservant l'équidistance entre les angles et les centres	Hexagone régulier
Maximiser la dissipation de l'énergie par rapport à la surface d'échange	Méandre

Figure 11. Quelques formes optimales

Tout cela revient à dire que rechercher une minimisation, c'est trouver quel est l'objectif à atteindre. C'est un « finalisme méthodologique » (Varenne, 2005). Peut-on optimiser la connaissance que l'on vient de trouver ?

En géographie, l'espace est déjà constitué : il existe une forme de départ qu'il faut améliorer en fonction des besoins anthropiques (Figure 12). Toutefois, cela n'est jamais si simple, car les critères d'optimalité entrent souvent en conflit d'intérêt. Par exemple, si l'on prend l'objet « ville », actuellement, la volonté politique serait de minimiser son périmètre par rapport à sa surface, mais il faut également prendre en compte le réseau intra-urbain afin de minimiser le temps d'accès au centre par rapport à la distance.

Critères d'optimalité	Objet géographique à transformer
Minimiser le temps par rapport à la distance	Réseau routier
Minimiser le coût par rapport à la distance	
Minimiser la distance par rapport à la surface	Réseau hydrographique
Minimiser la surface par rapport au volume	Montagne
Minimiser le périmètre par rapport à la surface	Limite urbaine

Figure 12. Forme optimale et objets géographiques

3.3.3.3. Échelle comme condition d'optimalité

Se poser la question de savoir si l'échelle est une condition d'optimalité, revient à s'interroger sur des rapports hiérarchiques. Du moins, c'est souvent de cette manière qu'ont été interprétés les facteurs d'échelle. Par exemple, dans les formes arborescentes (cf. étude sur le réseau hydrographique), la condition d'optimalité est le facteur d'échelle entre les différentes branches de l'arbre. C'est lui qui va définir toute la structure, structure qui est multi-échelle, donc fractale.

Existe-t-il des échelles optimales ? La relativité d'échelle montre qu'il existe des échelles plus significatives que d'autres que l'on appelle échelle de coupure. Dans cette perspective, ces échelles de coupure sont optimales, mais elles sont aussi relatives. En effet, si la résolution de référence change, l'échelle de coupure existera toujours, mais elle n'a rien d'absolu. Si on réfléchit bien, on s'aperçoit que l'échelle optimale n'existe pas, car, pour l'atteindre, il faudrait avoir une résolution de référence tendant vers zéro, c'est-à-dire l'infini. Cela étant, cette résolution de référence existe forcément et correspond à un nombre réel. Autrement dit, elle est toujours finie donc toujours améliorable. Par conséquent, la quête de la meilleure résolution telle que l'ont engagée beaucoup de géographes est illusoire. Il vaut mieux étudier le lien existant entre les échelles que l'optimisation de ces échelles. D'ailleurs, les fractales sont en règle générale le résultat d'une optimisation sous contraintes « contradictoires ». Par exemple, la forme fractale des poumons correspond à une optimisation du problème suivant : comment augmenter une surface d'échange sans augmenter son volume ?

Ce chapitre s'est efforcé de montrer que échelles, limites et espace étaient étroitement liées, mais surtout qu'elles étaient relatives. Le problème de l'échelle amène celui de la limite que l'on trace à cette échelle. Le processus d'agrégation en géographie renvoie au M.A.U.P., et plus généralement à la théorie des fractales, et encore plus généralement à la théorie de la relativité d'échelle. Une échelle est toujours relative par rapport à une autre, mais tout objet géographique possède une échelle. Autrement dit, c'est un problème de fond insoluble que l'on rencontre en géographie, mais également dans d'autres disciplines. Aussi, le cœur de l'analyse spatiale doit donc être l'étude des relations entre les échelles, et non les échelles elles-mêmes et pour elles-mêmes. La théorie mathématique qui étudie ces relations s'appelle la théorie des fractales.

Notes

[1] Attention. Il ne faudra pas confondre l'analyse fractale et l'analyse des formes fractales. La première est une véritable analyse au sens de René Descartes qui est appelé analyse non standard fractale. La seconde est une méthode analytique particulière qui permet de « mesurer » les formes fractales.

[2] Les forces extérieures sont les forces appliquées au système de l'extérieur, tandis que les forces intérieures sont les forces entrant ou évoluant à l'intérieur du système.

4

Structures fractales en géographie

Précédemment, le concept de « fractal » fut abondamment employé. Ce chapitre a pour objectif de dégager quelques caractéristiques mathématiques afin de définir ce concept et l'articuler avec la théorie de la relativité d'échelle.

4.1. Position du problème

Dès le début de la Nouvelle géographie en France, une approche fondamentale mise en œuvre fut l'analyse multi-scalaire (Lacoste, 1976), c'est-à-dire plus exactement une description empirique et intuitive des structures fractales présentes dans l'espace géographique. Celles-ci sont nombreuses, ne serait-ce que par l'existence même des cartes. C'est ce que certains ont appelé la généralisation cartographique (Eckert, 1921 ; Cuénin, 1972 ; Béguin et Pumain, 1994) qui n'est autre que l'expression littéraire d'une géométrie extrêmement générale appelée : géométrie fractale (Mandelbrot, 1975).

Le terme « fractal » vient de l'adjectif latin *fractus* (fracture) et du verbe *frangere* (briser). Étymologiquement, « fractal » veut donc dire fraction et/ou fracture. Autrement dit, on peut prétendre en première définition qu'elle permet de « mesurer l'irrégularité d'un objet ». En effet, la géométrie fractale est un des outils qui permet de mesurer le chaos, ou plutôt qui essaye de le quantifier. Cependant, elle peut être considérée comme une manière de voir le monde, indépendante du chaos. C'est pour cela que chaoticiens et fractalistes expriment les mêmes idées, mais n'ont pas la même priorité. Les premiers étudient la dynamique des systèmes, tandis que les seconds étudient la structure des systèmes (Stewart, 1998, p. 308).

Traditionnellement nous utilisons, pour décrire les formes que nous voyons, la géométrie euclidienne composée par les figures classiques (carré, cercle, triangle, polygones divers...). Ces formes si pratiques sont en réalité des archétypes, des schémas simplistes (mais nécessaires) des morphologies que l'on rencontre dans la Nature, car finalement seules les œuvres humaines, en architecture en particulier, les utilisent ; elles furent même au cœur du courant classique des XVII^e-XVIII^e siècles. Le noyau central de la géométrie euclidienne est l'inégalité triangulaire et le théorème de Pythagore. Toutefois, Karl Fredrich Gauss découvrit une géométrie qui n'obéissait pas à ces règles ; ainsi naquit la première géométrie non euclidienne qui fut étudiée de manière plus complète par Bernhard Riemann. La géométrie riemannienne vit ainsi le jour. Au cœur de celle-ci se trouve la notion de courbure qui permet de définir un espace courbe. En géographie, le meilleur exemple d'espace courbe est la surface de la Terre. En effet, si l'on recherche à représenter cette surface dans un espace euclidien qui est plat (c'est-à-dire non courbe), on est conduit nécessairement à augmenter la surface de la Terre car elle « se déchire » dans un espace plat (c'est-à-dire euclidien ou minkowskien).

Quelques années plus tard, Albert Einstein plaça la géométrie riemannienne au centre de sa théorie de la relativité du mouvement. Cependant, il est apparu à Benoît Mandelbrot que la géométrie riemannienne n'était qu'une géométrie non euclidienne particulière. Ainsi depuis une trentaine d'années, la géométrie euclidienne ainsi que la géométrie riemannienne furent englobées, dépassées par cette deuxième géométrie non euclidienne : la géométrie fractale (années 1950). Celle-ci étudie des formes irrégulières, ou qui nous apparaissent comme telles. Or, qu'y a-t-il de plus irrégulier et de plus structuré en échelles que les formes que l'on observe à la surface de la Terre. La géométrie riemannienne n'est donc qu'une approche triviale, qu'une première approximation possible des formes terrestres. Toutefois, le terme « fractal » est extrêmement général. En première approche, on peut citer la définition de Benoît Mandelbrot : « les fractales sont des objets - qu'ils soient mathématiques, dus à la nature ou dus à l'homme - qu'on appelle irréguliers, rugueux, poreux ou fragmentés, et qui, de plus, possèdent ces propriétés au même degré à toutes les échelles. C'est dire que ces objets ont la même forme qu'ils soient vus de près ou de loin » (Mandelbrot, 1997, p. 33). Cette définition est à nuancer, car elle n'est valable que dans le cas très particulier d'une autosimilarité de forme de référence.

Le principal outil permettant d'étudier les formes fractales, est ce que l'on appelle la dimension fractale ou plutôt les dimensions fractales qui présentent la particularité d'être parfois non entières, ce qui peut paraître surprenant, car Euclide et ses successeurs avaient défini les dimensions mathématiques comme étant strictement entières, ce sont les dimensions topologiques : la dimension zéro correspondant aux points, la dimension une aux courbes, la dimension deux aux surfaces et la dimension trois aux volumes (Figure 13). Depuis, on a ajouté à ceux-ci l'espace-temps à quatre dimensions de Hermann Minkowski et d'Albert Einstein et l'espace-temps fractal à cinq dimensions de Laurent Nottale. Ce concept de dimension au sens d'Euclide ne pouvait cependant définir que des figures que nous qualifierons de régulières, créées généralement par les Hommes oubliant que la Nature aime l'irrégularité. Ainsi, les dimensions fractales qualifient quelques-uns de ces objets oubliés. Il s'agit d'un « nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique ou d'un objet naturel, et qui se réduit, dans le cas des objets de la géométrie usuelle d'Euclide, à leurs dimensions usuelles » (Mandelbrot, 1975, p. 155). Toutefois, la dimension fractale ne remplace en rien la dimension topologique, elle la complète.

À partir de là, cette thèse présentera la relativité d'échelle de Laurent Nottale qui peut être vue comme une extension de la théorie mathématique de Benoît Mandelbrot ou un complément nécessaire à une théorie qui peut paraître difficile à mettre en œuvre.

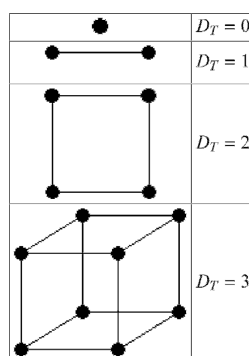


Figure 13. Définitions des dimensions topologiques

4.2. Les fractales et la relativité d'échelle

Après avoir évoqué dans les chapitres précédents, la philosophie générale de la relativité d'échelle, ce chapitre a pour objectif de décrire son aspect un peu plus technique. Pour ce faire, il faut simplement remarquer que la relativité d'échelle est une théorie physique qui met en œuvre l'idée que la dimension fractale d'un objet peut varier en fonction de sa résolution (ou d'une autre variable d'échelle). Autrement dit, l'irrégularité apparente d'un objet géographique physique ou humain se transforme en fonction de sa résolution. Les cours d'eau semblent être un bon exemple en géographie car la longueur d'un cours d'eau dépend de la résolution de la carte dans laquelle il se trouve. La longueur devient une fonction explicite de la résolution ε de la carte et peut s'écrire : $L(\varepsilon)$. Il en est de même pour une distance temporelle T qui peut dépendre explicitement de la résolution à laquelle on l'exprime. Mesurer un débit toutes les heures ne donne pas la même courbe que si l'on effectue cette mesure tous les quarts d'heure. Pourtant, il existe une loi d'échelle entre ces deux courbes qui les relie explicitement puisque de la courbe exprimée en quart d'heure, on peut déduire celle exprimée en heure. De même, de la courbe en heure, on peut déduire celle de toutes les deux heures, trois heures, quatre heures, ..., n heures. La structure en échelles temporelles apparaît alors clairement sous la forme d'une loi.

L'expression est lancée : « loi d'échelle ». À ce niveau, il est important distinguer l'échelle de référence et l'échelle de résolution. La première correspond à l'unité de mesure : le mètre, le kilomètre, *etc.*, tandis que la seconde caractérise l'échelle à partir de laquelle il existe une information tangible. Une loi d'échelle se rapporte à la nature de la transformation d'une résolution ε_1 en une résolution ε_2 , et ainsi de suite. L'échelle de référence est, par contre, une constante. Benoît Mandelbrot (1967 ; 1975) montra que la transformation la plus simple existante suivait une loi puissance qui unit explicitement la longueur avec la résolution dans laquelle elle se trouve. Tout objet géographique est potentiellement un objet qui dépend de son échelle d'observation (Brunet, 1968 ; Lacoste, 1976). Quelle est la nature mathématique de cette dépendance ? Quels sont les nouveaux concepts qu'elle entraîne ? En quoi est-ce fondamental en géographie ?

4.2.1. La dépendance d'échelle

La dépendance d'échelle est un concept très général qui suppose l'existence d'une loi d'échelle entre la résolution et une variable d'échelle. Le cas le plus connu est celui de l'invariance d'échelle qui correspond à l'émergence d'une constante (la dimension fractale) qui lie la variable étudiée à sa variable d'échelle. Cependant, il ne faut pas confondre invariance d'échelle et autosimilarité (reproduction à l'infini d'une même forme). L'autosimilarité est une invariance d'échelle particulière, mais toute invariance d'échelle n'est pas autosimilaire. Le succès de l'invariance d'échelle est dû à sa simplicité (Mandelbrot, 1975). Toutefois, très vite, les lois d'échelle se compliquent dans une première approche que sont les multifractales. Il est important de rappeler que le concept de multifractalité a bien été inventé par Benoît Mandelbrot dans les années 1960 ; c'est ce qu'il avait appelé à l'origine « fractal ». Il a été repris par Giorgio Parisi et Uriel Frisch (1985) sous une autre forme. La multifractalité correspond à l'imbrication de plusieurs invariances d'échelle qui renvoie au concept d'échelles de coupure qui sera défini plus tard dans ce chapitre. Toutefois, la relativité d'échelle montre qu'il existe d'autres lois d'échelle possibles beaucoup plus générales et plus simples que les multifractales.

4.2.2. L'invariance d'échelle - L'approche empirique

L'invariance d'échelle correspond à une dimension fractale constante. Avant d'aborder la manière de caractériser la fractalité et les lois d'échelle les plus simples, il est nécessaire de rappeler la définition d'une dimension.

4.2.2.1. Dimension topologique et dimension fractale

La notion de dimension est intuitive. Elle correspond soit au nombre de degré de liberté, soit au nombre de coordonnées nécessaires pour décrire tous les points d'un objet. Les exemples les plus explicites sont le segment, le carré, le cube, l'hypercube, *etc.* Pour expliquer la notion, il est plus simple d'utiliser l'exemple d'un carré transformé par une homothétie (Figure 14 et Figure 15)

Exemple 1. Si l'on agrandit un carré de côté ε_0 (carré rouge), d'un facteur 3, alors il faut 9 carrés de départ pour remplir le nouveau grand carré (Figure 14)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figure 14. Agrandissement ou réduction d'un carré par un facteur 3

Exemple 2. Si l'on agrandit un carré d'un facteur 5, alors il faut 25 carrés de départ pour remplir le nouveau grand carré (Figure 15).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Figure 15. Agrandissement ou réduction d'un carré par un facteur 5

Plus généralement, si l'on agrandit un carré d'un facteur λ , alors il faut N carrés de départ pour remplir le nouveau grand carré. Soit $N = \varepsilon_0^D$ dans le cas du carré $D = 2$. Il est aisé de vérifier que :

$$9 = 3^2$$

$$25 = 5^2$$

etc.

D est appelée dimension d'homothétie. Après avoir vu la dimension 2, les dimensions les plus courantes sont 1 et 3 :

- pour $D = 0$, $N = \varepsilon_0^0$, on parlera alors de poussières ;
- pour $D = 1$, $N = \varepsilon_0^1$, on parlera alors de courbes ;
- pour $D = 3$, $N = \varepsilon_0^3$, on parlera alors de volumes ;

Ce qui différencie un objet euclidien d'un objet fractal est le fait que, pour un objet ou espace fractal, la dimension peut être non entière. Le conditionnel de cette phrase est fondamental, car ce n'est pas systématique. Ceci précisé, il reste à définir ce que sont les fractales autosimilaires. Pour cela, l'exemple type et le plus pédagogique reste la courbe de Koch (1904) (Figure 16).

La courbe de Koch s'obtient par un processus itératif simple. On part d'un segment que l'on divise en trois parties égales (Figure 16.a.). On supprime la partie centrale et on la remplace par un triangle équilatéral dont la partie adjacente au segment n'est pas reliée (Figure 16.b.). Cette figure s'appelle un générateur, car on reproduit cette forme de base dans tous les segments composants la structure de base (Figure 16.b.). Ainsi, à chaque étape, la structure devient de plus en plus complexe.

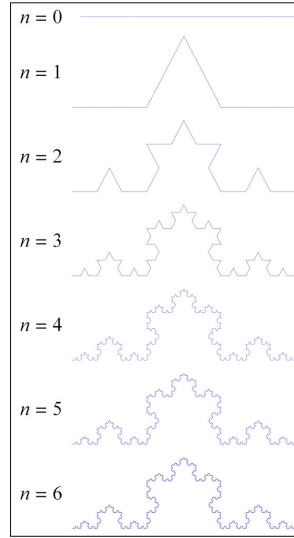


Figure 16. La courbe de Helge von Koch

La longueur totale de chaque étape vaut alors :

$$L_{TOT_0} = 1 ; \text{ on pose } \varepsilon_0 = 3, \text{ alors } L_{TOT_0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{\varepsilon_0} ;$$

$$L_{TOT_1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} ; \text{ on pose } N = 4, \text{ ce qui correspond au nombre de sous-segments valant } \frac{1}{\varepsilon_0} ;$$

$$L_{TOT_2} = \frac{L_{TOT_1}}{3} \times 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$L_{TOT_3} = \frac{L_{TOT_2}}{3} \times 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

...

$$L_{TOT_n} = \frac{L_{TOT_{n-1}}}{3} \times 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Cette itération, très simple, revient à dilater d'un facteur 3^n le générateur et de multiplier par 4^n le nombre de segments. Ainsi, si on applique $N = \varepsilon_0^D$, on obtient $4^n = (3^n)^D$. Dans ce cas, D a peu de chance d'être entier. La courbe de Koch possède donc une dimension homothétique non entière : $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,27...$ D est une grandeur que l'on appelle dimension fractale. Cette dernière permet de « mesurer » la fractalité d'un objet. Toutefois, il existe d'autres dimensions que celle homothétique. Plusieurs définitions sont possibles pour caractériser une dimension fractale. Ainsi, il existe la dimension fractale de boîtes, la dimension fractale de Hausdorff, la dimension fractale de Minkowski, *etc.* Un même objet peut donc avoir plusieurs dimensions fractales permettant de le caractériser, même si dans la plupart des cas, les différentes méthodes fournissent des valeurs de dimensions fractales égales.

De plus, la courbe de Koch permet également de constater qu'une fractale correspond à une structure dans la structure. Dans ce cas autosimilaire, on trouve le générateur dans chaque segment le composant. Une structure fractale possède alors au minimum deux niveaux. L'irrégularité seule ne suffit pas à caractériser une structure en échelle. Ce point est fondamental, car il explique parfaitement qu'un arbre soit fractal pris globalement (c'est-à-dire à sa limite), mais qu'une de ces branches aussi irrégulière soit-elle, ne le soit pas. Autrement dit, la courbe de Helge von Koch est irrégulière et ordonnée à différentes échelles. Cela permet de définir la géométrie fractale de manière plus profonde. Elle correspond à un fractionnement hiérarchisé de la matière. C'est pourquoi, en géographie, la géométrie fractale permet de comprendre l'organisation d'un espace hétérogène et anisotrope. Le document se trouvant à l'adresse URL suivante : http://www.dunod.com/documents/48387/Front_annexe_A.pdf, résume bien cette idée : « L'Homme, colonisant l'espace qui lui est attribué, y crée, aux échelles de son activité, une telle géométrie. Le réseau routier, qui comprend des voies de toutes tailles (des autoroutes aux sentiers) ramifiées et interconnectées, évitant les obstacles, et reliant tous les lieux destinés à interagir, montre une géométrie rappelant celle des racines ou des mycéliums dans le sol. A d'autres échelles au contraire, la géométrie fractale est plutôt un handicap. Nous nous efforçons alors de la remplacer par une géométrie localement euclidienne : nous égalisons les terrains, supprimons tout ce qui dépasse et tous les creux, rectifions les côtes, remplaçons la « nature sauvage » par le jardin - quitte à se passer des propriétés originales, parfois irremplaçables, d'un habitat fractal ; mais la maîtrise des géométries inextricables nous manque » [http://www.dunod.com/documents/48387/Front_annexe_A.pdf]. Ce qui amène naturellement à se poser la question de la définition de la dimension fractale d'un objet non autosimilaire.

4.2.2.2. La dimension fractale non autosimilaire

Un objet fractal non autosimilaire^[1] peut, comme la courbe de Helge von Koch, posséder une dimension fractale constante. Toutefois, dans de nombreux cas, la dimension fractale varie en fonction de la résolution ou l'objet lui-même se structure en échelle par des lois beaucoup plus complexes que ce chapitre développera plus tard. La loi d'échelle la plus simple s'écrit :

$$L(\varepsilon) = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T}$$

où : L correspond à la longueur variable en fonction de la résolution ; L_0 et ε_0 correspondent aux paramètres initiaux, c'est-à-dire à la longueur normée de la première carte et à la longueur mesurée sur la carte ; ε désigne la variable d'échelle ; D correspond à la dimension fractale et D_T correspond à la dimension topologique. Cette loi se démontre de manière géométrique par le simple arpentage d'une courbe irrégulière et hiérarchisée (Figure 17).

■ L'arpentage d'une courbe fractale

L'arpentage est une méthode qui revient à mesurer la longueur d'une courbe grâce à des pas (résolution) successifs.

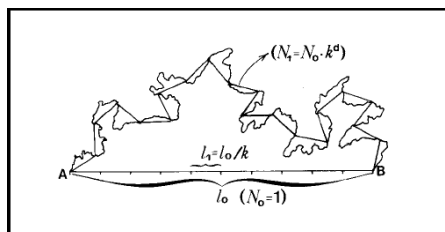


Figure 17. Arpentage d'une courbe fractale

Source : http://www.dunod.com/documents/48387/Front_annexe_A.pdf

On pose $L_n = AB$, la plus longue distance entre A et B. Soit $l_0 = AB$ (précédemment, on l'avait nommé ε_0), la distance la plus courte entre A et B c'est-à-dire la distance à vol d'oiseau. l_0 va servir de résolution de référence. De plus, par définition, on sait que la longueur L_n est un rapport de proportionnalité avec une résolution l_n ce qui revient à compter L_0 telle que :

$$L_0 = N_0 \times l_0^{D_T} \text{ avec } N_0 \in \mathbb{R}$$

Si on utilise maintenant une unité plus petite l_1 reliant toujours A et B par la plus courte distance et correspondant à une réduction k de l'étalon précédent, alors, tout comme la courbe Koch,

$$l_1 = \frac{l_0}{k} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ (et non plus } \mathbb{N})$$

d'où la longueur totale du niveau suivant :

$$L_1 = N_1 \times l_1^{D_T} \text{ avec } N_0 \neq N_1 \text{ c'est-à-dire } L_0 \neq L_1.$$

Plus généralement, $l_n = \frac{l_0}{k^n}$ ou $l_n = \frac{l_0}{k^n}$ et $L(l_n) = N(l_n) \times l_n^{D_T}$.

D'après les règles d'agrandissement vue précédemment, on sait que si l'on pose une longueur caractéristique N_0 de l'objet, alors le rapport de proportionnalité varie comme :

$$N_1 = N_0 \times k^D \text{ avec } D \text{ appartenant au corps des réels ou à celui des complexes.}$$

Il est nécessaire de multiplier k^D par N_0 car ici nous avons une unité de référence N_0 , appelée longueur caractéristique (ou unité de mesure). Plus généralement,

$$N_n = N_0(k^n)^D$$

Plus généralement, $L_n = N_n \times l_n^{D_T} = N_0(k^n)^D l_n^{D_T} = N_0 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D l_n^{D_T} = N_0 l_0^{D_T} \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{D_T}$ c'est-à-dire $L_n = L_0 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$ ici $D_T = 1$.

Si on linéarise l'équation, on obtient alors $\ln L_n = \ln L_0 + (D - D_T) \ln \left(\frac{l_0}{l_n}\right)$. Cette méthode montre qu'il est plus simple d'adimensionner le problème. En effet, puisque $L(l_n) = N(l_n) \times l_n^{D_T}$ et $L_n = L_0 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$, $N(l_n) = l_n^{D_T} = L_0 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T}$, or $L_0 = N_0 \times l_0^{D_T}$, donc $N(l_n) = N_0 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D_T} \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-D_T} = N_0 \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^D$.

Ces relations permettent de définir la fractalité à travers les cartes géographiques.

■ Le cas des cartes géographiques

En géographie, il est évident que la longueur mesurée sur une carte entre deux points varie en fonction de l'échelle à laquelle on effectue la mesure. Le résultat de la mesure dépend donc de la résolution ε définie, en cartographie, de la manière suivante :

$$\varepsilon^{D_T} = \frac{L(\varepsilon)}{N(\varepsilon)} \begin{array}{l} \rightarrow \text{longueur normée correspond à une mesure sur le terrain} \\ \rightarrow \text{longueur correspondant sur la carte (ou la résolution)} \end{array}$$

Autrement dit,

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T}$$

Cette formule implique que le passage d'une carte à une autre n'est pas qu'un simple rapport d'échelle. Il s'agit d'une transformation beaucoup plus complexe. Le problème de l'effet d'échelle peut alors s'exprimer mathématiquement de la manière suivante : « comment varie la longueur mesurée en fonction de la résolution à laquelle on la mesure ? » La plus simple trouvée est bien entendu à nouveau :

$$L_n = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_n}\right)^{D-D_T}.$$

Nombreux sont ces objets de « longueurs infinies » en géographie : la côte de la Grande-Bretagne (Mandelbrot, 1967), les cours d'eau, le réseau routier, *etc.*

L'idée de fractalité en cartographie consiste à affirmer qu'entre deux cartes de résolutions ε_1 et ε_2 , les longueurs $L(\varepsilon_1)$ et $L(\varepsilon_2)$ ne seront pas identiques, car leur valeur dépend de la résolution choisie. Cette proposition a pour corollaire : $N(\varepsilon_1) \neq N(\varepsilon_2)$. Si l'on prend un exemple très exagéré, et que l'on suppose qu'à une carte d'échelle 1 / 25 000, $N_0 = 50$ cm pour un objet géographique donné. Sa longueur normalisée (celle du terrain) correspondrait à $L_0 = 12,5$ km, on peut alors dresser un tableau montrant la variation des longueurs en fonction de l'échelle de la carte (Figure 18). Dans ce cas, L_0 est une longueur caractéristique servant d'étalon et ε_0 correspond à l'échelle de référence.

n	Longueur mesurée sur la carte N avec un degré de précision de 1 cm	Résolution ε (cm)	Longueur normalisée L (km)
0	50	25 000	12,5
1	22	50 000	12,5
2	9	100 000	12,5
3	5	150 000	12,4
4	3	200 000	12
5	1	500 000	10

Figure 18. Loi d'échelle fractale

La loi d'échelle correspondante pour les longueurs normalisées serait donc :

$$L_n \approx 1\,250\,000 \left(\frac{\varepsilon}{25\,000} \right)^\delta \text{ avec, ici, } D \approx 1,3 \text{ et } \delta = D - 1.$$

La Figure 18 est bien loin de ce que croient la plupart des géographes et que l'on peut résumer dans la Figure 19.

n	Longueur mesurée sur la carte N	Résolution ε (cm)	Longueur normalisée L (km)
1	50	25 000	12,5
2	25	50 000	12,5
3	12,5	100 000	12,5
4	6,25	200 000	12,5
5	1,25	1 000 000	12,5
6	0,125	10 000 000	12,5

Figure 19. Loi d'échelle non fractale

Lorsque l'on calcule la dimension fractale de cette structure en échelle comme étant le rapport entre le logarithme népérien de la longueur mesurée et le logarithme népérien de la résolution ($1/\varepsilon$), on ne trouve pas systématiquement une dimension fractale constante correspondant à la pente de la droite obtenue en $(\ln L, \ln(1/\varepsilon))$ qui correspond à l'invariance d'échelle. Il faut bien comprendre que cette pente n'est autre que la limite de la variation de la longueur L par rapport à celle de la résolution ε lorsque ε tend vers 0.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta \ln L}{-\Delta \ln \varepsilon} = D - D_T$$

Autrement dit, la dimension fractale invariante d'échelle est définie à la limite de l'objet fractal. Bien qu'elle demeure un cas souvent rencontré, en règle générale, elle n'est pas satisfaisante pour caractériser les « objets réels ». En effet, dans la plupart des cas, l'ajustement le plus pertinent en $(\ln L, \ln(1/\varepsilon))$ est un ajustement non linéaire. Il peut s'agir d'un polynôme, par exemple, et là, il n'est pas possible de s'en sortir avec les techniques classiques. Que faire de ces ajustements qui sont nettement meilleurs que l'ajustement linéaire ? La réponse à cette interrogation peut être trouvée grâce à la théorie de la relativité d'échelle dont il faut reprendre les principales étapes de construction. Une transformation d'échelle n'est donc pas une simple homothétie. Cela revient à dire que, lorsque l'on applique une homothétie sur un objet, les structures obtenues ne sont pas forcément homothétiques. Elles correspondent alors à l'apparition de nouvelles structures à différents niveaux. Avant de passer au cœur de la théorie de la relativité d'échelle, il faut définir les différentes méthodes de calcul d'une dimension fractale.

4.2.3. Évaluer une dimension fractale

Il existe plusieurs modèles de calcul de dimension fractale. La plus facile à mettre en œuvre est une dimension fractale de boîtes (carrées, rectangulaires, circulaires, hexagonales, triangulaires, avec des losanges, cubiques, sphériques, *etc.*). La plupart du temps, on utilise une méthode indirecte pour déterminer la dimension fractale. Dans la formule $L(\varepsilon) = N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T}$, N correspond à la longueur mesurée sur la carte, mais il s'agit plus généralement d'un nombre entier dû à la résolution choisie. Si cette résolution est une boîte de taille variable de dimension topologique D_T correspondant à celle de l'objet à mesurer, il suffit de compter pour chaque taille le nombre de boîtes pleines pour estimer la dimension fractale dans un graphique bi logarithmique $[\ln(\varepsilon) - \ln(N(\varepsilon))]$. Par exemple, pour la formule de l'invariance d'échelle :

$$L(\varepsilon) = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D - D_T}$$

il est facile de remplacer $L(\varepsilon)$ et L_0 par leur valeur respective :

$$N(\varepsilon) \times \varepsilon^{D_T} = N_0 \varepsilon_0^{D_T} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D - D_T} = N_0 \varepsilon_0^{D_T} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^D \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-D_T} = N_0 \varepsilon_0^{D_T} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^D \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{D_T}$$

d'où

$$N(\varepsilon) = N_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^D$$

Cette formule est remarquable car elle permet d'évaluer directement la dimension fractale à partir d'un simple comptage avec différentes résolutions.

4.2.3.1. Dimension par comptage de boîtes carrées

La méthode est très simple : il s'agit de créer artificiellement une maille carrée ε_n variable. Se faisant, la dimension fractale se calcule en comptant le nombre N_n de carrés contenant une partie de l'objet mesuré C . La dimension de comptage de boîtes carrées correspond, dans un espace bi logarithmique entre le côté du carré (qui sert de résolution) et le nombre de carrés, à la pente de la droite observée, s'il s'agit d'un ajustement linéaire. Autrement dit,

$$D_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_n}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

Cette méthode donne directement la dimension fractale de l'objet sans faire intervenir sa dimension topologique (Barnsley, 1988).

Si ce calcul est séduisant par sa simplicité, Alain Le Méhauté (1990) souligne que « cette méthode présente cependant d'assez graves inconvénients. En particulier si $\frac{1}{\varepsilon}$ n'est pas entier, les carrés de côtés ε_n vont généralement déborder à gauche et à droite du graphe de C , ce qui fausse les résultats et introduit des irrégularités dans le diagramme, surtout lorsque ε_n est grand » (Le Méhauté, 1990, p. 50). En effet, passer une certaine taille, le nombre de boîtes est strictement homothétique ; sa dimension fractale vaut alors 2. Aujourd'hui, cette déviation est connue sous le nom de correction log-périodique (Sornette, 1998 ; 2000 ; 2003 ; 2006 ; Nottale, 1997). Toutefois, en pratique, les fluctuations apportées par ce biais sont telles que lors d'un ajustement par la méthode des moindres carrés, la fonction ajustée passe, en général, au niveau de la valeur moyenne des fluctuations, ce qui fait qu'en moyenne dans les fortes fluctuations apportées par ce biais, la dimension fractale des grandes boîtes s'ajuste sur celle des petites boîtes. Enfin, pour limiter cet effet, il suffit d'utiliser une suite dyadique dans la taille du côté des carrés, c'est-à-dire que les grilles utilisées vont parfaitement s'emboîter en suivant la loi du type : $\varepsilon_n = 2^{-n}$.

En géographie, ce calcul est très fréquent car l'analyse d'images est courante. En effet, la taille minimale du carré d'une grille ne fait que représenter la taille d'un grain sur une carte, d'un pixel sur une image satellite donnée, *etc.* De plus, le calcul est très simple à programmer : il suffit d'utiliser une partie entière pour savoir si tel pixel fait partie de tel carré. Il suffit de normaliser la grille en fonction de la résolution utilisée et d'y appliquer une partie entière pour connaître la position de chaque point par rapport à la résolution de la grille. Afin de faciliter la lecture des graphiques ($\ln \varepsilon - \ln N(\varepsilon)$), la résolution variable ε sera systématiquement donnée soit en mètre, soit en kilomètre.

Soit un repère orthonormé. Soient K et L les valeurs d'une grille de résolution ε . Alors

$$\begin{cases} K = E\left(\frac{x_i}{\varepsilon} + 1\right) \\ L = E\left(\frac{y_i}{\varepsilon} + 1\right) \end{cases}$$

Il faut noter que cette fonction permet d'arrondir systématiquement, par défaut, un nombre réel à sa partie entière. Par exemple, $E(1,25) = 1$. $E(311,262616) = 311$, mais pour connaître la position exacte dans une grille avant d'appliquer la partie entière sur la fraction, il est nécessaire d'y ajouter 1 pour positionner correctement le point dans la grille (Figure 20).

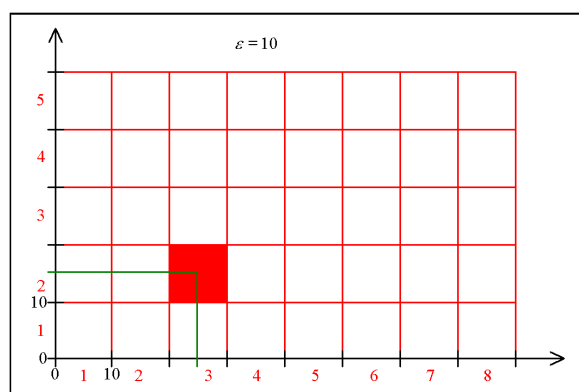


Figure 20. Méthode de calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées

La résolution $\varepsilon = 10$ signifie qu'en deçà de cette échelle, il n'y a plus d'informations disponibles. Autrement dit, pour notre exemple (en vert) l'abscisse sera arrondie à 30 et l'ordonnée sera arrondie à 20. Si $x = 25$ et $y = 15$ alors ces deux points appartiendront à $K = E\left(\frac{25}{10} + 1\right) = 3$ et $L = E\left(\frac{15}{10} + 1\right) = 2$. Si on multiplie (K, L) par la résolution $\varepsilon = 10$, on trouve bien $(30, 20)$.

4.2.3.2. Dimension par comptage de boîtes hexagonales

La dimension par comptage de boîtes hexagonales est calculée en suivant la même méthode que la dimension fractale de boîtes carrées. En effet, seule la forme globale de la grille change : au lieu d'avoir des carrés, on aura des hexagones réguliers. Le pavage d'hexagones réguliers permet de remplir complètement l'espace en respectant une équidistance entre les angles et les centres. Tout comme la dimension fractale par comptage de boîtes carrées, celle de boîtes hexagonales s'obtient dans un espace bi logarithmique entre le côté de l'hexagone et le nombre d'hexagones non vides. La dimension fractale correspond à la pente de la droite observée, s'il s'agit d'un ajustement linéaire.

Toutefois, le maillage hexagonal régulier présente ses propres difficultés techniques : (1) d'abord dans la création de la grille ; (2) puis dans la possibilité de compter les boîtes. La méthode la plus simple pour créer une grille hexagonale consiste à dessiner deux hexagones tels que le montre la Figure 21 est de les translater dans toutes les directions du plan. Une fois la grille créée, il suffit de faire varier la résolution (le côté de l'hexagone) pour obtenir un procédé analogue à la méthode par comptage de boîtes carrées (Figure 22). Il est important de remarquer que le fait que les grilles hexagonales ne s'emboîtent pas n'est pas un problème. Comme cela a été entrevu dans le paragraphe précédent, les grilles carrées ne s'emboîtent qu'à condition que la suite formée par les facteurs d'échelle soit dyadique. Un autre problème plus important apparaît : celui du comptage.

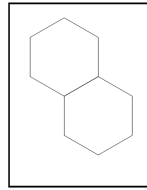


Figure 21. Générateur pour fabriquer une grille hexagonale

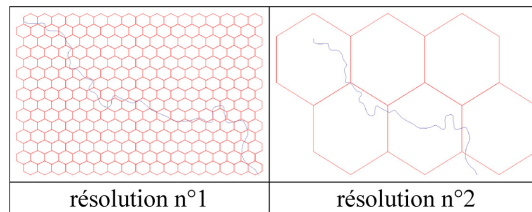


Figure 22. Grilles hexagonales à mailles variables

En effet, pour une grille carrée, il suffit d'introduire une partie entière pour décider si un pixel fait parti d'un carré de la grille. Pour un pavage hexagonal, le problème du comptage ne peut se résumer à cette simplicité. Dans ce cas, il faut faire intervenir les équations des droites qui composent la boîte hexagonale et résoudre un système de six inéquations à six inconnues :

$$\begin{cases} x \geq b_1 \\ y \geq a_2 x + b_2 \\ y \geq a_3 x + b_3 \\ x \leq b_4 \\ y \leq a_5 x + b_5 \\ y \leq a_6 x + b_6 \end{cases}$$

La première équation correspond à la Figure 23 à la droite n°1, la seconde à la droite n°2, *etc.* Ce système est facilement programmable. Toutefois, les temps de calcul sont dix à cent fois plus longs que celui de la dimension par comptage de boîtes carrées.

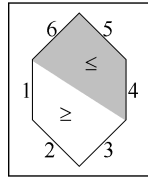


Figure 23. Hexagone et signe des équations de droites

Cette méthode permet-elle d'obtenir de meilleurs résultats que la dimension par comptage de boîtes carrées ? Pour ce, il faut effectuer un test (Figure 24).

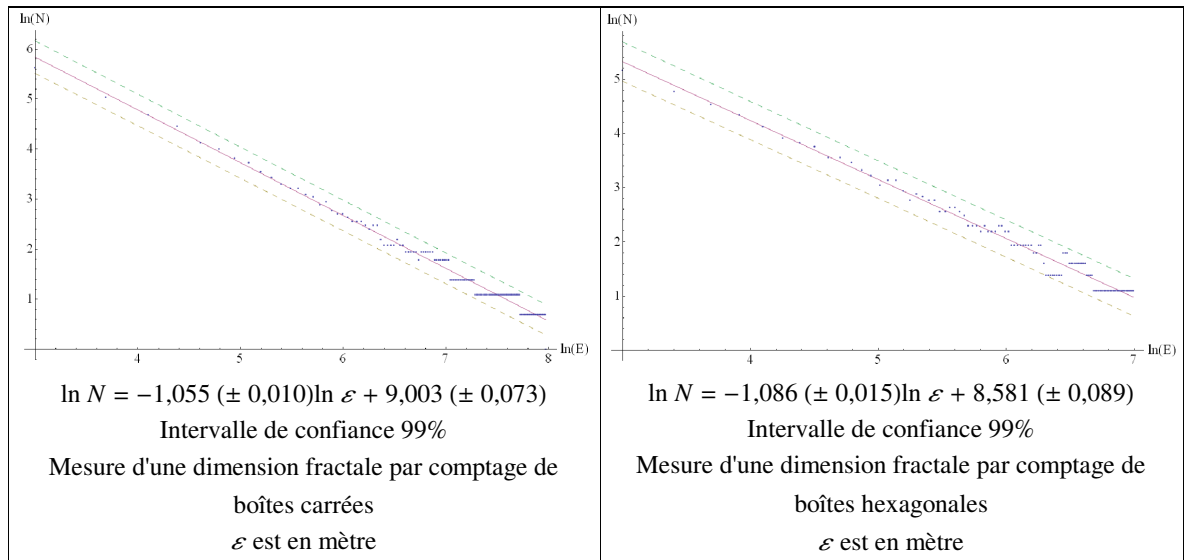


Figure 24. Comparaison entre une mesure de dimension fractale par comptage de boîtes carrées et une mesure de la dimension fractale par comptage de boîtes hexagonales

A travers ces résultats, on perçoit bien que les deux résultats sont à peu près équivalents. En effet,

$$\Delta = 1,086 - 1,054 = 0,032$$

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{0,015^2 + 0,010^2} = 0,018$$

Aussi, dans la suite, de cette thèse, la méthode par comptage de boîtes carrées sera systématiquement utilisée.

4.2.3.3. Grilles et densités locales

À partir d'un pavage, il est possible de connaître la position précise des pixels dans la grille. Une densité locale peut alors être calculée. Elle correspond au rapport entre le nombre de pixels contenus dans le carré ou l'hexagone considéré et la surface de ce carré ou de cet hexagone. Pour chaque résolution envisagée, il est donc possible de calculer une telle densité et d'en réaliser la répartition dans l'espace (cf. chapitre 10).

4.2.3.4. Dimension fractale par comptage de boîtes circulaires

Une telle dimension fractale s'obtient de la même manière que les dimensions par comptage de boîtes carrées ou hexagonales (Figure 25), la variation du rayon du cercle correspondant à la résolution.

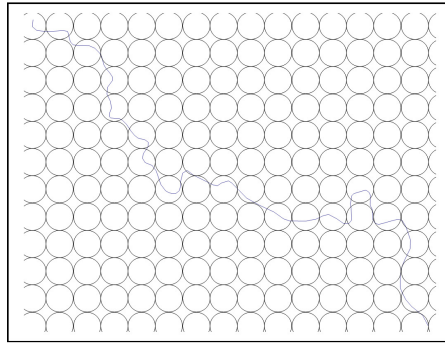


Figure 25. Méthode de calcul par une grille composée de boîtes circulaires

4.2.3.5. Dimension radiale

La dimension fractale radiale est une autre dimension fractale par comptage de boîtes (Morency et Chapleau, 2003). Au lieu de calculer le nombre de carrés ou d'hexagones non vides, on dénombre le nombre de points contenus dans les anneaux. La difficulté par rapport aux autres types de comptage est qu'il faut réaliser la mesure en tout point (ou pixel) et en faire une moyenne. La résolution, ici, est donnée par l'intervalle entre les anneaux. Pour obtenir une estimation de la dimension fractale, il suffit d'appliquer le même principe que la dimension par comptage de boîtes carrées ou hexagonales, à savoir dans un espace bi logarithmique entre la résolution et le nombre de points moyens contenus dans les anneaux par résolution considérée. S'il s'agit d'une relation linéaire, la pente de la droite observée donne directement la dimension fractale.

4.2.4. De l'invariance d'échelle aux lois d'échelle généralisée - L'approche analytique

L'approche analytique généralisée de la dimension fractale est une grande nouveauté de la relativité d'échelle. Elle débute par la construction de fonctions dites scalantes et d'un opérateur différentiel de dilatation.

4.2.4.1. Fonction scalante

En première approche des lois d'échelle, il y a les fonctions scalantes qui s'obtiennent en trois étapes (Nottale, 2010).

- (1) Soit une dilatation ou une contraction q sur une variable de position X .

$$\begin{cases} X \rightarrow X' \\ X' = qX \end{cases}$$

On appelle fonction scalante f :

$$f(qX) = q^\alpha f(X)$$

- (2) On passe d'une résolution à une autre par la relation :

$$\begin{cases} \varepsilon \rightarrow \varepsilon' \\ \varepsilon' = \rho\varepsilon \end{cases}$$

Soit X une variable de position dépendant de la résolution. Alors

$$X(\rho\varepsilon) = \rho^{-\delta} X(\varepsilon)$$

où $D_F = 1 + \delta$

- (3) Généralement, la position dépend d'une autre fonction f (la vitesse par exemple)

$$f(\rho^{-\delta} X) = \rho^{-\delta\alpha} f(X)$$

où $D_F' = 1 + \delta\alpha$.

4.2.4.2. Opérateur différentiel de dilatation

Qui ne s'est pas demandé lorsqu'il utilise les fractales, pourquoi travaille-t-on avec le logarithme de la résolution, et pas directement sur la résolution ? La réponse à cette question tient en quelques lignes.

Conformément à la méthode dite de Gell-Mann-Levy, on définit une dilatation ou une contraction infinitésimale $d\rho$ de la résolution ε . (Figure 26).

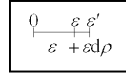


Figure 26. Schéma d'une dilatation infinitésimale

La résolution ε' s'écrit $\varepsilon' = \varepsilon(1 + d\rho)$ car $\varepsilon d\rho \rightarrow 0$. On sait que la longueur L est fonction de cette résolution, ce qui s'écrit $L(\varepsilon(1 + d\rho))$. Que vaut cette fonction ? Pour l'établir, on utilise un développement limité de Taylor, ce qui donne :

$$L(\varepsilon') = L[\varepsilon(1 + d\rho)] = L(\varepsilon) + (\varepsilon + \varepsilon d\rho - \varepsilon) \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(\varepsilon) + \varepsilon d\rho \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = L(\varepsilon) + \frac{\partial L(\varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} d\rho$$

Même si l'on s'est arrêté au premier ordre, on voit très bien que l'on ne travaille pas directement sur la résolution ε mais avec son logarithme.

On peut donc définir ce que l'on appelle un opérateur différentiel de dilatation $\check{D} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$. Cela revient à dire que l'on peut désormais utiliser $\ln \varepsilon$ comme variable naturelle des lois d'échelle (Nottale, 1994) avec toutes les conséquences mathématiques que cela implique c'est-à-dire que ε n'est pas définie en zéro et doit être positif.

4.2.4.3. L'invariance d'échelle démontrée analytiquement

Fort de cet opérateur différentiel de dilatation, comment se comporte une variation de la longueur en fonction du logarithme de sa résolution ? Pour y répondre, il faut reprendre la méthode exposée par Jean-Paul et Françoise Bertrandias (1997). On suppose que la courbe de la fonction L recherchée soit continue. Autrement dit,

$$\lim_{\Delta \ln \varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta \ln \varepsilon} = \frac{dL}{d \ln \varepsilon} = \beta(L)$$

Il faut alors noter que l'échelle de référence λ intervient si bien que l'on devrait plutôt écrire $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ à la place de ε , mais comme λ est une constante, lorsqu'on la dérive cette valeur devient nulle. Ainsi, pour alléger les calculs, on ne prend en considération que ε .

La première fonction $\beta(L)$ que nous pouvons tester grâce à un développement limité est a .

$$L = a \ln \varepsilon + L_0$$

La seconde fonction $\beta(L)$ que l'on peut tester grâce à un développement limité est aL .

$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = aL \iff L = L_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{-\delta} \text{ avec } -\delta = D - D_T$$

On retrouve bien l'équation fondamentale caractérisant l'invariance d'échelle. La dimension fractale est alors bien égale à :

$$\frac{d \ln L}{d \ln \varepsilon} = a = D_T - D.$$

4.2.4.4. L'apparition spontanée d'une zone de transition fractal - non fractal

Ensuite, on peut ajouter un terme b : $b + aL$.

$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = b + aL \iff L = L_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{-\delta} \right] \text{ avec } -\delta = D - D_T$$

Géométriquement, cette loi se traduit par une brisure spontanée de l'invariance d'échelle.

$$L \longrightarrow L' = L + L_1 = L_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{\tau} + L_1$$

L' correspond à une translation c'est-à-dire un changement de repère. Après quelques calculs, on trouve :

$$L' = L_1 \left[1 + \left(\frac{\lambda_1}{\varepsilon} \right)^{\tau} \right] \text{ avec } \tau = D - D_T$$

avec la nouvelle échelle de coupure définie telle que $\lambda_1 = \lambda \left(\frac{L_0}{L_1} \right)^{\frac{1}{\tau}}$. Toutefois, il est important de noter que, dans ce cas, la dimension fractale est toujours alors bien égale à :

$$\frac{d \ln L}{d \ln \varepsilon} = (D - D_T) \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{D - D_T}}$$

ce qui peut prêter à confusion avec l'invariance d'échelle.

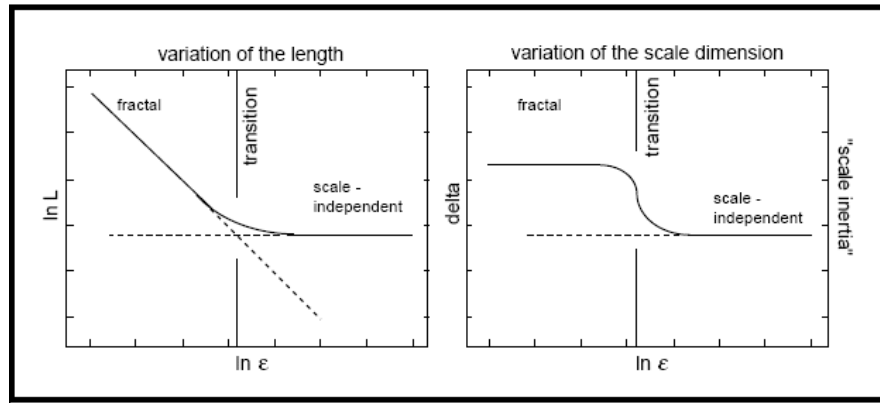


Figure 27. Le modèle à une transition fractal - non fractal (Nottale, 1993)

Le premier graphique montre la relation dans un espace bi logarithmique. On voit bien que contrairement au modèle sans transition la partie fractale ne se poursuit pas jusqu'à l'infini. A une certaine échelle, la fractalité est interrompue. Le second graphique montre la variation locale (ou la dérivée) de la dimension fractale

4.2.5. La dépendance d'échelle et la construction de lois d'échelle

Puis, vient le cas de $c + bL + aL^2$

$$\frac{dL}{d \ln \varepsilon} = b + aL \iff L = L_0 \frac{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{\tau} \right]}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^{\tau} \right]} \text{ avec } \begin{cases} a = -\frac{\tau L_0 L_1}{L_0 - L_1} \\ b = \tau \frac{L_0 + L_1}{L_0 - L_1} \\ c = -\frac{\tau}{L_0 - L_1} \end{cases}$$

La dimension fractale locale est donc égale, dans ce cas à :

$$\frac{d \ln L}{d \ln \varepsilon} = -\tau \varepsilon^{\tau} \frac{\varepsilon_1^{\tau} - \varepsilon_0^{\tau}}{(\varepsilon_0 \varepsilon_1)^{\tau} + \varepsilon^{\tau} (\varepsilon_1^{\tau} - \varepsilon_0^{\tau} - \varepsilon^2)}$$

Et ainsi de suite. Ce cas correspond en fait au calcul d'une dimension de boîtes avec ces deux échelles de coupure ε_0 et ε_1 (Lesne, 2004).

4.2.6. Les multifractales

Dans le cadre de la relativité d'échelle, les multifractales apparaissent comme étant des structures plus générales. En effet, jusqu'ici, on a toujours considéré les dimensions topologiques c'est-à-dire que l'on a toujours supposé que l'objet possédait une partie non fractale. Il n'est pas exclu que l'objet soit déjà fractal. Dans ce cas, si l'on reprend le modèle à une transition, on peut prétendre que L_0 soit lui-même fractal : $L_0 = \alpha \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D_1}$, d'où

$$L(\varepsilon) = \alpha \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D_1} \left[1 + \beta \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D_2} \right]$$

Cette équation est remarquable car elle prouve que l'on n'a pas besoin d'avoir recours à des méthodes de statistiques discrètes assez complexes (Dubois, 1995 ; OMT, 1995) pour étudier les multifractales d'un point de vue théorique.

4.2.7. La correction log-périodique

La correction log-périodique est un ajustement qui permet de rendre compte de certaines fluctuations que l'on peut observer autour d'une loi puissance, d'où le choix du terme « correction », même si, parfois, la « correction » est dominante. Il s'agit réellement de corriger la loi d'échelle initiale pour obtenir un meilleur ajustement. Cette correction est fondamentale car en fonction de la longueur d'onde de celle-ci, on peut risquer de mesurer la fluctuation, au lieu de mesurer la dimension fractale (Figure 28). Il en existe deux grandes versions : celle de Didier Sornette et celle de Laurent Nottale.

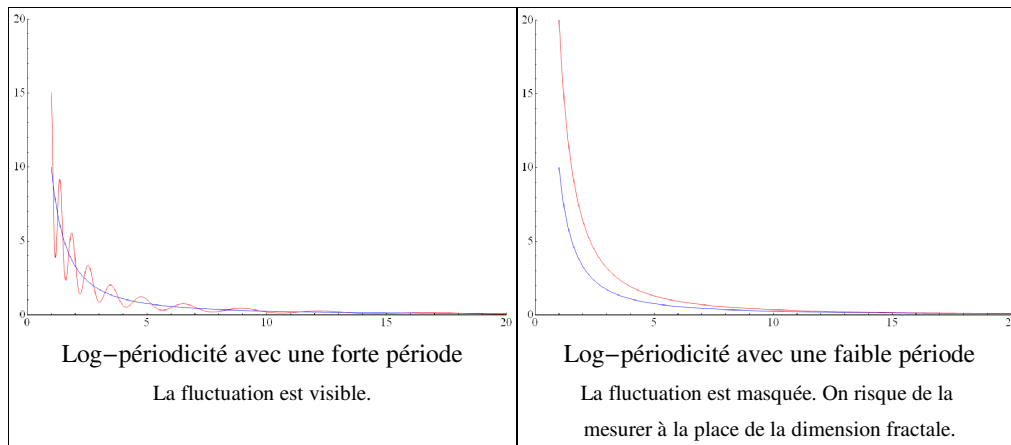


Figure 28. Fluctuation log-périodique et mesure de la dimension fractale

4.2.7.1. La version de Didier Sornette (1997)

Didier Sornette a essayé de modéliser l'oscillation observée en utilisant une dimension fractale complexe. Rappelons qu'un nombre complexe est un nombre z tel que $z = a + ib$, où a est appelé la partie réelle et ib la partie imaginaire avec $i^2 = -1$. Ainsi arrive-t-on à modéliser cette oscillation en utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes. En effet,

$$L = L_0 \varepsilon^{D'} = L_0 \varepsilon^{D + i\omega} = L_0 \varepsilon^D \varepsilon^{i\omega} = L_0 \varepsilon^D e^{i\omega \ln \varepsilon}$$

$$L = L_0 \varepsilon^D [\cos(\omega \ln \varepsilon) + i \sin(\omega \ln \varepsilon)]$$

où : D est la dimension fractale et ω est la phase de la fluctuation log-périodique.

La partie réelle est

$$\text{Re}(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^D \cos(\omega \ln \varepsilon)$$

Elle correspond à une fluctuation log-périodique. Il faut remarquer qu'il est très courant dans des sciences, comme la physique, d'utiliser les nombres complexes pour ensuite revenir aux nombres réels, ce qui, d'un point de vue analytique, est correct puisque les nombres complexes sont une « extension » des nombres réels. Cette partie réelle correspondant à une fluctuation log-périodique de l'invariance d'échelle.

4.2.7.2. La version de Laurent Nottale (1997)

Si l'on revient à la théorie de la relativité d'échelle, il faut trouver une équation différentielle d'échelle donnant cette fluctuation log-périodique. La démonstration est plus compliquée que celle de l'invariance d'échelle, mais elle aura pour effet de satisfaire au principe de covariance : la dépendance d'échelle log-périodique aura la même forme mathématique, mais plus sophistiquée, que la dépendance d'échelle puissance.

Pour obtenir une telle fluctuation, il faut reprendre l'équation :

$$\frac{dL(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DL(\varepsilon) = 0.$$

On généralise cette équation en supposant que le deuxième membre n'est plus égal à zéro :

$$\frac{dL(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DL(\varepsilon) = \chi(\varepsilon).$$

Cependant, en vertu du principe de covariance, on exige que $\chi(\varepsilon)$ corresponde à une équation différentielle de la même forme que l'équation initiale.

On obtient donc :

$$\frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - D\chi(\varepsilon) = 0$$

où $D' = D + i\omega$.

Toutefois, D' correspond à une dimension fractale complexe. Pour trouver $L(\varepsilon)$, il faut dériver par le logarithme de la résolution l'équation $\frac{dL(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DL(\varepsilon) = \chi(\varepsilon)$, ce qui donne :

$$\frac{d^2 L(\varepsilon)}{(d \ln \varepsilon)^2} - D \frac{dL(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = \frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon}.$$

Dans cette équation, on remplace $\frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon}$ par sa valeur $D'\chi(\varepsilon)$, ce qui correspond, finalement à une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 L(\varepsilon)}{(d \ln \varepsilon)^2} - (D + D') \frac{dL(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} + (DD')L(\varepsilon) = 0.$$

Cette équation se résout très facilement car elle correspond à un modèle d'équation différentielle connu dont la solution est :

$$L(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^D (1 + b \varepsilon^\delta)$$

où $\delta = i\omega$

En posant cette équation sous sa forme trigonométrique, on obtient :

$$L(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^D (1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)) + i(L_0 b \varepsilon^D \sin(\omega \ln \varepsilon)).$$

Dans cette équation, on exige, tout comme dans le paragraphe précédent, que la partie imaginaire soit négligeable, et on obtient la correction log-périodique dépendante d'échelle :

$$L(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^D (1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)).$$

Autrement dit, le simple fait d'avoir un « plus un » supplémentaire par rapport à la formule de Didier Sornette suffit à la transformer en une relation dépendante d'échelle et obtenir une équation plus pratique. De plus, le paramètre b conditionne la nature de la loi log-périodique : si b est inférieure à 1, il s'agit d'une véritable correction, ce qui n'est plus le cas, s'il est supérieur à 1.

4.2.8. L'idée de « dynamique d'échelles »

Jusqu'à présent, seuls les cas où la dimension fractale était constante c'est-à-dire déduite de sa définition mathématique :

$$D(\ln \varepsilon) = - \frac{d \ln L}{d \ln \varepsilon}.$$

La dynamique d'échelles consiste à « inverser » l'étude des variations : plutôt que d'étudier les variations du logarithme de la variable dépendant de l'échelle par rapport à celle du logarithme des résolutions, on considérera les variations de cette variable par rapport à celle de la dimension fractale qui devient une variable appelée « djinn » (Nottale, 2001) permettant de déduire la résolution. Autrement dit, la dimension fractale varie de manière continue à travers l'espace des échelles, et non plus de manière discontinue comme c'était le cas dans les paragraphes précédents. Afin de ne pas alourdir les notations mathématiques, le « djinn » sera appelé τ .

$$- \ln \varepsilon = \frac{d \ln L}{d \tau}.$$

Cette formule peut être comparée de manière analogique à l'expression de la vitesse dans les lois du mouvement : $v = \frac{dx}{dt}$ (v la vitesse ; x la position ; t le temps). La logarithme de la résolution est donc une « vitesse d'échelles ».

Toujours de manière analogique, on peut dire que $-\ln(\varepsilon)$ est une vitesse d'échelle, ce qui permet alors de créer une « accélération d'échelles » Γ :

$$\Gamma = \frac{d^2 \ln L}{(d\tau)^2}$$

où tout comme les lois de la dynamique, l'accélération serait liée à une « force d'échelle » et à une « masse d'échelle ».

$$F = m\Gamma$$

La « dynamique des échelles » est loin d'être aussi simpliste, comme cela sera montré dans les chapitres suivants. Aussi, avant de conclure ce chapitre, il faut revenir sur une notion fondamentale tant dans le domaine géographique que dans celui de la relativité d'échelle, celle « d'échelles de coupure ».

4.2.9. Les échelles de coupure

Dans les exemples précédents, des échelles de coupure peuvent être clairement définies. Elles sont au cœur de la relativité d'échelle. Il en existe deux sortes. La première renvoie à la limite physique de la méthode de calcul comme la dimension fractale de boîtes. En effet, une fois que la boîte devient trop grande par rapport à l'objet mesuré, un nombre constant apparaît : 1, de même, la boîte peut devenir trop petite et atteindre la taille d'un pixel physique par exemple, et un nombre maximum N_{max} apparaît. On a donc deux échelles de coupure : une minimale ε_{min} et une maximale ε_{max} .

Toutefois, un second type d'échelle de coupure peut être dégagé lorsqu'il existe des brisures de symétrie. Déterminer de manière précise ce type d'échelle de coupure est une nouveauté de la relativité d'échelle. Dans le cadre d'une même méthode de calcul, il se peut que l'on observe différente transition fractal - non fractal par exemple, ce qui permet d'identifier des niveaux d'organisation. Autrement dit, cibler les échelles de coupure est une stratégie très importante pour l'étude des formes en géographie.

En effet, l'échelle engendre la limite, ce qui règle la question de la taille. De ce fait, tant que l'on n'est pas à la bonne échelle, on ne peut pas percevoir la limite de l'objet géographique, donc de sa forme. « Le monde des géographes est avant tout un monde de formes... » résume André Dauphiné (2003, p. 148). Les échelles de coupure sont donc essentielles, car le projet scientifique de la géographie est d'expliquer les formes déployées de (ou sur) l'interface terrestre (Martin, 2004). Autrement dit, l'idée clé de la géographie est de prétendre que la position dans l'espace, au sens très général du terme, n'est pas neutre et qu'il a un sens, ce qui revient souvent à étudier le rapport entre le continu et le discontinu. Celui-ci est l'adage de toute science. La physique, par exemple, étudie les deux : une première approche est presque toujours discrète (discontinue) et une seconde est continue par l'établissement d'une fonction analytique. En géographie, l'étude des formes nécessite une approche par la limite des objets géographiques. Quelle est la limite d'une montagne, d'un bassin versant, d'une ville, *etc.* ? Cela signifie que la géographie étudie, avant tout et de manière essentiellement phénoménologique, les discontinuités spatiales, à savoir comment tel objet se différencie de tel autre ? (Brunet, 1968) Ces discontinuités peuvent généralement être identifiées par une approche multi-échelle qui permet de caractériser l'espace géographique.

4.3. Retour sur la nature de l'espace géographique

À la lumière des réflexions précédentes, il devient logique, voire trivial, de penser que l'espace géographique au sens large du terme est fractal. Ainsi, toute structure géographique d'origine naturelle et/ou anthropique est évidemment fractale, car son existence dépend de la résolution de l'espace considéré, mais toutes les études géographiques ne sont pas systématiquement fractales. Par exemple, une étude des acteurs ou de l'importance politique d'un objet ne l'est pas, du moins explicitement.

Nombreuses sont les études fractales en géographie humaine et en géographie physique, mais elles mènent généralement à des impasses, car beaucoup de ces études associent invariance d'échelle et autosimilarité (Moussa et Bocquillon, 1993 ; Batty et Longley, 1994 ; Frankhauser, 1994 ; Rodríguez-Iturbe et Rinaldo, 1997, *etc.*). Il est clair que si le monde était autosimilaire, toutes les structures spatiales l'organisant se répèteraient à l'infini, or il n'est pas nécessaire d'être un scientifique pour constater que la morphologie d'une ville, par exemple, ne ressemble pas à celle des continents à l'échelle terrestre. Le simple fait de changer de niveau et/ou de résolution transforme l'objet étudié. Autrement dit, un changement d'échelle n'est jamais neutre. Étudier cette ville à une résolution de 1 centimètre représente 40 kilomètres n'est pas la même étude morphologique qu'à l'échelle 1 centimètre représente 50 mètres. C'est une évidence, mais, dans les analyses, peu de géographes prennent en considération ce phénomène qui, pourtant, fut mis en évidence par Roger Brunet (1968, p. 77) et par Marie Piron (1993). L'échelle géographique n'est donc pas un simple rapport homothétique (Volvey, 2005). En effet, elle définit la limite physique des objets géographiques. À l'échelle continentale, une ville n'est qu'un cercle, mais si on zoome continûment de manière infinitésimale comme le suggère la relativité d'échelle, sur ce cercle à une échelle plus fine, peu à peu de nouvelles structures vont émerger (réseau urbain dans lequel est plongé cette ville, puis sa morphologie propre). Un lien peut donc être établi entre les limites des objets géographiques et leur échelle cartographique. Ce qui compte alors pour une étude géographique n'est donc pas de trouver une résolution plus fine mais de comprendre l'organisation en échelle de ces structures car changer d'échelle implique à la fois un gain et/ou une perte d'informations. Le niveau d'étude choisi est donc fondamental. Ce n'est pas un gadget. L'action (l'aménagement) menée à une échelle donnée peut donc se propager de manière positive dans d'autres niveaux, mais trop souvent de manière négative. Par exemple, à petite échelle l'aménagement du Rhône était une nécessité pour mieux contrôler les inondations saisonnières, mais à grande échelle, la construction des différents barrages a rendu le bilan sédimentaire de la Camargue négatif, ce qui fait qu'elle est condamnée à disparaître (Miossec, 1998). Il ne suffit pas de penser uniquement à l'échelle humaine pour résoudre un problème.

L'espace géographique au sens large du terme est donc un espace fractal. Il peut aussi être plongé dans un temps fractal, ce qui donne un espace-temps fractal. En réalité, il existe quatre couples possibles entre le temps et l'espace : (1) temps fractal - espace non fractal ; (2) temps fractal - espace fractal ; (3) temps non fractal - espace non fractal ; (4) temps non fractal - espace fractal. Ce qu'enseigne la relativité est que, si l'on voulait modéliser la réalité, il faudrait avoir une résolution infinie, or elle est malheureusement finie. Autrement dit, un modèle aussi sophistiqué soit-il est limité par sa résolution de référence. Il convient donc de comprendre comment passer d'une échelle grossière à une échelle plus fine, plutôt que de rechercher une échelle de référence absolue qui n'existe pas. Les échelles sont relatives, comme le temps et comme les longueurs. Il faut nécessairement étudier les lois qui organisent l'emboîtement du monde et dans le monde.

On peut donc dire que l'effet d'échelle en géographie n'est ni plus ni moins qu'une conséquence de la fractalité évidente des objets géographiques. Que l'on soit en géographie humaine ou que l'on soit en géographie physique, tout objet géographique que l'on cherche à caractériser *via* une analyse spatiale dépend de l'échelle de référence dans laquelle on caractérise l'objet. La quasi-totalité des variables de la géographie humaine sont elles-mêmes fractales. Par exemple, nombreux sont les travaux montrant que les indicateurs économiques comme le P.I.B. obéissent à des lois d'échelle. D'autres variables plus classiques comme la densité de population restent dépendantes de l'échelle. En géographie physique, la fractalité des montagnes, des cours d'eau, *etc.* est un peu mieux connue. Elles participent à l'explication de l'organisation hiérarchique spatiale du domaine concerné. Toutefois, dans les différentes approches menées en géographie humaine ou physique, la fractalité est souvent vue, à tort, comme une cause, ce qui conduit généralement à une impasse conceptuelle et une impossibilité de mise en pratique. On obtient alors des résultats idiographiques : « J'ai calculé la dimension fractale de telle montagne ou telle ville » par exemple. La première question d'un néophyte sur ce calcul serait « Et alors ? ». Le chercheur ne saurait quoi répondre. En relativité d'échelle, c'est très différent, d'une part parce que l'on ne calcule pas la dimension fractale, mais une dimension fractale, d'autre part parce que la fractalité devient une conséquence de la dépendance d'échelle, donc un support d'analyse fondamental qui permet de prendre en considération réellement la structuration d'un objet dans l'espace des échelles (ou des résolutions). L'analyse multi-scalaire prend alors un sens nouveau. Désormais, avec la relativité d'échelle, on pourra étudier l'emboîtement d'échelle d'un objet à travers plusieurs cartes d'échelles différentes - il en faudrait au moins une dizaine pour comprendre l'organisation scalaire. Ainsi, la géographie aura (enfin) une totale maîtrise de l'effet d'échelle et pourra beaucoup mieux l'appréhender.

Notes

[1] Dans cette thèse, l'expression « non autosimilaire » sera préférée à « autosimilarité statistique », car « non autosimilaire » semble plus parlant que « autosimilarité statistique ».

Partie 2. Morphométrie en géographie

5

L'analyse morphologique

L'objectif de ce chapitre est de rassembler diverses définitions connues autour de l'étude des formes en géographie afin d'en fonder une analyse morphologique généralisée. En effet, la géographie à travers la géomorphologie s'est très tôt penchée sur la morphométrie (Baulig, 1959), avant de l'oublier quelque peu. Avec l'apparition des théories de la complexité, un regain pour la morphométrie appliquée à différentes branches de la géographie tant humaine que physique, s'est fait jour.

5.1. La définition de l'analyse morphologique

Elle se décline en deux termes : morphologie et morphométrie.

5.1.1. Morphologie en géographie

La morphologie est l'étude des formes. Il existe différents types de morphologies en géographie (Brunet *et alii*, 1992, p. 338) : la morphologie terrestre (ou géomorphologie) (Derruau, 2001), la morphologie urbaine (Allain, 2005), la morphologie agraire, *etc.* Cela conduit à la recherche d'une analyse morphologique qui s'efforce « d'isoler [les] formes élémentaires, en commençant par les cas les plus simples, les plus homogènes » (Baulig, 1959, p. 396).

Alain Reynaud (1971) montra que l'on pouvait aborder la morphologie par quatre méthodes :

1. le type aristotélien (ou la primauté de la classification) ;
2. le type historisant (ou la primauté de la chronologie) ;
3. le type cartésien (ou la primauté de la causalité) ;
4. le type structuraliste (ou la primauté de la relation).

Ces quatre voies possibles ont toutes montré leur limite, car aucune d'elles n'a pris en compte le problème essentiel de l'échelle. La limite qui cristallise une forme possède systématiquement des gammes d'échelles d'existence (Martin, 2004). De plus, elles se sont systématiquement heurtées au problème que Jean Petitot (1998 ; 2004) avait appelé « l'obstruction galiléenne ». De ce fait, les formes ont toujours été étudiées en géographie à travers soit une analyse temporelle, soit une analyse spatiale. Toutefois, la mesure de morphologies en géographie a été très tôt envisagée.

5.1.2. Morphométrie en géographie

La morphométrie, dans son sens le plus général, correspond à l'étude et à l'analyse géométrique et/ou topologique d'un objet, d'une structure. Littéralement, la morphométrie renvoie à la mesure des formes. Il s'agit donc une branche particulière de la morphologie. Quelque part, la morphométrie est née de la nécessité des Hommes de cartographier leur planète. Son lien est par conséquent étroit avec la géométrie. Au fil des siècles, la morphométrie est devenue une annexe à de nombreuses disciplines académiques, en biologie, en minéralogie, en paléontologie, en géographie comme le montre Johnny Douvinet qui réalisa la dernière synthèse sur le sujet (Douvinet *et alii*, 2007). Elle se développa en fonction des configurations étudiées (espace ponctuel, réseau, surface et volume) ce qui permit la création d'un nombre impressionnant d'indices (Douvinet *et alii*, 2005) dans lesquels il faudrait remettre un peu d'ordre. Toutefois, comme le soulignait Henri Baulig, « la morphométrie [en géographie] peut rendre des services appréciables à condition qu'elle se propose des problèmes simples et bien définis » (1959, p. 394), du moins en première approche.

La morphométrie permet d'estimer quantitativement si un objet ressemble à un autre, ou au contraire, s'il s'en éloigne. Plusieurs approches sont possibles : l'approche indicielle, l'approche statistique, l'approche topologique, l'approche géométrique. Bien entendu, elles sont généralement combinées. De plus, on peut mener une analyse des formes soit en termes de dynamique, soit en termes de position. Autrement dit, on retrouve les deux variables du mouvement que sont les variables temporelles et spatiales.

5.2. L'analyse temporelle et spatiale des formes

Pour réaliser une analyse morphologique, on peut décomposer toute morphologie en morphostructure et en morphodynamique. La première étudie la stabilité ou la stationnarité des formes ; la seconde, leur instabilité ou leur non-stationnarité.

5.2.1. La stabilité et la stationnarité des formes

L'analyse morphologique est avant tout temporelle en géographie, et particulièrement en géomorphologie (Martin, 2004). Le déploiement d'une forme dans le temps explique sa répartition spatiale ou ses limites, mais dans de nombreux cas, la variable spatiale est tout aussi explicative que la variable temporelle. Par exemple, il est possible de définir une approche morphologique qui serait indépendante du temps, et une approche seulement spatiale. C'est ce que l'on appelle une approche stationnaire.

L'analyse temporelle des formes soulève deux questions. Comment et pourquoi une forme émerge-t-elle ? Comment et pourquoi une forme se maintient-elle un certain temps ? La première question renvoie la notion de morphogenèse. Le terme « morphogenèse » a été inventé par Goethe. Au sens strict, la morphogenèse correspond à l'apparition d'une forme du vivant. C'est d'ailleurs pour cela que le vocabulaire autour des formes correspond à de nombreux termes du vivant (naissance, développement, mort, *etc.*). En géomorphologie, par exemple, le cycle de William Morris Davis (1899) est clairement inscrit dans cette analogie : un relief naît, vit et meurt. Toutefois, Alain Reynaud (1971) montra qu'il s'agissait d'un anthropomorphisme extrêmement dangereux. En effet, pour lui, celui-ci est aberrant, car un mouvement tectonique ou une variation du niveau de la mer peuvent « rajeunir » le relief. En effet, la transformation d'une forme physique en une autre ne signifie pas qu'elle vieillit : ce n'est pas un être vivant. D'ailleurs, René Thom (1974) fit la même remarque, et ajouta que le terme « morphogenèse » devait reprendre un sens plus général d'apparition d'une forme (Thom, 1974, p. 252).

Dans le monde des formes, ce qu'il y a de surprenant est la persistance de celles-ci. René Thom (1974 ; 1991) a essayé de l'expliquer à travers sa théorie des formes prégnantes et des formes saillantes. Pour lui, une forme prégnante résiste au bruit, ou plus généralement au changement. Il s'agit donc d'une morphostructure stable, mais comment expliquer cette stabilité des formes, surtout qu'en géographie, elles sont constamment soumises à des éléments transformants, c'est-à-dire des agents ou des acteurs « poussant » au changement.

5.2.2. L'instabilité et la non-stationnarité des formes

Le changement est matérialisé par le concept de morphodynamique. Comme cela a été vu, elle renvoie d'abord à l'idée de stabilité structurelle (Thom, 1974 ; 1983). Toutefois, cette stabilité peut être apparente ; elle dépend une nouvelle fois du système de référence que l'on choisit. S'il s'agit d'un processus lent, voire très lent, les évolutions internes d'une forme seront difficilement perceptibles. Cependant, il existe des évolutions brutales, des discontinuités, des « catastrophes » au sens de René Thom qui peuvent faire émerger une nouvelle forme. Dans ce cas, la morphostructure devient instable et est source de nouveautés. La morphodynamique est donc un processus général au cœur des petits et des grands changements de configuration spatiale.

L'étude de ces morphostructures est au cœur de la géographie structurale de Gilles Ritchot et Gaétan Desmarais (2000). Dans ce cadre, une structure correspond à des « formes abstraites d'organisation, qui ne sont pas réductibles à leurs diverses réalisations matérielles. La géographie structurale relève d'une attitude rationaliste qui distingue soigneusement les objets de connaissance théoriquement construits des phénomènes empiriques accessibles à l'observation. Elle considère ainsi qu'il ne faut pas confondre les structures - qui sont des objets théoriques dont la réalité est rigoureusement démontrée - avec leurs manifestations tangibles. Les structures sont des morphologies abstraites qui émergent dynamiquement du substrat où elles s'incarnent. Elles conditionnent la stabilité et l'intelligibilité de leurs réalisations concrètes » (Desmarais et Ritchot, 2000, p. 11). Autrement dit, c'est la structure qui maintient la stabilité des formes géographiques.

Toutefois, une autre approche est possible : l'approche systémique qui conduit à s'interroger sur la fonction et sur l'organisation d'une morphostructure (Chorley et Kennedy, 1971 ; Coque, 1993). Une forme est-elle fonctionnelle, ou plus exactement participe-t-elle à l'organisation de la structure spatiale ? Ainsi, la morphofonction et la morphogénique garantiraient l'existence d'une morphostructure. Cela conduit à s'interroger sur l'utilité d'une forme, et à se placer dans une position utilitariste qui peut être dangereuse.

Cela étant, que l'analyse soit temporelle, ou qu'elle soit spatiale, on doit nécessairement définir une échelle d'observation pour chacune de ces variables. Comme cela a été montré dans la première partie, l'intérêt pour la question des échelles en géographie a été de nouveau porté par la question de l'agrégation « échelles et temporalités ». Les différents manuels ont signalé que les temps de la géographie tant physique qu'humaine avaient des échelles qui s'emboîtent aussi (Grataloup, 1996 ; Reynaud et Baudelle, 2004 ; Volvey, 2005), mais une question reste en suspens : celle correspondant à « échelles et spatialités ».

L'analyse multi-échelle transcende donc le temps et l'espace, mais également la géographie humaine et la géographie physique. Aussi, il est possible de mener différentes études de formes géographiques de manière multi-échelle (donc fractale), c'est-à-dire à la dépendance d'échelle plus ou moins forte des mesures d'un objet en fonction de sa résolution.

5.3. L'analyse morphologique et les échelles

Les formes apparaissent et disparaissent. La première partie de cette thèse a essayé de montrer les liens entre formes, limites et échelles : les formes apparaissent grâce à la perception d'une limite. Dans cette thèse, la position qui sera défendue est que l'émergence de ces limites est plus une question d'échelles qu'une question de mouvement. On peut appréhender cette idée à travers l'idée de fond et de forme (Huyghe, 1971). Si on prend l'exemple de l'apparition d'un nuage, cela correspond bien à l'émergence d'une structure « blanche » sur un fond bleu. Toutefois, cette affirmation n'est valable que si l'on se trouve à l'extérieur du nuage, mais si on est à l'intérieur du nuage, il est impossible de percevoir ces limites. Autrement dit, l'opposition fond-forme n'est qu'une question d'échelles. De manière plus subtile, la télédétection confirme à plus d'un titre cette idée. Pour détacher la structure bâtie d'une ville d'un fond multicolore, il faut nécessairement avoir une résolution très fine, car tant que le grain reste grossier, il est impossible d'isoler avec certitude les « pixels de la ville ». Il faut donc mesurer ces effets d'échelles à travers des dimensions fractales, par exemple.

De plus, il faut bien comprendre que la dimension fractale du fond n'est pas forcément la même que celle de la forme étudiée. Le lien entre fond et forme peut être, en première approximation étudiée à travers la comparaison de leurs dimensions fractales respectives. Ces dernières caractérisent l'espace des échelles au même titre que le temps caractérise le mouvement. Ce sont donc des indicateurs indispensables pour comprendre l'organisation en échelles du monde.

Pour conclure, on peut proposer un tableau de synthèse (Figure 29) expliquant ce qu'est la morphométrie en géographie générale. Jusqu'à présent, seule la catégorie du mouvement a été prise en considération. Cette thèse essaiera d'introduire une nouvelle catégorie : celle des échelles. Ainsi, morphologie et échelle peuvent être étroitement liées par une démarche quantitative. Comme cela a été montré dans le chapitre 4, tous les outils mathématiques existent pour comprendre et pour quantifier ce phénomène. Les chapitres suivants essayeront de l'illustrer.

Pour ce, différentes analyses multi-échelles en géomorphologie et en géographie urbaine vont être menées. Un premier chapitre permettra d'introduire une analyse purement spatiale d'un réseau hydrographique. Un second, un troisième et un quatrième chapitre feront de même avec une étude morphologique de villes. Toutes ces analyses présenteront une approche spatiale, l'approche temporelle, quant à elle, sera étudiée en troisième partie de cette thèse.

		Morphostructure	Morphodynamique
Mouvement	Temps	État stable	État instable
	Espace	État stationnaire	État non stationnaire
Échelle	Dimension fractale	État stable d'échelle	État instable d'échelle
	Logarithme de la longueur le long de la fractale	État stationnaire en échelle	État non stationnaire en échelle

Figure 29. Mouvement et échelle en morphométrie

6

L'analyse morphologique du réseau du bassin versant des Gardons

Roger Moussa et Claude Bocquillon (1993) ont étudié la fractalité du bassin versant du Gardon d'Anduze. Ils avaient calculé des dimensions fractales sur la forme du réseau hydrographique et sur celle du bassin versant. Cette étude va étendre l'analyse morphologique, en la généralisation *via* les méthodes de la relativité d'échelle, à l'ensemble des Gardons avec comme point aval limite le Pont de Ners.

6.1. Présentation des données

Les informations utilisées pour cette étude sont issues de la base de données gratuite I.G.N.©-CARTHAGE (CARTographie, THématique des AGences de l'eau et du ministère de l'Environnement), disponible sur le site : <http://services.sandre.eaufrance.fr/data/zonage/Hydrographie2007/>. Celui-ci fournit la cartographie du réseau hydrographique français sous un format MapInfo©MapInfo Corporation. Le système d'information géographique possède onze couches : `cours_d_eau.mif` ; `hydrographie_surfacique.mif` ; `hydrographie_texture.mif` ; `laisse.mif` ; `nœud_hydrographique.mif` ; `point_eau_isole.mif` ; `region_hydrographique.mif` ; `secteur.mif` ; `sous_secteur.mif` ; `troncon_hydrographique.mif` ; `zone_hydrographique.mif`.

La couche « `cours_d_eau` » fournit le tracé linéaire des cours d'eau principaux. Toutefois, les données ne sont pas complètes. Elles sont limitées « à l'ensemble des tronçons hydrographiques touchant la zone de livraison » (notice de Carthage). La couche « `troncon_hydrographique` » correspond à une décomposition des cours d'eau officiels en branches par rapport à la couche précédente, il s'agit d'ajouter de manière la plus exhaustive possible les cours d'eau intermittents et temporaires. La couche « `hydrographie_surfacique` » fournit la surface des cours d'eau principaux, ainsi que les différentes nappes d'eau libres terrestres.

La couche « `nœud_hydrographique` » correspond à une modification de l'écoulement. Elle permet de localiser les sources, les barrages, *etc.* La couche « `point_eau_isole` » situe les points d'eau non connectés aux réseaux hydrographiques (château d'eau, réservoir, *etc.*).

Les couches « `region_hydrographique` », « `secteur` », « `sous_secteur` » et « `zone_hydrographique` » correspondent au périmètre des bassins versants élémentaires en suivant un jeu d'emboîtement d'échelles.

La couche « `hydrographie_texture` » correspond à une « zone plate au drainage complexe dans laquelle circule un ensemble de portions de cours d'eau formant un entrelacs de bras d'égale importance » (notice de Carthage).

La couche « `laisse` » ne concerne que les littoraux maritimes. Elle fournit les limites des hautes et basses eaux.

6.1.1. Critique de la base CARTHAGE

Cette base de données est fort utile, car toutes les données connues sont censées être répertoriées. L'unique défaut qui apparaît de manière récurrente est un problème de connexion entre les différentes branches du réseau qui sont parfois mal connectées.

D'après la notice, l'unité de référence est le mètre et la projection associée est le Lambert II étendu, avec pour méridien d'origine le méridien de Paris. La véritable résolution de la base Carthage varie de 1 / 50 000 au minimum à 1 / 5 000 000 au maximum. Toutefois, l'échelle la plus fréquente reste l'échelle minimale de 1 / 50 000 (<http://www.observatoire-environnement.org/OBSERVATOIRE/acteur-donnee/donnees-ORE70.html>).

6.1.2. Extraction des données sur *Mathematica*©Wolfram

Pour mener une étude morphologique du réseau hydrographique des Gardons, la puissance et les possibilités de calculs de *MapInfo* sont insuffisantes. La réalisation d'une analyse spatiale plus avancée nécessite un outil informatique plus puissant ; le logiciel retenu est *Mathematica*.

C'est un logiciel de calcul formel qui possède son propre langage informatique. Il permet de travailler directement sur des matrices (images, tableau numérique, *etc.*). Il possède plus de 5 000 fonctions préréglées dans son langage ; les possibilités de modélisation y sont dès lors très importantes. À côté de ces 5 000 symboles courants, il existe ce que l'on appelle des « packages » qui sont des modules de calculs spécifiques à certains domaines mathématiques. Par exemple, il existe plusieurs modules de statistique. L'avantage de *Mathematica* qui peut aussi être perçu comme son plus grand défaut, est son absence de fioriture. À l'ouverture d'une nouvelle feuille de calcul s'affiche un écran blanc. Tout est à créer, à penser, à organiser. L'utilisateur doit écrire intégralement ses programmes. Le code étant un langage, on apprend à chaque utilisation de nouvelles fonctions. Ainsi, rapidement, on crée des petites routines informatiques que l'on peut injecter dans ces nouveaux programmes. On s'aperçoit alors que l'utilisation de logiciels tels que MapInfo et ArcGIS possèdent des « boîtes noires » relativement importante, ce qui n'est pas le cas avec *Mathematica* qui est donc un outil indispensable à l'analyse spatiale.

Toutefois, si *Mathematica* est capable de générer une centaine de sorties différentes (images, films, sons, tableau Excel, *etc.*), l'importation des données géoréférencées sur *Mathematica* est plus délicate. Pour le réseau hydrographique des Gardons, il fallut prendre le fichier `cours_d_eau.mif`. Ce fichier fournit le système de projection et décompose les différents objets vectoriels de la couche des données ainsi chaque cours d'eau est différencié. Un long travail de découpage des données sur Excel a été nécessaire pour individualiser les cours d'eau, car il faut maintenir l'ordre des objets du fichier `mif` puisque les noms des cours d'eau se trouvent dans un autre fichier (*.txt), mais l'ordre des noms suit celui des objets vectoriels. Après cette réorganisation des données, on peut les enregistrer sous un format *Mathematica* avec des accolades pour signaler les colonnes et les lignes de la matrice des vecteurs composants le cours d'eau. Malheureusement, les cours d'eau ne sont pas des branches au sens de la théorie des graphes. Il faut donc les découper à nouveau de façon à obtenir la portion d'un cours d'eau entre deux confluences. On peut pour cela utiliser *Mathematica* qui fournit une solution très simple avec la fonction `Union`. Autrement dit, le passage d'un format S.I.G. à *Mathematica* demande beaucoup de patience, mais les résultats obtenus au fil de ce texte montreront l'utilité de ce logiciel.

6.2. Cartographie

Grâce à la superposition d'une base des cartes numérisées au 1 / 25 000 de l'I.G.N. et CARTHAGE (couche « `cours_d_eau` »), on peut créer des cartes sur le bassin étudié.

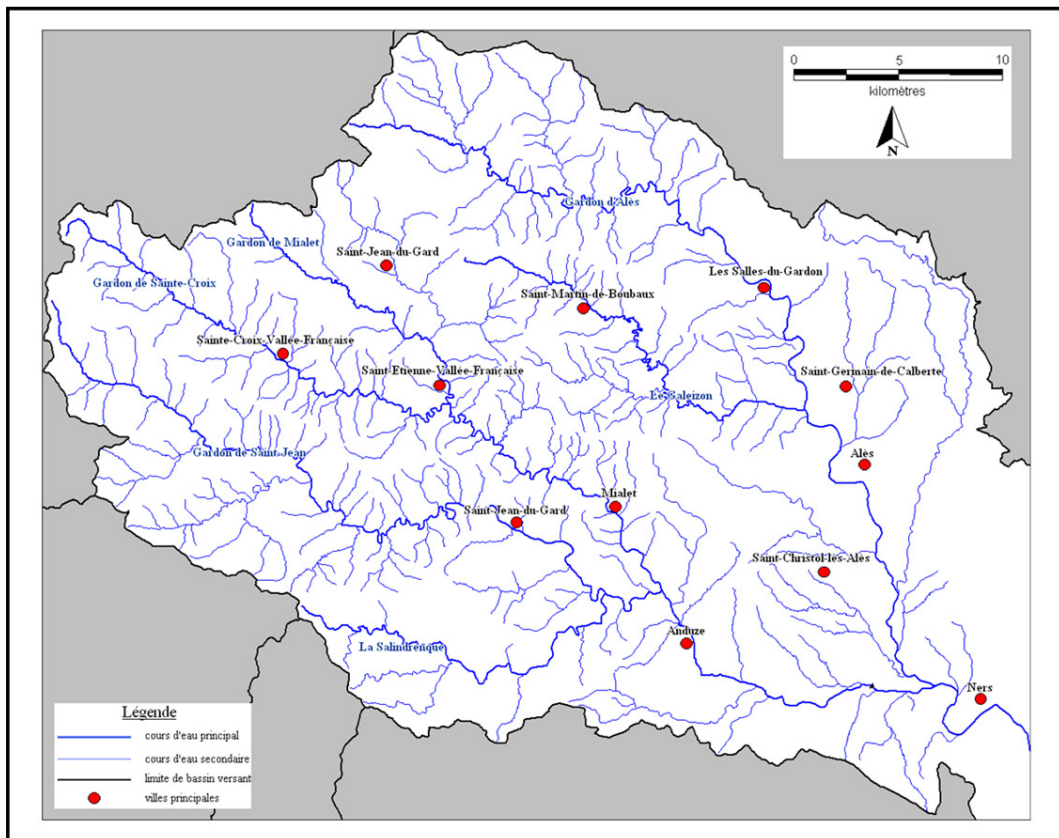


Figure 30. Réseau hydrographique des Gardons (des sources jusqu'au pont de Ners)

La Figure 30 présente le réseau hydrographique principal du bassin versant des Gardons étudié. Le réseau est composé de six cours d'eau principaux : la Salindrenque, le Gardon de Saint-Jean, le Gardon de Sainte-Croix, le Gardon de Mialet, le Galeizon et le Gardon d'Alès. Autour de ces drains, un réseau en arêtes de poisson se déploie. À côté de ce réseau principal, CARTHAGE possède également une couche avec tous les cours d'eau secondaires (troncon_hydrographique). Elle présente l'avantage d'être déjà pré-découpée en branches, son importation dans Mathematica a donc été plus simple. Pour des raisons pratiques, la première couche sera appelée RESEAU 1 et la seconde RESEAU 2. RESEAU 2 (1 694 branches) n'est autre qu'une densification de RESEAU 1 (618 branches). La possibilité d'une comparaison entre les deux réseaux apparaît donc très intéressante, mais avant il faut nécessairement rappeler quelques lois sur les arborescences déterministes afin de mieux comprendre une arborescence réelle.

6.3. Données générales sur les arborescences

Un réseau hydrographique est une arborescence particulière. Toutefois, il n'échappe pas à certaines règles mathématiques connues des arborescences qu'il faut rappeler.

6.3.1. Définition d'une arborescence

D'après la théorie des graphes, un arbre est un graphe non orienté, connexe et sans cycle (Labelle, 1981 ; Mathis, 2001 ; Mathis, 2003a ; Mathis, 2003b). Par contre, on appellera arborescence un graphe orienté, connexe et sans cycle. Un réseau hydrographique est évidemment une arborescence car l'écoulement est orienté. Pour faciliter l'assimilation, il n'est pas rare de transformer le vocabulaire classique de la théorie des graphes par une analogie avec la terminologie des « arbres naturels ». Ainsi, un sommet devient un nœud et un arc devient une branche. Rappelons qu'un arc est une relation orientée entre deux sommets. Dans le cas des arcs, la succession des sommets suit un ordre précis, dû à son orientation ; on parle alors de chemin. Dans le cas des arborescences, il est donc possible de connaître l'intégralité des chemins possibles.

6.3.2. Construire une arborescence

Une arborescence est une structure topologique très simple, mais dès qu'on la géométrise, c'est-à-dire que l'on en fait un graphe valué par des distances, elle devient une structure complexe où des contraintes d'optimalité jouent un rôle fondamental. Si l'on prend le cas d'écoulement d'un « arbre naturel » dans une coupe à deux dimensions, on s'aperçoit que la gravité contraint le développement des branches, ce qui fait que chaque branche $n + 1$ doit nécessairement être une réduction de la branche n . Sachant cela, la construction d'un arbre déterministe se limite à trois paramètres : le nombre de branches k , l'angle de référence entre ces branches α et le rapport de réduction $1/g$ (Figure 31). Etant donné qu'une connaissance de la position dans le plan est fondamentale, l'utilisation des nombres complexes est une nécessité car les formules sont considérablement simplifiées et beaucoup plus efficaces.

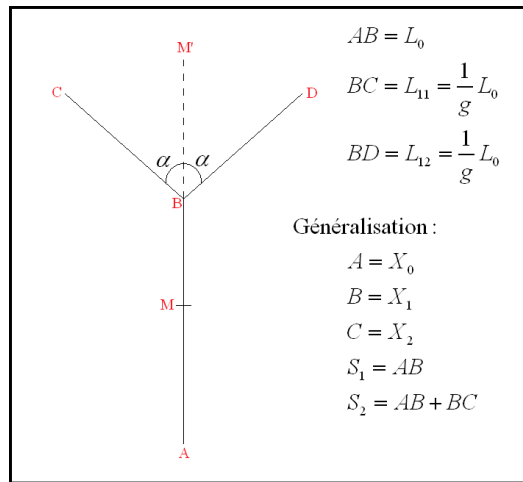


Figure 31. Embranchements élémentaires d'une arborescence déterministe pour $k = 2$

Avec cet exemple (Figure 31), on met en évidence la décomposition suivante.

- (1) Entre le vecteur \mathbf{AB} et \mathbf{AM} , il existe une homothétie telle que :

$$\mathbf{AM} = \frac{1}{g} \mathbf{AB}$$

Il existe également une relation de colinéarité entre \mathbf{AM} et $\mathbf{BM'}$, d'où $\mathbf{AM} = \mathbf{BM'}$, ce qui donne en écriture complexe :

$$z_{\mathbf{AM}} = \frac{1}{g} z_{\mathbf{AB}} = z_{\mathbf{BM'}}$$

- (2) Entre le vecteur $\mathbf{BM'}$ et le vecteur \mathbf{BC} , il existe une rotation de centre B et d'angle α :

$$z_{\mathbf{BC}} = e^{i\alpha} z_{\mathbf{BM'}}$$

(3) En combinant l'homothétie, la translation et la rotation, on obtient la formule directe :

$$z_{\mathbf{BC}} = \frac{1}{g} e^{i\alpha} z_{\mathbf{AB}}.$$

Cette formule est nécessaire, mais pas suffisante pour obtenir une arborescence. En effet, il faut tenir compte du niveau de la branche n et de la position de la nouvelle branche m . Dans notre cas binaire, si m est impair α sera positif et si m est pair, α sera négatif, ce qui donne la formule :

$$\begin{cases} z_{n+1, m'} = \frac{1}{g^n} e^{i\alpha} z_{n, m} & \text{avec } m' \text{ pair} \\ z_{n+1, m'+1} = \frac{1}{g^n} e^{i\alpha} z_{n, m} & \text{avec } m' + 1 \text{ impair} \end{cases}$$

Ensuite, on peut très facilement obtenir les coordonnées cartésiennes. Il suffit de poser : z_n comme étant le vecteur père et $z_{n+1, m}$ et $z_{n+1, m+1}$ ses vecteurs fils.

$$z_n = x + iy$$

$$z_{n+1} = X + iY$$

Après quelques calculs, on trouve que X et Y sont liés à x et y par :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{g} (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \\ Y = \frac{1}{g} (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{cases} \quad \text{si } m \text{ est pair}$$

ou

$$\begin{cases} X = \frac{1}{g} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ Y = \frac{1}{g} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \end{cases} \quad \text{si } m \text{ est impair}$$

Malheureusement, ces formules ne se généralisent pas facilement pour $k > 2$, mais il est possible de construire un algorithme informatique qui permet de trouver localement les vecteurs et de tracer l'arbre comme celui de la Figure 34. Pour obtenir une généralisation, il suffit de définir les branches de l'arbre par la base de numération, fournie par le nombre de branches (Mandelbrot, 1982 ; Mathis, 2001), tout comme la courbe de Helge van Koch (Nottale et Schneider, 1984).

6.3.3. Arborescence et base de numération

Les arbres ne peuvent être définis que par une base de numération incomplète. Toutefois, elle permet de savoir sur quelle branche on se trouve de manière extrêmement précise.

6.3.3.1. Le cas d'un double embranchement (base 2)

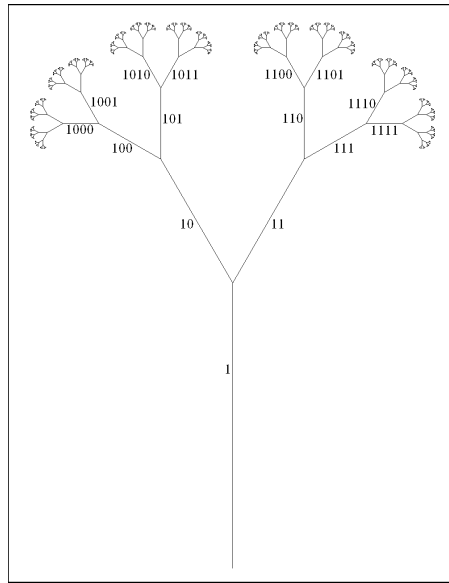


Figure 32. Arbre déterministe avec un générateur possédant deux embranchements

0	111	1110	10 101	11 010
1	1000	1111	10 110	11 011
10	1001	10 000	10 111	11 100
11	1010	10 001	11 000	11 101
100	1011	10 010	11 001	11 110
101	1100	10 011	11 100	11 111
110	1101	10 100	11 101	

Figure 33. Base 2 et arbre déterministe à deux branches

En gras : les nombres servant à se repérer sur l'arbre.

La base de numération est un outil pratique pour savoir précisément sur quelle branche on se situe. Pour ce, il suffit de décomposer le nombre, par exemple 10101, en deux. Le nombre le plus à droite (1) correspond à la position sur l'embranchement, celui de gauche est noté 0, celui de droite, 1. Pour 1010**1**, on est positionné sur la branche de droite. À partir de chiffre restant (1010), on peut remonter jusqu'à la mère, et ainsi décomposer le chemin sur l'arbre. La branche fille de 10101 est 1010, qui a pour branche fille 101, qui a pour branche fille 10, qui a branche fille 1, c'est-à-dire le tronc. Enfin, il faut savoir que cette décomposition engendre des pertes. La Figure 33 associée à la Figure 32, montre qu'un arbre auto similaire exprimé en base de numération 2 ne possède qu'une perte numérique : le 0.

6.3.3.2. Le cas d'un triple embranchement (base 3)

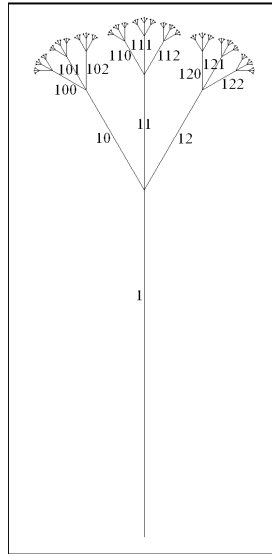


Figure 34. Arbre déterministe avec un générateur possédant trois embranchements

0	100	200	1000	1100	1200	2000	2100	2200
1	101	201	1001	1101	1201	2001	2101	2201
2	102	202	1002	1102	1202	2002	2102	2202
10	110	210	1010	1110	1210	2010	2110	2210
11	111	211	1011	1111	1211	2011	2111	2211
12	112	212	1012	1112	1212	2012	2112	2212
20	120	220	1020	1120	1220	2020	2120	2220
21	121	221	1021	1121	1221	2021	2121	2221
22	122	222	1022	1122	1222	2022	2122	2222

Figure 35. Base 3 et arbre déterministe à trois branches

En gras : les nombres servant à se repérer sur l'arbre

L'exemple de la base est utile pour comprendre le fait que l'on n'utilise pas tous les nombres d'une base de numération (Figure 34 et Figure 35), contrairement à la courbe de Helge van Koch (Nottale et Schneider, 1984). La perte initiale du 0 et du 2 signifie que seuls les nombres commençant par 1 sont nécessaires pour comptabiliser les branches.

De plus, à partir du nombre de niveaux, on peut connaître le nombre total de branches N .

$$N = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$$

Cette suite converge. D'où

$$N = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Bien entendu, on pouvait également le faire avec l'arbre possédant deux embranchements. Dans ce cas, $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

6.3.4. Arbre et log-périodicité

Un arbre est une structure log-périodique par excellence, car il combine un cycle de longueurs avec un facteur de réduction. On obtient alors quelques formules très intéressantes pour étudier la morphologie d'une structure arborescente (Nottale *et alii*, 2000).

6.3.4.1. Relations entre la longueur des branches et le niveau

Le nombre de branche N_n d'un niveau n vaut :

$$N_n = k^n$$

Autrement dit, le niveau correspond à

$$n = \frac{\ln N_n}{\ln k}$$

D'après la Figure 31, on définit X_n la position d'un nœud, $L_n = X_{n+1} - X_n$ correspondant à la distance entre deux nœuds contigus et $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ la longueur totale de X_0 à X_n .

On définit le rapport g de la manière suivante :

$$g = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_{n+2} - X_{n+1}} = \frac{L_n}{L_{n-1}}.$$

La longueur L_n de chacune des branches d'un même niveau n vaut :

$$L_n = \frac{1}{g^n} L_0$$

ce qui signifie que g vaut :

$$\ln g = \frac{\ln\left(\frac{L_0}{L_n}\right)}{\ln N_n} \times \ln k$$

c'est-à-dire

$$g = k^{\ln\left(\frac{L_0}{L_n}\right) / \ln N_n} = k^D \text{ où } D = 2$$

6.3.4.2. Étude de la longueur d'un chemin - Longueur critique

La longueur d'un chemin amont-aval est appelée longueur totale S_n .

$$S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1} = L_0 \left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots + \frac{1}{g^{n-1}} \right)$$

Cette somme est égale à $L_0 \frac{\left(\frac{1}{g}\right)^n - 1}{\frac{1}{g} - 1} = L_0 \left(\frac{g}{g-1} \right) (1 - g^{-n})$.

■ Cas infini : la longueur critique L_C

A l'infini, le terme $\left(\frac{1}{g}\right)^n$ tend vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{g}\right)^n = 0^+$$

La longueur totale converge donc à l'infini en une valeur appelée longueur critique $L_C = X_C - X_0$.

$$L_C = L_0 \left(\frac{g}{g-1} \right)$$

■ Cas fini : la longueur totale S_n

Dans le cas fini, la longueur totale est donnée par l'équation suivante :

$$S_n = L_0 \left(\frac{g}{g-1} \right) (1 - g^{-n}) = L_C (1 - g^{-n})$$

or, comme $L_C = X_C - X_0$ et $L_C - S_n = X_C - X_n$,

$$X_C - X_n = g^{-n}(X_C - X_0)$$

c'est-à-dire

$$X_n = g^{-n}(X_0 - X_C) + X_C$$

ou encore

$$\frac{L_n - L_C}{L_0 - L_C} = g^{-n}$$

6.3.4.3. Longueur totale d'une arborescence et nombre de branches

■ Nombre total de branches

Le nombre total de branches d'un arbre déterministe fini est très simple à calculer.

$$N_{\text{TOT}_{A_n}} = \sum_{i=0}^n k^i = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \text{ avec } k \geq 2$$

Il faut remarquer que, dans le cas le plus simple où $k = 2$, le nombre total de branche vaut $2^{n+1} - 1$.

Il faut noter que dans le cas idéal où n tend vers l'infini, ce nombre tend également vers l'infini.

■ Longueur totale de l'arborescence et longueur totale par niveau

La longueur totale de l'arborescence $L_{\text{TOT}_{A_n}}$ correspond à la somme des longueurs par niveau.

$$L_{\text{TOT}_{A_n}} = L_{\text{TOT}_0} + L_{\text{TOT}_1} + \dots + L_{\text{TOT}_n}$$

On peut alors étudier la longueur totale par niveau en posant B_n , le nombre de branches par niveau (cf. l'étude de la courbe de Helge van Koch du chapitre 4).

$$L_{\text{TOT}_0} = L_0$$

$$L_{\text{TOT}_1} = B_1 L_1 = \frac{B_1}{g} L_0$$

$$L_{\text{TOT}_2} = B_2 L_2 = \frac{B_2}{g^2} L_0$$

...

$$L_{\text{TOT}_{n-1}} = B_{n-1} L_{n-1} = \frac{B_{n-1}}{g^{n-1}} L_0$$

Dès lors, la longueur totale de l'arborescence peut s'exprimer simplement.

$$L_{\text{TOT}_{A_n}} = L_0 + \frac{B_1}{g} L_0 + \frac{B_2}{g^2} L_0 + \dots + \frac{B_{n-1}}{g^{n-1}} L_0 = L_0 \left(1 + \frac{B_1}{g} + \frac{B_2}{g^2} + \dots + \frac{B_{n-1}}{g^{n-1}} \right)$$

Il faut remarquer que si $B = g$ alors $L_0 = L_{\text{TOT}_1} = \dots = L_{\text{TOT}_{n-1}}$. Autrement dit, la somme des longueurs par niveau est égale à la longueur du tronc L_0 .

Dans le cas déterministe, le nombre de branches par niveau suit une relation exponentielle de base k . D'où,

$$L_{\text{TOT}_{A_n}} = L_0 \left(1 + \frac{k}{g} + \frac{k^2}{g^2} + \dots + \frac{k^{n-1}}{g^{n-1}} \right) = L_0 \frac{\left(\frac{k}{g} \right)^n - 1}{\frac{k}{g} - 1}$$

On peut alors déterminer une longueur critique totale telle que :

$$L_{TOTC} = L_0 \left(\frac{g}{g-1} \right)$$

- Niveau, longueur totale par niveau et facteur d'échelle $1/g$

La longueur totale par niveau permet de calculer le facteur d'échelle par niveau.

$$g_n = \left(L_0 \frac{B_n}{L_{TOT_n}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Cette formule d'estimer la valeur de g par la moyenne de toutes les valeurs g_n , \bar{g} .

À partir de là, on peut estimer la longueur critique d'une arborescence par \bar{L}_C telle que :

$$\bar{L}_C = L_0 \left(\frac{\bar{g}}{\bar{g}-1} \right)$$

6.3.5. Arbre et fractalité

La courbe de Helge van Koch sert de modèle de référence pour comprendre et étudier la fractalité d'un arbre.

Soit $g > 1$, alors la longueur d'une branche d'un niveau $L_n = \frac{L_0}{g^n}$ et le nombre de branche de ce niveau $N_n = k^n$. Pour un arbre déterministe, cela signifie que la longueur totale d'un niveau n vaut :

$$L_{TOT_n} = N_n L_n = k^n \frac{L_0}{g^n}$$

Or, on sait que le nombre de branches k est lié au facteur d'échelle g par : $k = g^{D_F}$, d'où

$$L_{TOT_n} = L_0 g^{-n} g^{n D_F} = L_0 g^{-n} g^{n \frac{\ln k}{\ln g}} = L_0 \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{\ln k}{\ln g} - 1} \text{ avec une résolution } \varepsilon_n = g^n.$$

De plus, $k = g^2$ où le 2 correspond à la dimension topologique. Autrement dit, D_F est une vraie dimension fractale puisqu'elle est définie à la limite de l'arbre (Mandelbrot, 1977). Cela signifie que, pour un arbre, la dimension fractale est égale à la dimension topologique, s'il se déploie dans le plan, sa dimension fractale vaut donc 2.

On peut alors estimer une fractalité locale telle que :

$$D_n = \frac{\ln k}{\ln g_n}$$

or k est inconnue. On peut alors utiliser B_n comme estimateur.

$$\bar{D}_n = \frac{\ln B_n}{\ln g_n}$$

6.4. Caractéristiques fractales et non fractales de l'arborescence d'un réseau hydrographique

Très tôt, les particularités de la géométrie des réseaux hydrographiques ont été perçues par Léonard de Vinci (1949) ou Cecil Murray (1927). Toutefois, ce fut Benoît Mandelbrot (1977 ; 1982) qui montra que cette géométrie appartenait à la géométrie fractale.

6.4.1. La « loi » de Léonard de Vinci

Léonard de Vinci avait remarqué que « toutes les branches d'arbres, à quelque degré de leur hauteur qu'on le réunisse, sont égales à la grosseur du tronc. Toutes les ramifications des eaux, douées d'un mouvement égal, à chaque degré de leur longueur égalent la grosseur du fleuve, leur père » (*in Nottale et alii*, 2000, p. 185). De ce constat, Léonard de Vinci (1949) établit une « loi » unissant le rayon r d'un cours (la distance moyenne entre deux berges) et le nombre moyen d'embranchements k (en règle général, pour les cours d'eau, il y en a deux). Elle s'exprime de la manière suivante :

$$kr_{n+1}^2 = r_n^2$$

c'est-à-dire

$$k = \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^2$$

ce qui correspond si $k = 2$ et l'angle α entre r_1 et r_2 vaut $\frac{\pi}{2}$ au théorème de Pythagore.

À cette condition, si l'on pose une condition d'autosimilarité, une autre loi apparaît entre le rayon r d'un cours d'eau et la longueur du cours L (la distance entre deux confluences). Le rapport entre le rayon père et le rayon fils est alors constant ; il en va de même pour le rapport entre la longueur mère et la longueur fille. Ainsi, l'égalité suivante entre ces rapports devient évidente.

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = g$$

or

$$k = \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^2$$

d'où la relation entre le nombre d'embranchements et la longueur d'un cours d'eau :

$$g^2 = k$$

Benoît Mandelbrot (1977 ; 1982) montra que l'exposant 2 était une dimension fractale d'un arbre déterministe. Ainsi, on retrouve d'une autre manière les formules précédentes. Cependant, l'arbre que consiste un réseau hydrographique n'est pas autosimilaire pour deux raisons : la première vient du fait que le nombre de branches par niveau ne suit pas systématiquement une loi puissance ; la seconde est que deux longueurs entre deux confluences ne possèdent pas forcément un facteur d'échelle (agrandissement ou réduction) constant. À travers différentes analyses appliquées sur le réseau hydrographique des Gardons, cette partie va essayer de mettre en lumière les caractéristiques fractales et non fractales d'une structure non autosimilaire.

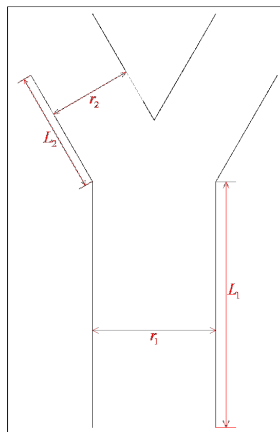


Figure 36. Rapport entre le rayon et la longueur des branches d'un arbre

6.4.2. La loi de Cecil Murray

Pour Cecil D. Murray (1927), les branches de niveau $n + 1$ ont plus de place pour le passage d'un fluide que la branche n qui les alimente. On appelle les rayons des deux branches de niveau $n + 1$, d_1 et d_2 et le rayon de la branche mère n , d_0 . Pour lui, d'après la loi de Poiseuille, on peut écrire :

$$d_0^3 = d_1^3 + d_2^3$$

Autrement dit, les facteurs de la loi sont une base, $k = 2$, et une dimension fractale, $D = 3$. Le rapport d'échelle g vaut alors 1,260. Cette loi permet d'optimiser le flux dans un arbre par rapport à sa résistance (Murray, 1927 ; Mandelbrot, 1982 ; Bejan et Lorente, 2004). Cette valeur de g est donc fondamentale, si l'arborescence possède une base 2.

6.4.3. Les méthodes de mise en arborescence du réseau

D'après le point précédent, les liens entre arborescence et fractalité sont étroits, mais il existe au moins deux façons de construire un arbre : la méthode ascendante que l'on appellera classification hiérarchique ascendante des confluences et la méthode descendante qui correspond à celle de Robert Elmer Horton. Toutes les deux permettent de mesurer des dimensions fractales « internes » au réseau hydrographique. Toutefois, avant de calculer ces dimensions, il est bon de calculer une dimension fractale « externe » *via* la méthode par comptage de boîtes carrées qui servira de référence. En effet, estimer la dimension fractale est ce qu'il y a de plus facile pour les arborescences non autosimilaires. Le nombre de branches k est souvent égal à 2 pour un réseau hydrographique. À partir de là, on peut déduire le facteur d'échelle g , et ainsi peut-être retrouver la formule fondamentale :

$$g^D = k.$$

6.4.3.1. Le calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau

Il faut commencer par estimer le paramètre le plus simple : la dimension fractale sur le RESEAU 1 et le RESEAU 2. La Figure 37 est une figure classique que l'on obtient lorsque l'on mesure la dimension fractale d'un réseau hydrographique par comptage de boîtes carrées (Rodriguez-Iturbe et Rinaldo, 1997 ; Fardin *et alii*, 2001). Toutefois, la plupart des auteurs n'ont pas compris la signification profonde de ce graphique. En effet, beaucoup l'ont interprété (Tarboton *et alii*, 1988 ; La Barbera et Rosso, 1989 ; Rosso et Bacchi, La Barbera, 1991 ; Garcia-Ruiz et Otálara, 1992) comme se partageant en deux dimensions fractales que l'on pouvait combiner (La Barbera et Rosso, 1989 ; Rosso *et alii*, 1991 ; Quadros Da Silveira, 2006). En réalité, la relativité d'échelle montre qu'il s'agit ici d'un régime fractal - non fractal à une transition (cf. chapitre 4). En effet, si l'on prend l'exemple de la Figure 37, le premier domaine possède une dimension fractale valant $1,007 \pm 0,007$ c'est-à-dire $D_F = 1$, donc il s'agit de la dimension topologique de l'objet ; dans cette zone, il est non fractal. De ce fait, ce graphique montre qu'un objet « réel » n'est jamais totalement fractal : il l'est potentiellement (ici entre $\ln \varepsilon = 6,4$ et $\ln \varepsilon = 10,4$). La valeur qui met un terme au domaine non fractal et qui débute le domaine fractal (ici $\ln \varepsilon = 6,4$), correspond à une échelle de coupure. Pour les modèles fractal - non fractal à une transition, en deçà de cette échelle, l'objet est fractal, au-delà, il ne l'est plus.

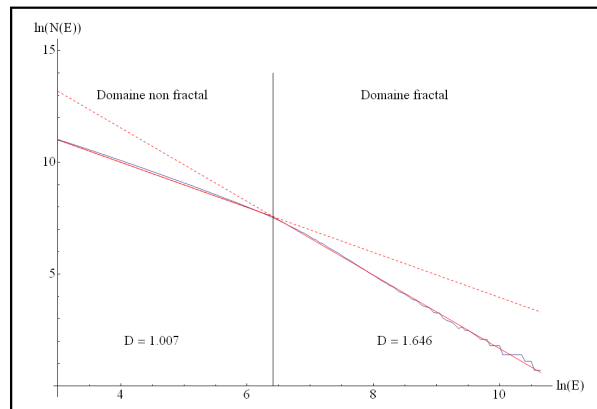


Figure 37. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du RESEAU 1

E : la résolution en mètre ; $N(E)$: le nombre de boîtes.

L'échelle de coupure entre la transition fractal - non fractal vaut 609 m.

L'étendue de l'objet est de 42 200 m.

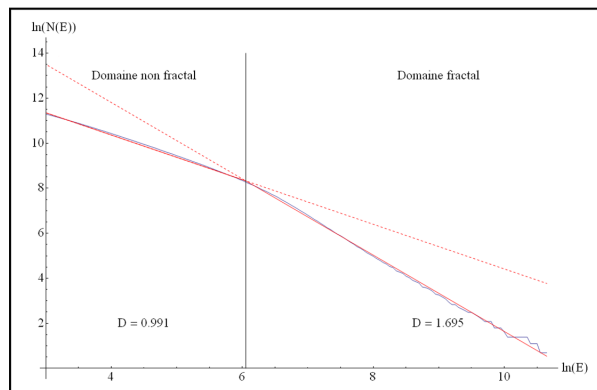


Figure 38. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du RESEAU 2

E : la résolution en mètre ; $N(E)$: le nombre de boîtes.

L'échelle de coupure entre la transition fractal - non fractal vaut 425 m.

L'étendue de l'objet est de 42 200 m.

Sur la Figure 37 et la Figure 38, les deux régimes apparaissent clairement et indiquent des valeurs très proches $1,007 \pm 0,007$ et $0,991 \pm 0,008$ pour le domaine non fractal, et $1,646 \pm 0,010$ et $1,695 \pm 0,010$ pour le domaine fractal. Ces résultats peuvent être surprenants, car on aurait pu penser que le RESEAU 2, de par sa plus grande précision, admettrait une structure fractale strictement invariante d'échelle, mais ce n'est pas le cas. On observe des dimensions fractales ayant des ordres de grandeurs comparables. La seule variable qui change est l'échelle de coupure : 609 m pour le RESEAU 1, et 425 m pour le RESEAU 2. Ces échelles sont donc fondamentales. En effet, elles peuvent s'interpréter comme une mesure de la qualité de l'information géographique contenue dans chacune des couches S.I.G. Ainsi, la multiplication par un facteur trois des drains entre le RESEAU 1 et le RESEAU 2 améliore l'information géographique, mais ne change rien à la structure en échelles observée.

De plus, chaque classement des branches du réseau hydrographique des Gardons permet le calcul d'une dimension fractale « interne ».

6.4.3.2. La méthode hortonienne

La classification actuelle dite de Horton qui est en fait celle d'Arthur N. Stralher (1954a ; 1954b ; 1957) et de Stanley A. Schumm (1956), suit un ordre descendant. Les sources (ou lieux d'écoulement concentré initial) sont les points de départ ; elles sont numérotés 1. L'algorithme est le suivant : chaque fois que deux affluents de même ordre n se connectent leur confluent passera à l'ordre $n + 1$, mais si deux affluents d'ordre différent (n, m avec $m > n$) se connectent alors leur confluent prendra l'ordre le plus élevé des affluents c'est-à-dire m . En règle générale, cette arborescence comporte peu de niveaux. C'est le cas du réseau des Gardons.

■ Classification de Horton-Schumm-Strahler

En hydrologie, il existe déjà des indicateurs pour mesurer le rapport d'échelle $1/g$. On peut d'abord estimer un rapport de longueur (RL) de Stanley Schumm (1956) repris par Arthur Stralher en 1957. Il correspond au rapport entre la moyenne des longueurs du niveau $n + 1$ et la moyenne des longueurs du niveau n . Ensuite, le rapport de confluence (RC) de Robert Elmer Horton (1945) est calculé comme étant le rapport entre le nombre de branches n et le nombre de branches $n + 1$.

$$RL_n = \frac{L_{TOT_n}}{B_n} \times \frac{B_{n+1}}{L_{TOT_{n+1}}}$$

$$RC_n = \frac{B_n}{B_{n+1}}$$

■ Analyse de Horton et dimension fractale

L'étude approfondie des rapports R_L et R_C permet de calculer une dimension fractale « interne » au réseau hydrographique des Gardons.

■ Étude du RESEAU 1

La Figure 39 montre une ordination de Horton à cinq ordres. Pour obtenir la dimension fractale, il suffit de s'aider de la Figure 40. Si on linéarise les données en passant en logarithme et que l'on met la longueur moyenne en fonction de l'effectif, la pente de cette droite donne une approximation de la dimension fractale. Autrement dit, l'effectif joue ici le rôle d'une résolution (Mandelbrot, 1977 ; Mandelbrot, 1982 ; La Barbara et Rosso, 1989 ; Garcia-Ruiz et Otálora, 1992 ; Prusinkiewicz et Hammel, 1993 ; Tarboton, 1996 ; Rodríguez-Iturbe et Rinaldo, 1997, p. 127 ; Sagar *et alii*, 1998 ; Dodds et Rothman, 1999 ; Dodds et Rothman, 2000).

$$N = N_0 \left(\frac{\langle L_0 \rangle}{\langle L \rangle} \right)^D$$

soit :

$$\ln N = \ln N_0 + D \ln \left(\frac{\langle L_0 \rangle}{\langle L \rangle} \right)$$

La pente locale vaut alors :

$$\Delta = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln \langle L_1 \rangle - \ln \langle L_2 \rangle} = \frac{\ln \left(\frac{N_1}{N_2} \right)}{\ln \left(\frac{\langle L_1 \rangle}{\langle L_2 \rangle} \right)} = \frac{-\ln \left(\frac{N_2}{N_1} \right)}{\ln \left(\frac{\langle L_1 \rangle}{\langle L_2 \rangle} \right)} = - \frac{\ln R_C}{\ln R_L} = D$$

où R_L n'est autre que le rapport de longueur de Schumm R_L et R_C le rapport de confluence R_C de Horton. Ici, D_T vaut bien évidemment 1. Le *ratio* $-\frac{\ln R_C}{\ln R_L}$ donne une approximation de la dimension fractale. Pour le réseau pérenne, sa valeur est de $D_1 = 1,683 \pm 0,561$.

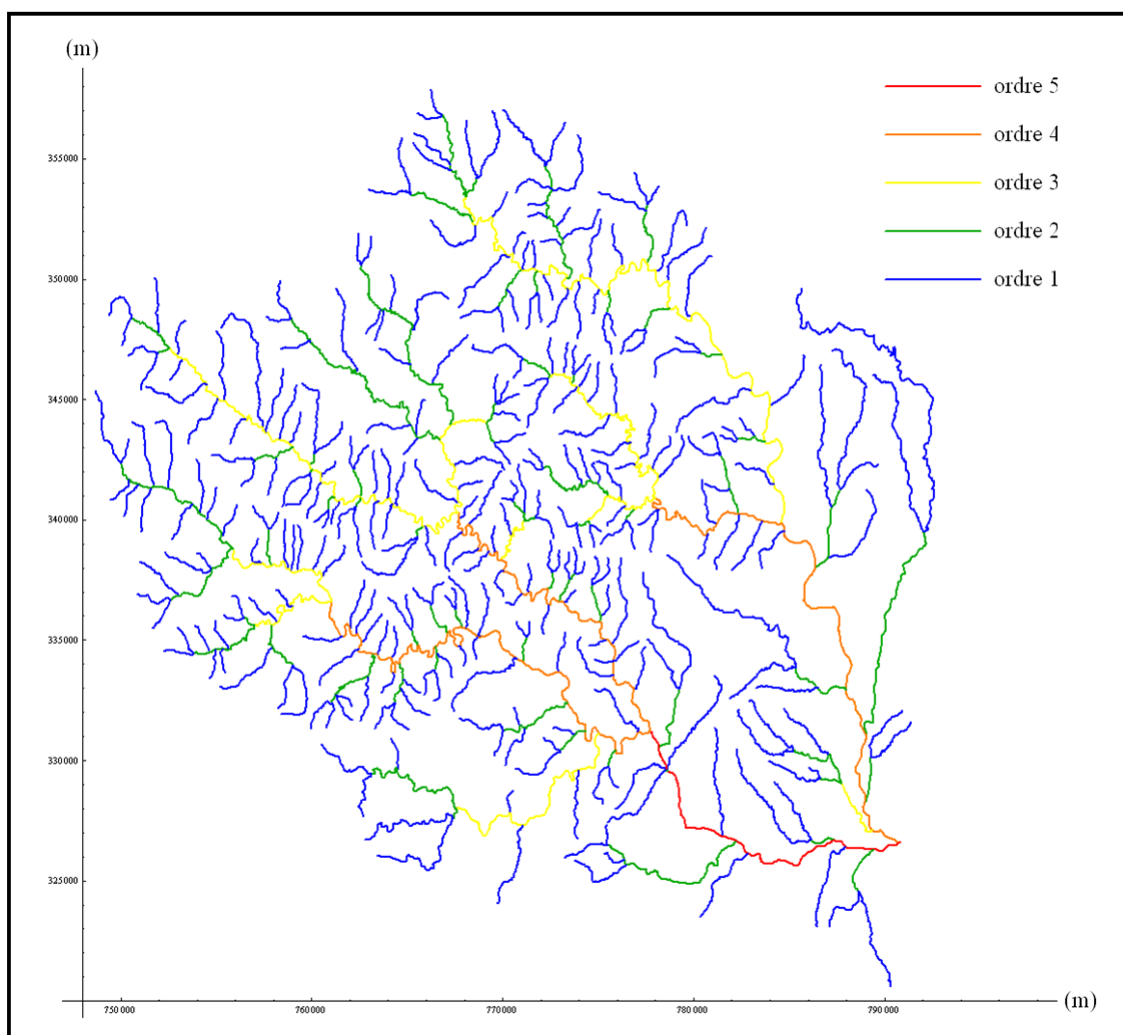


Figure 39. Classification de Horton appliquée aux Gardons

Ordre	Effectif	Longueur moyenne des drains de l'ordre (m)
1	308	$2\,002,43 \pm 107,60$
2	66	$3\,040,95 \pm 447,70$
3	10	$14\,684,20 \pm 4\,116,59$
4	3	$35\,538,20 \pm 10\,362,22$
5	1	12 746,40

Figure 40. Relation entre l'ordre, l'effectif et la longueur

■ Étude du RESEAU 2

La Figure 41 montre une ordination de Horton à six ordres. Le simple fait d'avoir ajouté à peu près 1 000 branches n'a introduit qu'un seul ordre. On calcule la dimension fractale de la même manière (Figure 42) et on obtient une valeur de $D_2 = 1,831 \pm 0,301$ pour le réseau « complet ».

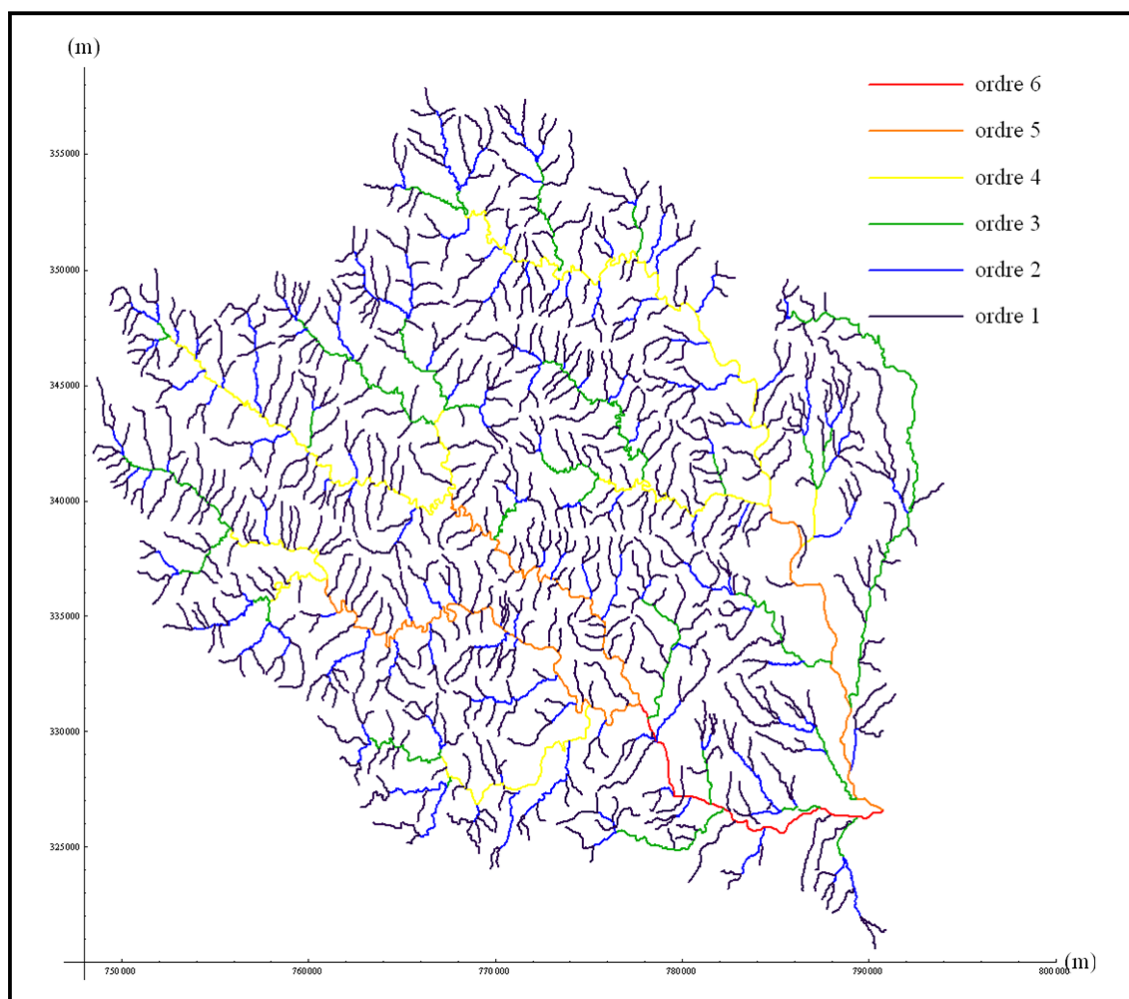


Figure 41. Classification de Horton appliquée aux Gardons

Ordre	Effectif	Longueur moyenne des drains de l'ordre (m)
1	661	1 343,95 \pm 41,45
2	147	1 947,99 \pm 137,47
3	32	5 165,49 \pm 941,15
4	8	17 227,10 \pm 5 368,14
5	3	27 777,10 \pm 9 684,01
6	1	17 575,50

Figure 42. Relation entre l'ordre, l'effectif et la longueur

■ Comparaison entre D_1 et D_2

Les valeurs de D_1 et D_2 possèdent des erreurs statistiques très élevées. Cela s'explique par le fait que les branches d'ordre 5 pour D_1 et les branches d'ordre 6 pour D_2 ne sont pas complètes, en terme de longueur, car la branche s'étend au-delà du Pont de Ners. Le plus simple est de les éliminer de la distribution. Ce faisant, l'amélioration des écarts-types est notable : pour $D_1 = 1,492 \pm 0,199$ et $D_2 = 1,620 \pm 0,166$. Ces nouvelles valeurs pour D_1 et pour D_2 sont compatibles.

■ Améliorer la qualité d'une mesure de la dimension fractale

Pour obtenir l'amélioration de la qualité d'une mesure, il suffit d'opérer une série de mesures indépendantes, c'est-à-dire des mesures d'un objet effectuées par différentes méthodes sur la même représentation ou sur différentes représentations par la même méthode. Ainsi, pour comparer les valeurs obtenues par la méthode de Horton-Schumm-Strahler, la méthode de comptage de boîtes carrées a été retenue.

	Dimension fractale	Erreur
RESEAU 1	1,646	0,010
RESEAU 2	1,695	0,010

Figure 43. Tableau de mesures des dimensions fractales par comptage de boîtes carrées pour les deux représentations du réseau

La Figure 43 présente des résultats nettement plus précis que ceux obtenus par la méthode de Horton-Schumm-Strahler. Ainsi, on peut comparer les différentes valeurs de mesures de la dimension fractale obtenues.

	Dimension fractale	Erreur
Horton	1,492	0,199
Comptage de boîtes	1,646	0,010

Figure 44. Tableau de comparaison entre les mesures du RESEAU 1

	Dimension fractale	Erreur
Horton	1,620	0,166
Comptage de boîtes	1,695	0,010

Figure 45. Tableau de comparaison entre les mesures du RESEAU 2

La Figure 44 et la Figure 45 montrent que les résultats obtenus par la méthode de Horton-Schumm-Strahler et celle par comptage de boîtes carrées sont compatibles. Toutefois, la méthode par comptage de boîtes carrées reste largement plus précise dans l'estimation de la dimension fractale du réseau hydrographique des Gardons.

■ Comparaison de toutes les mesures

De toutes ces mesures, on peut en déduire que, d'une part, la méthode de Horton-Schumm-Strahler est moins précise que la méthode de comptage de boîtes carrées (Figure 44 et Figure 45), et que, d'autre part, la comparaison des valeurs des deux calculs obtenues sur le RESEAU 1 et sur le RESEAU 2 montrent que le réseau hydrographique des Gardons a une structure en échelle qui est invariante puisqu'en ajoutant des branches la dimension fractale ne se transforme pas.

Ainsi, dans une approche multi-échelle d'un réseau hydrographique, il faut comparer la dimension fractale par comptage de boîtes carrées et la dimension fractale définie par les lois de Horton-Schumm-Strahler.

6.4.3.3. La classification hiérarchique ascendante des confluences (C.H.A.C.)

La classification hiérarchique ascendante des confluences (C.H.A.C.) est construite d'une manière très simple : à chaque confluence, une nouvelle branche apparaît. Ainsi, le nombre de niveaux est plus élevé que dans la classification de Robert Elmer Horton. On compte 63 niveaux pour le RESEAU 1 (Figure 46) et 93 niveaux pour le RESEAU 2 (Figure 47). La C.H.A.C. permet de faire des mesures sur un effectif de branches plus grand, ce qui fait que la construction d'indices locaux permettant d'étudier la géométrie du réseau hydrographique est meilleure. Le premier indice permet d'étudier le facteur d'échelle entre la longueur d'une branche le long de celle-ci LC et la distance à vol d'oiseau entre les deux extrémités de la branche (sources ou confluences) VO .

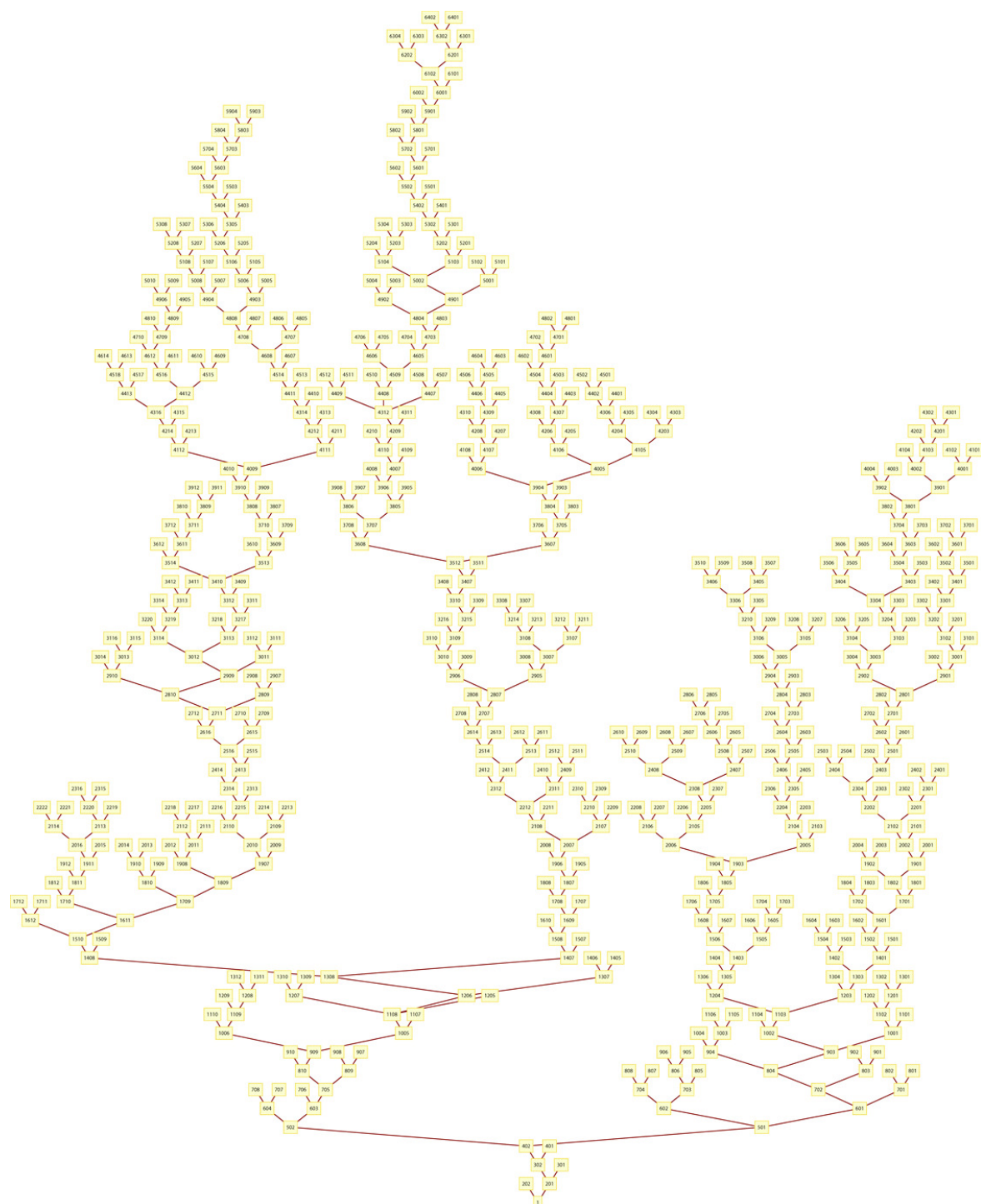


Figure 46. Arbre du RESEAU 1

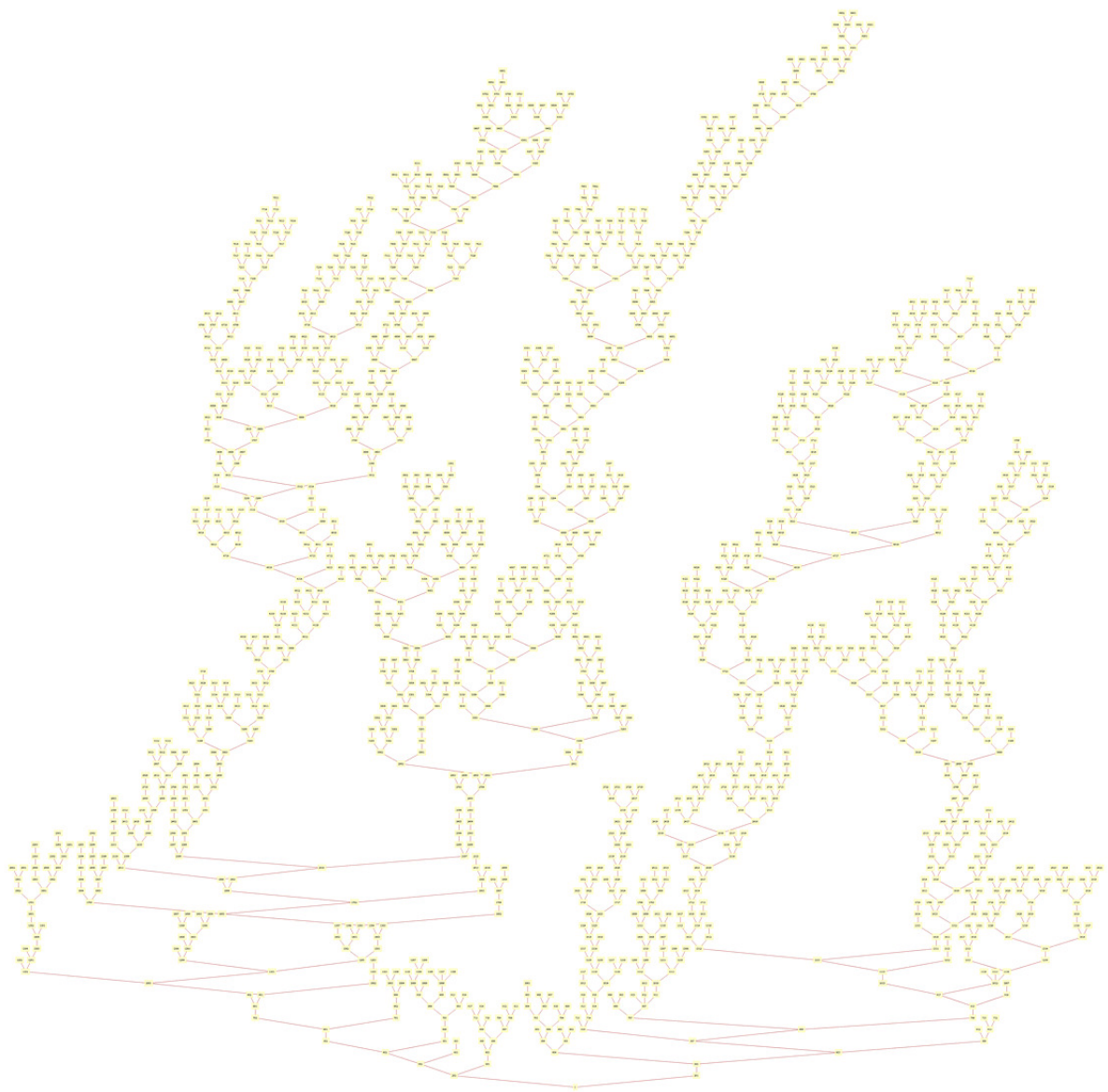


Figure 47. Arbre du RESEAU 2

■ Calcul de la dimension fractale « interne » du réseau

La méthode de calcul de la dimension fractale « interne » de la C.H.A.C. est identique à celle de Robert Elmer Horton. On calcule des RL et des RC . La mise en relation des deux donne un ajustement linéaire dont la pente correspond à la dimension fractale. Pour le RESEAU 1, la valeur obtenue est $1,584 \pm 0,125$. Pour le RESEAU 2, la valeur obtenue est $1,469 \pm 0,122$. Les deux mesures sont compatibles. On retrouve une nouvelle fois une valeur de la dimension fractale autour de 1,6, mais ces résultats sont toujours moins précis que la dimension fractale par comptage de boîtes carrées.

■ Le rapport LC/VO

Le rapport LC/VO correspond à un indice de tortuosité (Lanco Bertrand, 2005) ; dans la littérature de la géomorphologie, on dira plutôt indice de sinuosité. Il est possible d'en faire une statistique (Figure 48). On constate que, pour le RESEAU 1 ou le RESEAU 2, les distributions sont normales. On constate qu'une constante apparaît : le facteur d'échelle moyen que l'on peut appliquer aux branches du réseau hydrographique des Gardons est autour de 1,5 quelle que soit la densité du réseau choisie. Autrement dit, le passage du RESEAU 1 au RESEAU 2 ne change pas cette valeur. Toutefois, l'écart-type de la distribution a été divisé par 2, ce qui est considérable. Ce facteur d'échelle constant permet de rendre hautement significatif l'écart-type à la moyenne (Figure 49). Il faut rappeler que l'écart quadratique à la moyenne $\sigma_{\langle X \rangle}$ est le rapport entre l'écart-type de la distribution observée σ et la racine carrée de l'effectif n de la distribution.

$$\sigma_{\langle X \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

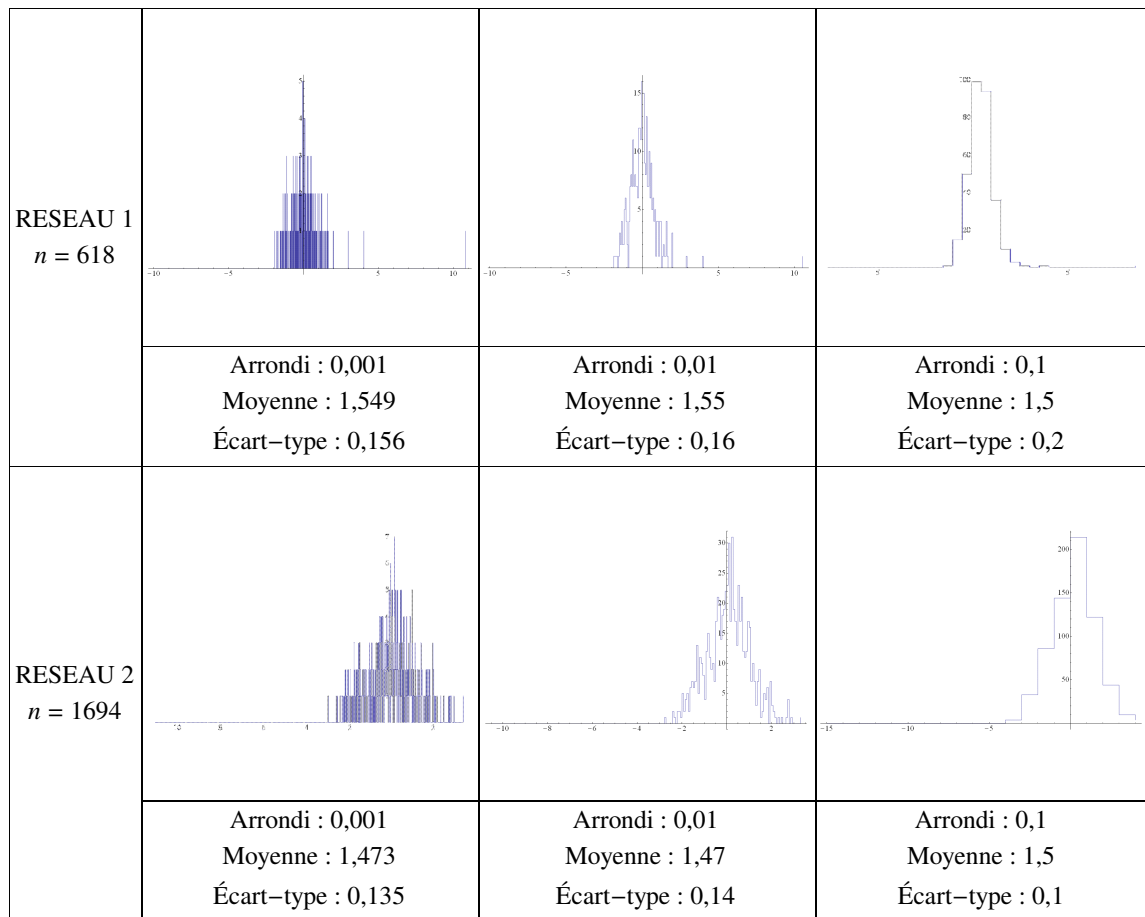


Figure 48. Distribution de probabilité du rapport LC/VO

En abscisse, la valeur a été centrée et réduite. En ordonnée, on trouve l'effectif des valeurs observées.

n	Écart-type de la distribution	Moyenne du facteur d'échelle	Erreur sur la moyenne
618	0,156	1,549	0,006
1 694	0,135	1,473	0,003

Figure 49. Estimation du facteur d'échelle LC/VO

Dès lors, il serait intéressant de voir si cette constante est stable. Pour ce, il faut construire un autre indice qui variera en fonction du drain étudié.

■ La variation du rapport LC/VO de confluence en confluence

Lorsque l'on réalise le rapport LC/VO sur les branches, est-il aussi pertinent si on l'applique à des branches combinées ? Pour le vérifier, deux points de départ sont possibles : le point servant d'exutoire (Pont de Ners) et les points représentant les sources.

$$\frac{LC_k}{VO_k} = \frac{\sum_{i=1}^k LC_i}{VO_{\sum_{i=1}^n LC_i}} \text{ avec } k = \{1, 2, \dots, n\}$$

où k représente le niveau intermédiaire.

■ Variation du rapport LC/VO de confluence en confluence du Pont de Ners aux sources

Quel que soit le réseau, quelle que soit la source, si l'on reporte sur un graphique, la distance au Pont de Ners et le rapport intermédiaire LC/VO obtenu, on s'aperçoit que le rapport converge rapidement (vers 5 km) vers la valeur 1,5 (annexe 20-2).

■ Variation du rapport LC/VO de confluence en confluence des sources au Pont de Ners

Quel que soit le réseau, quelle que soit la source, si l'on reporte sur un graphique, la distance à la source et le rapport intermédiaire LC/VO obtenu, on s'aperçoit que le rapport converge moins rapidement que pour le cas précédent (vers 10 km) vers la valeur 1,5 (annexe 20-2). Toutefois, les courbes montrent des rapports qui peuvent être très importants autour de 3,4, voire 5,6. Autrement dit, le facteur d'échelle organisant le réseau est plus stable si on l'utilise comme point de référence l'exutoire du réseau. Cela montre que la C.H.A.C. présente une classification plus pertinente que celle de Robert Elmer Horton.

Pour conclure, l'étude de ces indices, on peut également effectuer à l'instar du relevé de talweg, un relevé du rapport LC/VO par branche et par chemin parcouru (annexe 20-2).

■ Les relevés LC/VO

Il est possible de réaliser des relevés de LC/VO analogiques à des relevés de talwegs (annexe 20-2). Pour la plupart des graphiques qu'on analyse le RESEAU 1 ou le RESEAU 2, on observe un pic au centre du graphique (Figure 57 ou Figure 59 par exemple). Ce pic correspond morphologiquement à la zone centrale (Figure 30) qui possède beaucoup de méandres.

Ainsi, l'indice de tortuosité est une estimation du rapport d'échelle g très précise. En effet, les analyses précédentes ont montré que le rapport LC/VO était stable quel que soit la qualité des informations du réseau hydrographiques. Il correspond au facteur d'échelle g recherché (Tokunaga, 1994 ; Veltri *et alii*, 1996). De même, la dimension fractale est invariable. Si on arrondit le facteur d'échelle à $\bar{g} = 1,5$ et la dimension fractale à $\bar{D} = 1,7$ alors la relation fondamentale de Léonard de Vinci, généralisée par Benoît Mandelbrot, donne :

$$\bar{g}^{\bar{D}} = 1,5^{1,7} \approx 2,0 \approx k$$

Cette relation est donc vérifiée pour une arborescence non autosimilaire. À cela, il faut ajouter que cette valeur de 1,7 a été trouvée de manière indépendante lors d'une étude du relief sous-jacent au réseau hydrographique des Gardons (Nottale *et alii*, 2009 ; 2010). Qu'en est-il de la log-périodicité ?

■ Les branches, la log-périodicité et la dimension fractale

Une arborescence déterministe et autosimilaire peut se caractériser par une log-périodicité interne. Qu'en est-il des fractales non autosimilaires ? Pour rendre intelligible cette sous-partie, une comparaison systématique sera menée entre ce qui est observé et ce qui est connu des fractales déterministes.

■ Étude statistique niveau - nombre de noeuds

L'approche classique consiste à mettre en relation les niveaux observés et le nombre de branches. Dans ce cas des réseaux hydrographiques, les branches correspondent à la liaison topologique entre deux nœuds. Un nœud peut être soit une confluence, soit une source. Dans le cas d'une structure fractale strictement autosimilaire, le nombre de branches croît à l'infini (Figure 50), tandis que dans le cas d'une arborescence réelle, le nombre de branches est fini (Figure 51). Aussi, il croît et décroît en suivant un modèle parabolique (Figure 51).

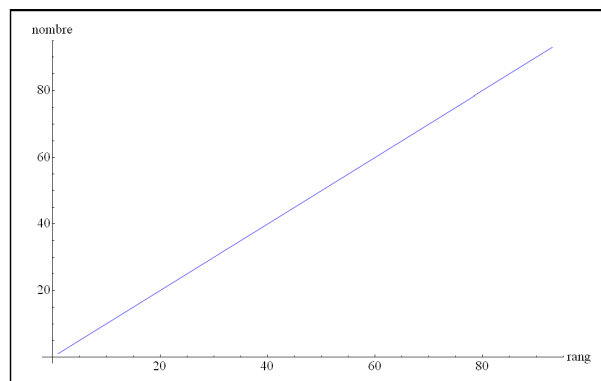


Figure 50. Arborescence : niveaux et branches dans le cas de structure auto-similaire

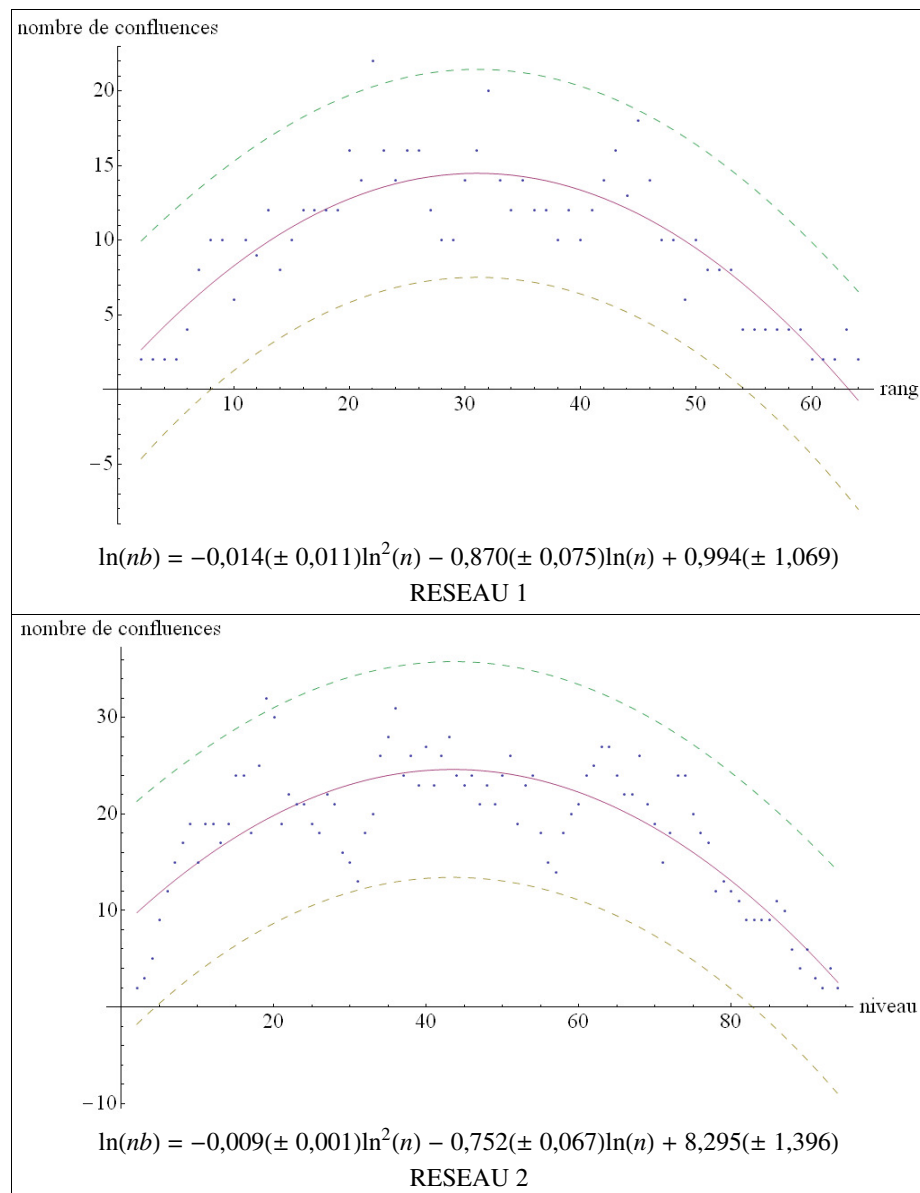


Figure 51. Arborescence : modèle parabolique observé

n : niveau ; nb : nombre de branches

■ Étude statistique des longueurs des branches

Précédemment, une relation entre les niveaux et leur nombre de branches a été trouvée. Cette relation renvoie à la structure topologique de l'arbre. Une autre étude naturelle, plus géométrique, est la distribution de probabilité des longueurs des branches. Pour le RESEAU 1, la moyenne vaut $1\,778,37 \pm 61,23$ m tandis que pour le RESEAU 2, elle vaut $931,30 \pm 17,33$ m. On remarque qu'entre les deux valeurs, il existe un facteur trois. Une nouvelle fois, on retrouve l'amélioration qualitative du RESEAU 2 par rapport au RESEAU 1.

Les distributions de probabilité observées ressemblent à une courbe de Gauss tronquée (Figure 52 et Figure 53).

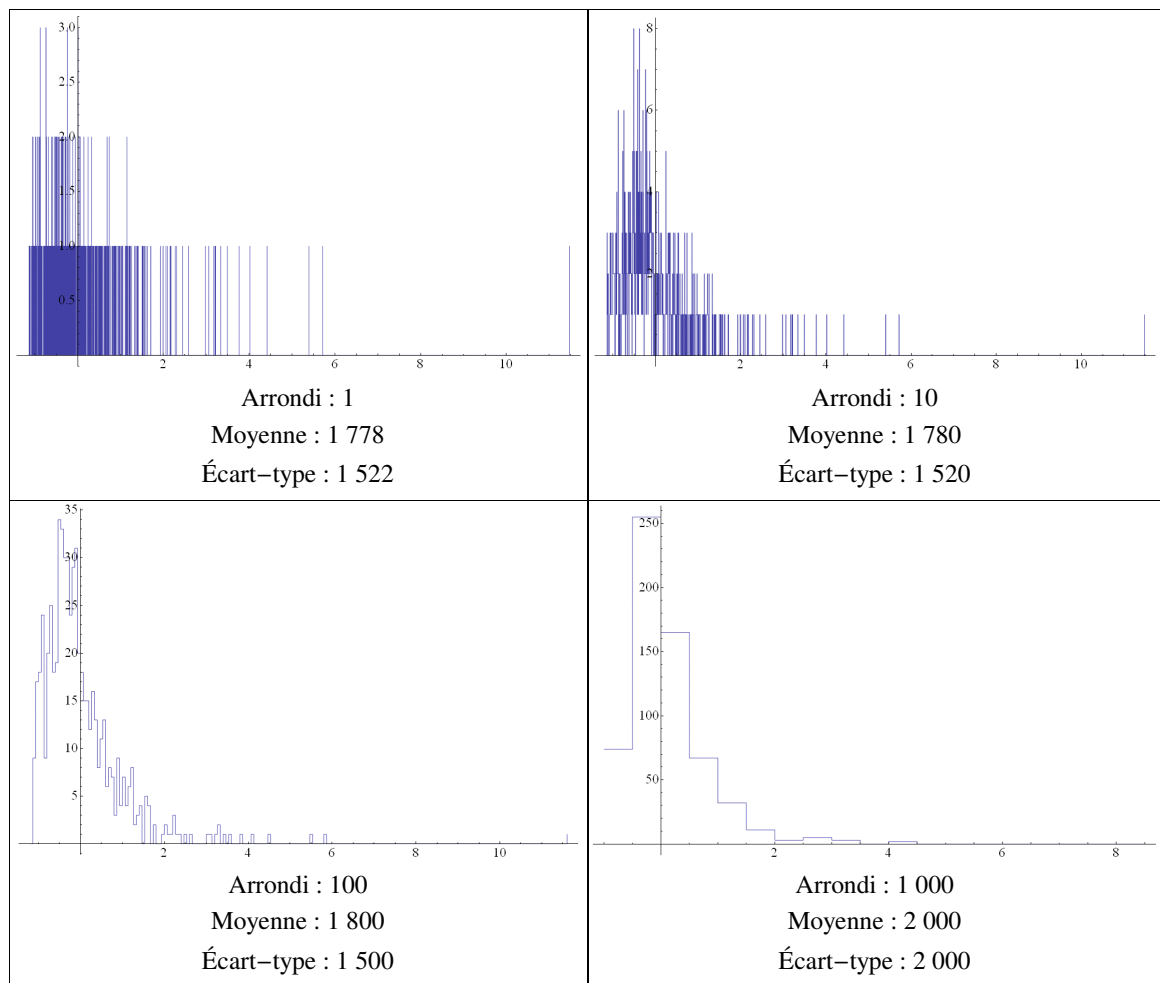


Figure 52. Statistique des longueurs des branches du RESEAU 1 ($n = 618$)

En abscisse, la valeur a été centrée et réduite. En ordonnée, on trouve l'effectif des valeurs observées.

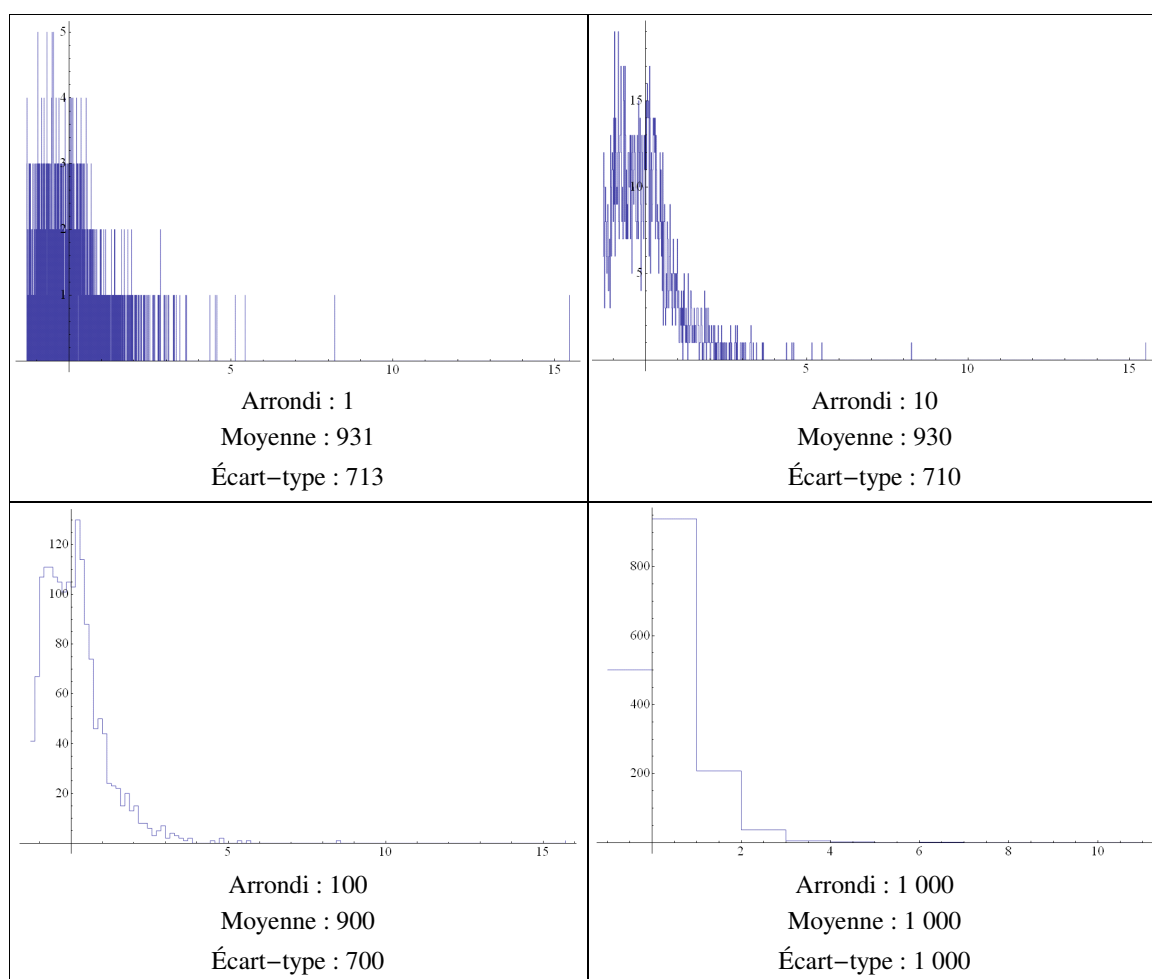


Figure 53. Statistique des longueurs des branches du RESEAU 2 ($n = 1\,694$)

En abscisse, la valeur a été centrée et réduite. En ordonnée, on trouve l'effectif des valeurs observées.

■ Log-périodicité des branches

De toutes ces analyses, il est difficile d'établir formellement la log-périodicité du réseau hydrographique des Gardons. Quelques indices comme l'existence d'un facteur d'échelle constant et une dimension fractale constante laissent transparaître son existence, du moins en moyenne. Toutefois, ce n'est qu'une spéculation qu'il faudra vérifier.

■ L'irrégularité et la fractalité

Le réseau hydrographique des Gardons est fractal. Plusieurs méthodes l'ont prouvé, mais qu'en est-il de ces branches d'une part et de ces chemins d'autre part ?

■ Calcul d'une dimension fractale par branche

Il est possible de calculer une « dimension fractale locale » par la méthode de comptage de boîtes carrées pour chacune des branches (annexe 20-2). Ce calcul a été effectué à partir des points. Pour éviter la mesure d'une dimension fractale d'un nuage de points, il faut définir une échelle d'arrêt minimale et une échelle d'arrêt maximale. L'échelle d'arrêt minimale est la plus petite distance à vol d'oiseau entre deux points qui définissent une portion de la branche mesurée. L'échelle d'arrêt maximale correspond à la distance à vol d'oiseau entre le premier point de la branche et le dernier point de la branche. Cette méthode permet de « tromper » l'ordinateur afin qu'il mesure bien la dimension fractale d'une branche, et non des points qui la composent.

Sans regarder les valeurs numériques des dimensions fractales, une typologie des graphiques obtenus peut être dressée. La première catégorie concerne les courbes comme celle de la branche n°1403-RESEAU 1 (Figure 54). La gamme d'échelle est peu étendue : $\exp(2) \approx 7$ m. Autrement dit, il est impossible de prétendre que la pente obtenue dans un espace bi logarithmique donne effectivement une dimension fractale. La seconde catégorie est caractérisée par des courbes comme celle de la branche n°401-RESEAU 1 (Figure 55), où la gamme d'échelle est un peu plus grande : $\exp(5) \approx 148$ m. La troisième catégorie, plus rare, s'applique à des courbes comme celle de la branche n°803-RESEAU 1 (Figure 56) où la gamme d'échelle commence à être plus importante : $\exp(6) \approx 403$ m, mais pas suffisante pour établir de manière certaine la dimension fractale, puisqu'il faudrait idéalement posséder une gamme d'échelle minimale de 10^4 - 10^5 du fait que, pour appréhender les transitions, il faut une longueur minimale de 50 unités de mesure. Autrement dit, si on veut percevoir deux transitions, qui correspond au cas le plus courant, il faut nécessairement $50 \times 50 \times 50$ unités de mesure, soit environ 10^5 . Toutefois, on supposera que les valeurs obtenues représentent effectivement des dimensions fractales locales.

Si l'on dresse la statistique des dimensions fractales locales, on s'aperçoit que les valeurs sont centrées autour de la moyenne, c'est-à-dire $1,01 \pm 0,02$ pour le RESEAU 1 et $1,00 \pm 0,02$ pour le RESEAU 2. Cette valeur hautement significative montre une fois de plus que l'irrégularité d'une structure ne suffit pas pour caractériser une fractale. Ici, chaque branche est caractérisée par une non fractalité.

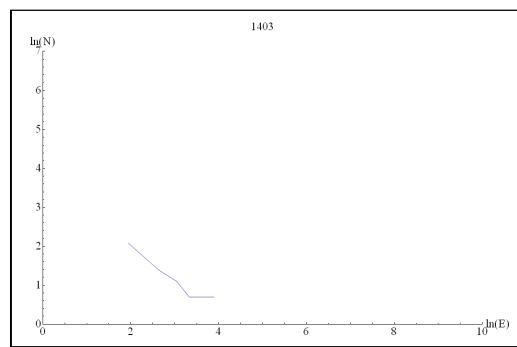


Figure 54. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est courte

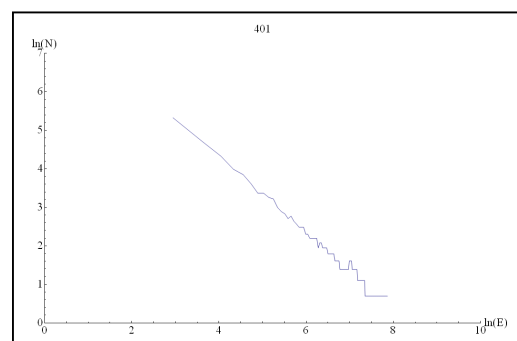


Figure 55. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est moyenne

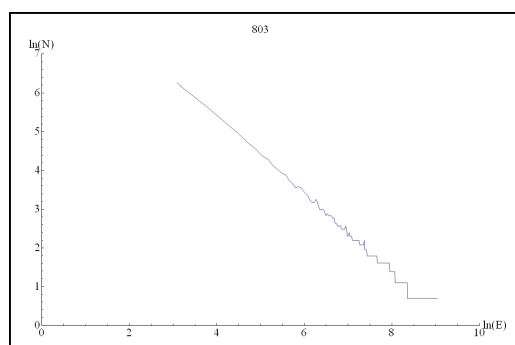


Figure 56. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est correcte

■ Calcul d'une dimension fractale par chemin

En suivant la même méthode que le paragraphe précédent, il est possible de calculer une dimension fractale par comptage de boîtes carrées de l'ensemble du parcours entre une source et le point d'exutoire (Pont de Ners). On pourrait supposer qu'avec des longueurs nettement supérieures à celle des branches, il existe une dimension fractale non entière au niveau des chemins. La distribution statistique des dimensions fractales obtenue sur les chemins est en réalité centrée autour d'une moyenne de $1,02 \pm 0,03$ pour le RESEAU 1 et $1,01 \pm 0,02$ pour le RESEAU 2 (annexe 20-2). Autrement dit, comme les branches, la structure des chemins est non fractale. Une nouvelle fois, l'irrégularité apparente d'une structure ne suffit pas à définir une fractale. Les chemins ont un tracé caractérisé par leur non fractalité.

Cela montre d'une part qu'une structure est à la fois fractale et non fractale. Tout objet géographique porte ces deux natures. La fractalité doit être comprise comme un potentiel. Tout objet géographique est potentiellement fractal. Dans le cas d'un réseau hydrographique, toute l'arborescence de ce réseau est fractale, mais chaque branche ou chemin, ne l'est pas individuellement. L'explication de cette non fractalité est double. D'abord, cela vient peut-être simplement de la structure au niveau des branches et des chemins qui ne porte pas assez de gamme d'échelles pour faire apparaître une relation fractale. Toutefois, cela peut simplement signifier qu'un cours d'eau pris indépendamment du réseau hydrographique auquel il appartient, est un objet géographique qui se déploie dans une gamme d'échelles non fractales (Figure 37 et Figure 38). Tout cela permet d'insister sur le fait qu'une fractale articule plusieurs niveaux, mais ceux-ci n'apparaissent pas forcément dans la structure extérieurement ; il faut nécessairement un zoom pour les définir.

■ Relevé de dimension fractale locale

Tout comme il a été possible d'effectuer un relevé *LC/VO* par rapport à la distance au Pont de Ners, il est possible de réaliser un relevé de la dimension fractale locale par rapport à la distance du Pont de Ners (annexe 20-2). Si on prend, par exemple, le drain le plus long soit le 6401-RESEAU 1 et le 9402-RESEAU 2, on se rend compte que les relevés du rapport *LC/VO* et de la dimension fractale varient exactement de la même façon : les distributions sont identiques. Les dimensions fractales étant très proches des dimensions topologiques de chacune des branches, cette correspondance entre les deux relevés permettent d'utiliser le relevé du rapport *LC/VO* à la place de celui de la dimension fractale locale et *vice versa*.

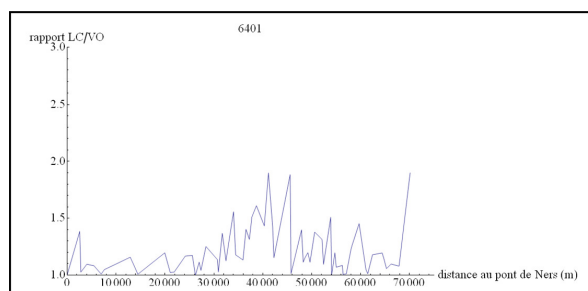


Figure 57. Rapport LC/VO du chemin de la branche 6401-RESEAU 1 à l'exutoire

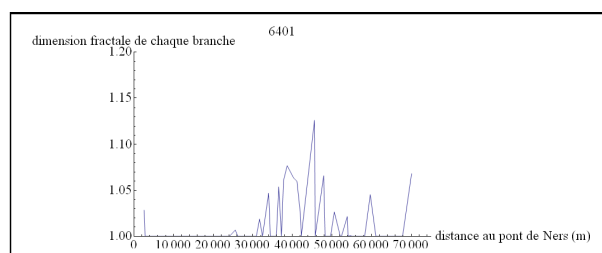


Figure 58. Relevé de la dimension fractale par branche du chemin de la branche 6401-RESEAU 1 à l'exutoire

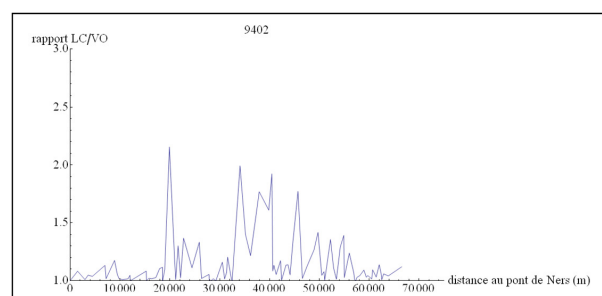


Figure 59. Rapport LC/VO du chemin de la branche 9402-RESEAU 2 à l'exutoire

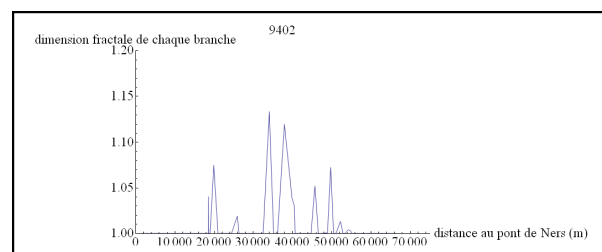


Figure 60. Relevé de la dimension fractale par branche du chemin de la branche 9402-RESEAU 2 à l'exutoire

Cette correspondance entre les pics observés sur le relevé LC/VO et ceux du relevé de la dimension branche se démontre facilement.

Soient le rapport d'échelle $g = \frac{p}{q}$ et la dimension fractale $D = \frac{\ln p}{\ln q}$, si q est constant alors $g = q^{D-1}$. On peut alors étudier les variations de g , notées δg et celles de D , notées δD .

$$\begin{cases} \delta g = g - g_0 \\ \delta D = D - D_0 \end{cases}$$

L'équation $g = q^{D-1}$ devient :

$$\ln g = \ln \left(g_0 \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) \right) = (D_0 + \delta D - 1) \ln q$$

$$\Rightarrow \ln g_0 + \ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) = (D_0 + \delta D - 1) \ln q$$

$$\Rightarrow \frac{\ln g_0}{\ln q} + \frac{\ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \left(\frac{p_0}{q} \right)}{\ln q} + \frac{\ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln p_0 - \ln q}{\ln q} + \frac{\ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow D_0 - 1 + D + \frac{\ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right)}{\ln q} = D_0 + \delta D - 1$$

$$\Rightarrow \ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) = \delta D \ln q$$

$$\text{or, } \ln \left(1 + \frac{\delta g}{g_0} \right) \text{ a pour développement limité du premier ordre : } \frac{\delta g}{g_0}.$$

$$\Rightarrow \frac{\delta g}{g_0} = \delta D \ln q$$

$$\Rightarrow \delta g = (g_0 \ln q) \delta D$$

Désormais, si l'on prend deux rapports d'échelle ayant deux dimensions fractales différentes, on a alors :

$$\left. \begin{aligned} \delta g_1 &= (g_0 \ln q) \delta D_1 \\ \delta g_2 &= (g_0 \ln q) \delta D_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\delta g_1}{\delta g_2} = \frac{\delta D_1}{\delta D_2}$$

Autrement dit, on peut effectivement se servir du relevé LC/VO pour caractériser celui des dimensions fractales.

Ces relevés sont fondamentaux. D'après Cecil D. Murray (1927), si $\frac{LC}{VO} = 2^{1/3} \approx 1,260$ alors le réseau dans le cas d'un embranchement à base 2 est optimal par rapport à la résistance au flux. La Figure 57 et la Figure 59 permettent de visualiser localement les branches où le rapport dépasse largement 1,260. L'identification de ces branches est fondamentale pour une meilleure prévention des risques d'inondation. Plus le rapport est élevé, plus le risque d'inondation est important en cas de forte pluie. De plus, si l'établissement des rapports est impossible ; il est possible d'obtenir une idée de ces variations grâce à la dimension fractale locale.

■ Fractalité du réseau, irrégularité et branches

La non fractalité des branches et des chemins est un point très important. En effet, cela montre qu'il ne faut pas voir des fractales partout. Elle démontre que l'irrégularité seule ne suffit pas pour caractériser une fractale, comme cela est si souvent écrit. Elle vérifie également qu'un arbre n'est fractal qu'à sa limite.

Ainsi, un réseau hydrographique est caractérisé par trois valeurs : un facteur d'échelle g , une dimension fractale D et un embranchement élémentaire k qui semble être constant quel que soit le réseau étudié. De plus, l'étude du réseau hydrographique des Gardons *via* deux arborescences complémentaires a permis de montrer que la fractalité dans ce cas n'était définie qu'à la limite de celles-ci. Autrement dit, un arbre est fractal, mais chacune de ses branches et chacun de ses chemins (bas en haut ; haut en bas) ne le sont pas. Ceci prouve que l'irrégularité à elle seule ne suffit pas pour définir une fractale. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante. Ce qui caractérise une fractale est bien sa structure multi-échelle, c'est-à-dire des structures (irrégulières) dans les structures (Figure 9). Dans ce cas, le nombre d'échelles n'est pas suffisant.

7

L'analyse morphologique des images *Landsat* des principales villes du monde

Depuis les années 1970, une nouvelle étude morphologique est apparue : celle des villes (Haggett, 1965). « L'objet de la morphologie urbaine est la forme urbaine, forme posant d'entrée de jeu, la question de sa définition. Ce que nous ont montré les premiers travaux de morphologie. [C'est] que la forme urbaine n'est jamais une donnée *a priori*, elle est toujours construite, un objet d'étude construit à partir d'une [hypothétique] définition, d'une représentation [et] d'un point de vue sur [sa] forme : [sur] la forme du tissu (développée dans les trois écoles de morphologie, italienne, française et anglaise), [et sur] la forme urbaine [elle-même] comme forme des tracés (développée par les géographes allemands de l'entre-deux-guerres ; Lavedan, 1936) » (Lévy, 2005). Ainsi, pour définir morphologiquement une ville, il existe trois possibilités : (1) soit la ville est définie comme une tache correspondant généralement à une agglomération morphologique au sens de François Moriconi-Ébrard (1994) ; (2) soit la ville est caractérisée par son réseau intra-urbain ; (3) soit la ville est définie par ses bâtiments (Brunhes, 1900 ; Robic ; 2003). Chacune de ces définitions fera l'objet d'un chapitre.

Si l'on définit la ville par sa tache, on s'intéresse exclusivement à son contour, à sa limite, mais comment définir ce qui fait parti de la ville et ce qui n'en fait pas parti ? Généralement, on choisit un seuil statistique basé sur une densité de population, ce qui suppose que l'on ait des connaissances sur la répartition de cette population. Cependant, si l'on ne possède aucune de ces informations, il faut utiliser un référent morphologique qui dépend de l'outil que l'on utilise. Par exemple, la télédétection ou la photographie aérienne permettent d'identifier les structures bâties, puisqu'elles ont une réflectance particulière. Par contre, si l'on caractérise la ville par son réseau intra-urbain, l'outil privilégié est sans doute le plan de la ville. Pour le faire apparaître clairement, cela nécessite une haute résolution, mais on néglige tout autre aspect de la ville : bâti dense, place, espaces verts *etc.* Enfin, la ville peut être identifiée grâce à la densité élevée de son bâti. Autrement dit, ici, la ville n'inclut pas les réseaux, les jardins publics ou privés, les terrasses, les places, les points d'eau, *etc.* Nombreux sont donc les outils permettant d'identifier le bâti : la télédétection, les photographies aériennes, les plans du cadastre, *etc.*

Ce chapitre va effectuer une analyse fractale de différentes taches urbaines extraites à partir des données des satellites *Landsat*. Il ne s'agit pas de réaliser une réflexion sur la télédétection, mais simplement d'extraire différentes taches urbaines de plusieurs villes du monde, et de les comparer grâce à l'aide d'une analyse fractale.

7.1. Extraction des données

Le site <http://sedac.ciesin.columbia.edu/ulandsat/data.jsp/> fournit des données gratuites, localisées et datées des principales villes du monde. Ses images ont été analysées et prétraitées par Christopher Small (2006). Un autre site, celui d'Ann Bryant (2007), <http://geology.com/world-cities/>, a mis à disposition des images datant toutes de 1999. Ces deux sites ont pour source les images des satellites du programme états-unien *Landsat*, et plus particulièrement de *Landsat 7*.

7.1.1. Les satellites *Landsat*

Le programme *Landsat* de la NASA débuta le 22 juillet 1972 avec la mise en orbite de *Landsat 1*. Six satellites furent lancés entre 1972 et 1999, et seuls *Landsat 5* (1984) et *Landsat 7* (1999) fonctionnent toujours aujourd'hui. Ces deux satellites suivent une orbite héliosynchrone à une altitude de 705 km, leur cycle orbital étant de 16 jours (Girard et Girard, 1999).

Landsat 5 possède un capteur TM (*Thematic Mapper*) à sept bandes spectrales (Robin, 2002). Les canaux 1, 2 et 3 captent la lumière visible, les canaux 4, 5 et 7, le proche et moyen infrarouge, et le canal 6, le rayonnement thermique. Chaque canal possède une résolution spectrale : $30 \times 30 \text{ m}^2$ pour les canaux 1, 2, 3, 4, 5, 7 et $80 \times 80 \text{ m}^2$ pour le canal 6. Toutefois, il est important de noter que chaque scène capturée (ou image) possède une résolution spatiale (taille du pixel) de $30 \times 30 \text{ m}^2$. *Landsat 7* possède, quant à lui, un capteur ETM+ (*Enhanced Thematic Mapper Plus*). La seule différence entre TM et ETM+ est l'existence d'un canal supplémentaire (le canal 8) dit panchromatique dont la résolution spectrale est $15 \times 15 \text{ m}^2$ (Robin, 2002).

Les deux bases de données citées précédemment ont principalement pour source le satellite *Landsat 7*. La base de données de Christopher Small (2006) est constituée d'images filtrées. En effet, seuls les canaux 2, 4 et 7 ont été utilisés pour déterminer les structures urbaines. Chaque image possède un pixel de $30 \times 30 \text{ m}^2$, et une étendue de $30 \times 30 \text{ km}^2$. Pour plus de détail, le lecteur pourra lire l'article de Christopher Small (2005) dans lequel il détaille tous ses prétraitements. La base d'Ann Bryant (2007) est plus problématique. En effet, il n'y a aucune description des données. Il semble qu'il s'agisse d'images *Landsat 7* brutes c'est-à-dire qu'elles possèdent l'intégralité de leurs canaux. Le pixel semble correspondre à $30 \times 30 \text{ m}^2$, mais l'étendue n'est pas normalisée comme dans la base de Christopher Small.

Ces deux bases sont utilisables, sous certaines conditions, dans l'optique d'une analyse fractale des taches urbaines que l'on peut extraire de ces images.

7.1.2. Les couleurs de l'urbain

Sur le site de SEDAC (*SocioEconomic Data and Applications Center*), organisme dont dépend Christopher Small, il est précisé que, sur chaque image traitée, l'aire urbaine peut être identifiée par les couleurs suivantes : le violet, le gris et le blanc. La végétation apparaît en vert, et l'eau en noir ou bleu foncé. Si l'on prend l'exemple de Beijing (Figure 62.a), à l'œil nu, on perçoit très bien la tache urbaine. Il serait très simple de l'extraire manuellement par l'intermédiaire d'un système d'information géographique. Toutefois, s'il faut réaliser cette tâche sur les soixante-dix huit images de la base de données de Christopher Small (2006) et sur les soixante-trois images d'Ann Bryant (2007), cela devient très contraignant. Aussi, pour traiter plus rapidement ces données, on peut utiliser une méthode de filtrage proposée par Hiba Alawad (Alawad et Grasland, 2009).

7.1.3. L'extraction de la tache urbaine

Initialement, cette méthode d'extraction semi-automatique avait été testée à des résolutions plus fines pour identifier les structures bâties dans les villes (Alawad et Grasland, 2009). Elle peut être étendue très facilement à l'extraction, grossière, d'une tache urbaine.

Il faut rappeler qu'une image est une matrice à deux dimensions, où chaque cellule (ou pixel) représente une couleur. Il existe plusieurs sortes de codage possible : le *RGB*, le *CMYK*, le niveau de gris, *etc.* Ici, chaque image a été codée en *RGB* (*Red, Green, Blue*). Ce qui signifie que chaque pixel possède trois bandes : une rouge, une verte et une bleue. Chaque bande possède une valeur allant de 0 à 255 : plus 16 millions de couleurs sont donc possibles.

Pour extraire le bâti, Hiba Alawad et Loïc Grasland utilisent la bande rouge ; ils se fixent un seuil, à partir des données, qui leur permet d'identifier l'intervalle dans lequel se trouvent les éléments bâtis (Alawad et Grasland, 2009). Cette méthode, très efficace, présente l'avantage de conserver l'hétérogénéité spatiale de l'image source, mais l'inconvénient de ne travailler que sur une seule bande. En ce qui concerne l'extraction des taches urbaines, la conservation de l'hétérogénéité des couleurs de l'image source apporte peu d'informations. Aussi, on peut mettre au point un filtre, très simple, qui limite cette hétérogénéité (Tonye *et alii*, 2000).

Le filtre est le suivant : dans chaque bande, toutes les valeurs comprises entre 0 et 99 vont être codées 0 ; toutes celles entre 100 et 199, 100 ; toutes celles entre 200 et 255, 200. Ainsi, on obtient une image possédant 27 couleurs potentielles (Figure 61), au lieu de 16 millions, ce qui permet une identification, grossière, mais efficace de la tache urbaine (Figure 62.b).

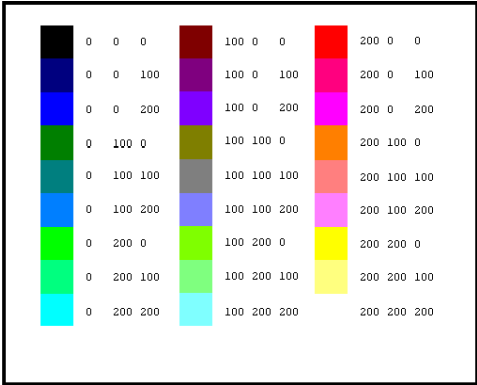


Figure 61. Couleurs potentielles obtenues par le filtre

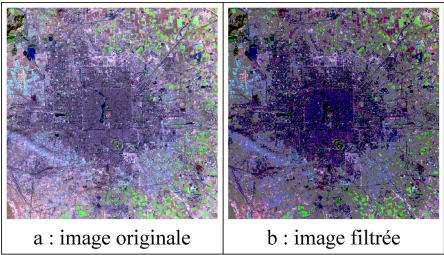


Figure 62. Extraction de la tache urbaine de Beijing

Le filtrage des couleurs ayant été effectué, il suffit d'identifier les couleurs de la tache urbaine. Dans le cas de Beijing, seule la couleur (0, 0, 100) permet d'identifier la tache urbaine. Toutefois, dans la majorité des images de Christopher Small (2006) et d'Ann Bryant (2007), il y a entre deux et cinq couleurs qui caractérisent la tache urbaine dans chacune des images. Celles-ci sont limitées à un choix parmi les dix couleurs suivantes : magenta foncé (200, 0, 200), violet (100, 0, 100), bleu gris (100, 100, 200), bleu foncé (0, 0, 100), gris (100, 100, 100), rose foncé (200, 100, 100), rouge (200, 0, 0), rouge foncé (100, 0, 0), vert gris (0, 100, 100), rose (200, 100, 100). Ce choix est contingent à chaque entité urbaine et dépend de ce que perçoit le modélisateur.

À partir de là, il est facile de convertir les couleurs choisies en blanc et les autres en noir ce qui donne le résultat final (Figure 63). Cette méthode a été appliquée aux soixante-huit images de la base de Christopher Small (2006) et aux soixante-trois images de celle d'Ann Bryant (2007). Cependant, elle ne fonctionne pas à chaque fois, seules 101 sur les 131 ont fourni une extraction convaincante. De plus, l'image obtenue comporte beaucoup de bruits, surtout aux grandes échelles.



Figure 63. Image monochrome de la tache urbaine de Beijing

7.1.4. Les limites de l'extraction

Plusieurs paramètres peuvent perturber l'extraction des taches urbaines : le manque de cohérence des couleurs de l'image originale, les ombres, les nuages, la trop forte prégnance d'entités physiques (montagnes, lacs), *etc.* Ces éléments seraient gênants dans la construction d'une base de données représentant l'image précise d'une agglomération à une échelle donnée. Cependant, l'objectif de ces extractions étant de réaliser une analyse fractale de chaque structure urbaine, ces « éléments perturbants » deviennent de simples bruits si leur nombre et leur étendue restent limités en termes de taille. Finalement, seuls les bruits dus à la répartition des couleurs elles-mêmes peuvent être source d'erreur dans la mesure de la dimension fractale de la tache de l'agglomération, ce qui est le principal critère de rejet des trente images non prises en compte. De plus, les pixels isolés ne représentent pas forcément des entités bâties. Leur surnombre est visible à grande échelle dans l'analyse fractale par comptage de boîtes carrées. Puis, progressivement en allant vers les petites échelles, ce bruit est éliminé par la méthode même de l'estimation de la dimension fractale. Cette observation se matérialise par une structure multifractale dont la gamme d'échelles aux hautes résolutions s'interprète comme un bruit. De plus, l'analyse par comptage de boîtes carrées joue le rôle d'un *buffer* (Le Corre *et alii*, 2000), puisque, au-delà de l'échelle de coupure entre les deux domaines fractals, en allant vers les petites échelles, on mesure la dimension fractale de la tache urbaine, et non plus celle du bruit des grandes échelles.

Seules soixante-deux images de Christopher Small (2006) et trente-neuf images d'Ann Bryant (2007) ont pu être utilisées et utilisables pour l'analyse fractale.

7.2. Analyse fractale des données

Une dimension fractale par comptage de boîtes carrées a été réalisée pour les 101 entités urbaines retenues. Chacune d'elle présente des cas de dimensions fractales constantes dans la gamme d'échelles d'analyse (de 30 m (ou 15 m) à l'étendue de l'image).

7.2.1. Les résultats

La Figure 64 présente les différentes taches urbaines et leurs caractéristiques. La première ligne donne le nom de l'agglomération ; la seconde, l'État ; la troisième, la résolution ; la quatrième l'échelle de coupure ; la cinquième, l'étendue ; la sixième, la dimension fractale observée aux grandes échelles appelée D_1 ; la septième, l'estimation de la dimension fractale aux petites échelles appelée D_2 ; la huitième, la date de la capture (toutes les dates étant antérieures à 1999 correspondent à une capture *Landsat 5*), la neuvième, les éléments perturbateurs, c'est-à-dire les entités physiques ou anthropiques ne correspondant pas à la structure urbaine qui sont, malgré tout, pris en compte dans le calcul de la dimension fractale, et la dixième, la base de données d'où provient l'image servant au calcul. D_1 et D_2 ne sont pas de même nature. D_1 correspond à la structure fractale d'un « bruit » présent aux grandes échelles. En effet, lors de l'extraction, la tache n'est pas fermée ; elle le devient à partir de l'échelle de coupure propre à chacune des images dont la moyenne est 425 ± 47 m. Une fois que la résolution est supérieure à cette échelle de coupure, une seconde dimension fractale D_2 apparaît. Cette dernière correspond à la mesure de la dimension de la tache urbaine proprement dite. Cette interprétation est étayée également par le fait que certaines villes ayant été extraites sans bruit telle que Accra, Bogota, Budapest, Buenos Aires 1, Calcutta 1, *etc.*, n'ont pas de transition fractal - fractal. Ainsi, seules les valeurs de D_2 doivent être étudiées, D_1 ne renvoyant qu'au bruit de l'extraction.

Il est important de noter que certaines agglomérations sont présentes dans les deux bases de données. Tel est le cas de Buenos Aires, de Calcutta, de Lagos, de Montreal, de Mumbai, de Paris, de Perth, de Rio de Janeiro, de Santiago, de Sao Paulo, de Sydney et de Tokyo. Toutefois, la valeur de ces doubles dimensions fractales est parfaitement comparable dans la mesure où, si l'étendue est différente, la taille du pixel est comparable, car soit il est identique (30×30 m²), soit il n'y a qu'un facteur quatre entre la taille des pixels des agglomérations ayant des pixels plus fins (15×15 m²). Il est donc possible de regrouper ces données.

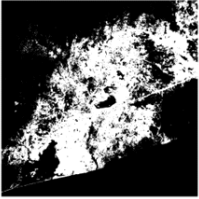
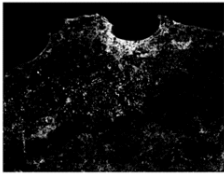
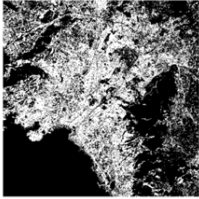
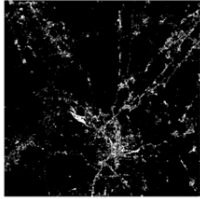
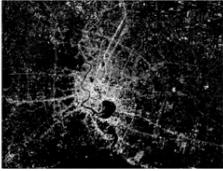
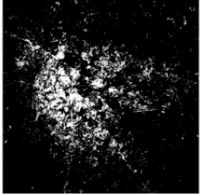
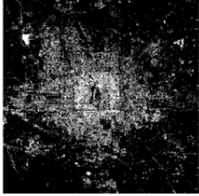
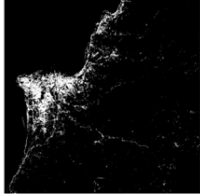
 <p>Accra Ghana $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,743 \pm 0,006$ Date : 04/02/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Alger Algérie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 662$ m $\varepsilon_{max} = 35\,444$ m $D_1 = 1,170 \pm 0,009$ $D_2 = 1,711 \pm 0,014$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Athènes Grèce $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 75$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,533 \pm 0,005$ $D_2 = 1,810 \pm 0,009$ Date : 06/08/1999 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>Atlanta Etats-Unis, Géorgie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 909$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,263 \pm 0,007$ $D_2 = 1,671 \pm 0,031$ Date : 28/09/1991 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>
 <p>Bangkok Thaïlande $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 234$ m $\varepsilon_{max} = 34\,554$ m $D_1 = 1,169 \pm 0,014$ $D_2 = 1,819 \pm 0,008$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Bangalore Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 674$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,340 \pm 0,006$ $D_2 = 1,709 \pm 0,023$ Date : 14/01/2001 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Beijing Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 122$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,097 \pm 0,009$ $D_2 = 1,739 \pm 0,011$ Date : 26/12/1988 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Beyrouth Liban $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 1\,056$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,318 \pm 0,002$ $D_2 = 1,598 \pm 0,022$ Date : 22/06/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-1. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

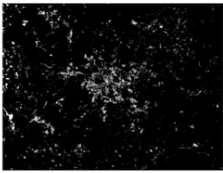
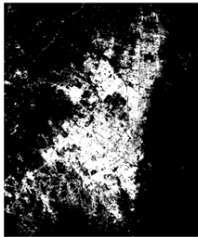
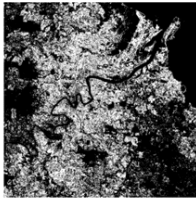
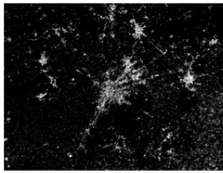
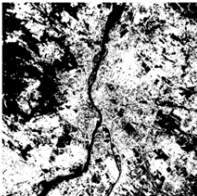
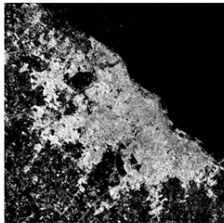
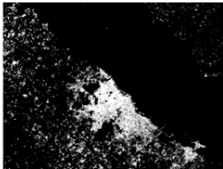
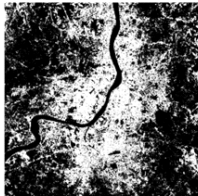
 <p>Berlin Allemagne $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 769$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,100 \pm 0,008$ $D_2 = 1,752 \pm 0,015$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Bogota Colombie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 32\,859$ m $D_2 = 1,689 \pm 0,004$ Date : 05/08/1997 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Brisbane Australie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 87$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,368 \pm 0,012$ $D_2 = 1,830 \pm 0,008$ Date : 08/08/2001 Eléments perturbateurs : Aucune Source : Small, 2006</p>	 <p>Brussels Belgique $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 320$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 0,953 \pm 0,013$ $D_2 = 1,822 \pm 0,010$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Budapest Hongrie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,833 \pm 0,006$ Date : 08/06/2000 Eléments perturbateurs : Nuages et leurs ombres Source : Small, 2006</p>	 <p>Buenos Aires 1 Argentine $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,796 \pm 0,005$ Date : 20/12/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Buenos Aires 2 Argentine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 302$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,386 \pm 0,003$ $D_2 = 1,668 \pm 0,009$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Calcutta 1 Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,794 \pm 0,007$ Date : 15/11/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-2. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

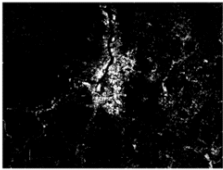

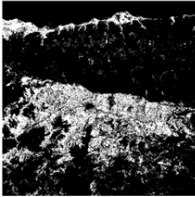
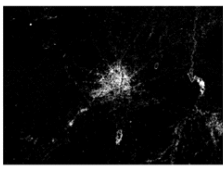
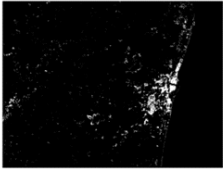

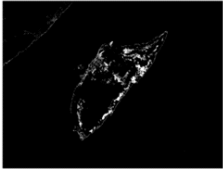
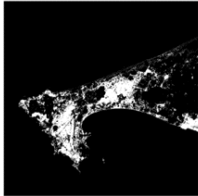
 <p>Calcutta 2 Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 824$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,173 \pm 0,002$ $D_2 = 1,674 \pm 0,011$ Date : 1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Calgary Canada $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,754 \pm 0,006$ Date : 09/07/1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Caracas Venezuela $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 145$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,479 \pm 0,004$ $D_2 = 1,714 \pm 0,007$ Date : 14/03/2001 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Changchun Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 875$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,011 \pm 0,007$ $D_2 = 1,743 \pm 0,014$ Date : 1999 Éléments perturbateurs : Lacs Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Chennai Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 1\,332$ m $\varepsilon_{max} = 29\,733$ m $D_1 = 1,095 \pm 0,003$ $D_2 = 1,641 \pm 0,025$ Date : 1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Chicago Etats-Unis, Illinois $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 271$ m $\varepsilon_{max} = 42\,192$ m $D_1 = 1,553 \pm 0,006$ $D_2 = 1,758 \pm 0,013$ Date : 02/07/2001 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Cozumel Mexique $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 77$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,078 \pm 0,009$ $D_2 = 1,330 \pm 0,005$ Date : 1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Dakar Sénégal $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,572 \pm 0,005$ Date : 04/11/1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-3. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

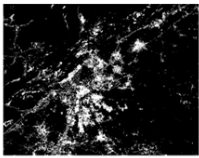
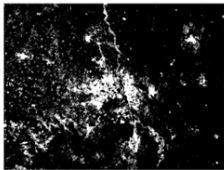
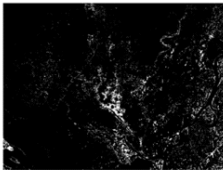
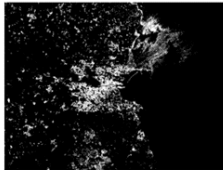
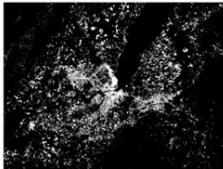
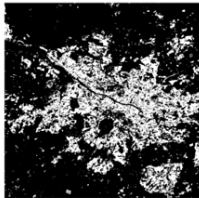
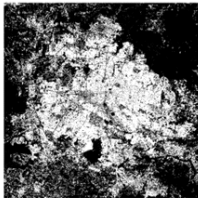
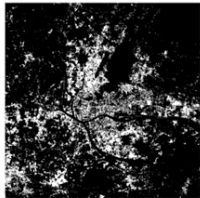
 <p>Damas Syrie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 536$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,340 \pm 0,006$ $D_2 = 1,719 \pm 0,012$ Date : 22/06/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Delhi Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 526$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,380 \pm 0,007$ $D_2 = 1,741 \pm 0,010$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Dhaka Bangladesh $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 487$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,064 \pm 0,014$ $D_2 = 1,721 \pm 0,010$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Dublin Irlande $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 516$ m $\varepsilon_{max} = 31\,257$ m $D_1 = 1,329 \pm 0,006$ $D_2 = 1,713 \pm 0,013$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Vagues Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Genève Suisse $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 409$ m $\varepsilon_{max} = 34\,554$ m $D_1 = 1,329 \pm 0,010$ $D_2 = 1,756 \pm 0,011$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Glasgow Royaume-Uni $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,696 \pm 0,006$ Date : 26/06/1995 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Guadalajara Mexique $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 90$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,509 \pm 0,007$ $D_2 = 1,824 \pm 0,009$ Date : 03/11/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Guangzhou Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 395$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,459 \pm 0,007$ $D_2 = 1,771 \pm 0,016$ Date : 14/09/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-4. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

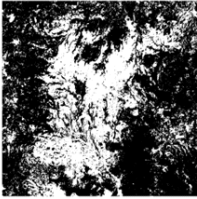

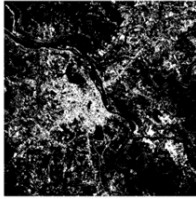
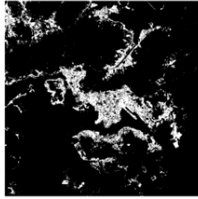
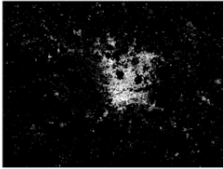
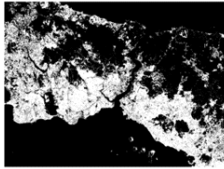
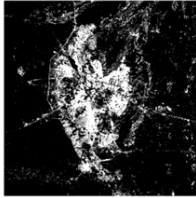
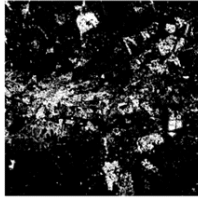
 <p>Guatemala Guatemala $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,773 \pm 0,007$ Date : 24/03/1996 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>Hangzhou Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 518$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,256 \pm 0,009$ $D_2 = 1,770 \pm 0,011$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Hanoi Viêt-nam $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 312$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,436 \pm 0,010$ $D_2 = 1,780 \pm 0,019$ Date : 09/12/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Hong Kong Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,565 \pm 0,005$ Date : 14/09/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>
 <p>Hyderabad Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 1\,032$ m $\varepsilon_{max} = 34\,554$ m $D_1 = 1,182 \pm 0,006$ $D_2 = 1,750 \pm 0,019$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Istanbul Turquie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,755 \pm 0,003$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Jaipur Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 154$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,345 \pm 0,004$ $D_2 = 1,693 \pm 0,008$ Date : 07/02/2002 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>Johannesbourg Afrique du Sud $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 190$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,338 \pm 0,004$ $D_2 = 1,660 \pm 0,010$ Date : 01/04/1991 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-5. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

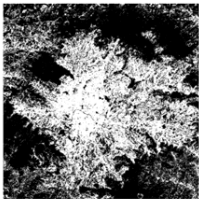
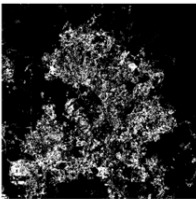
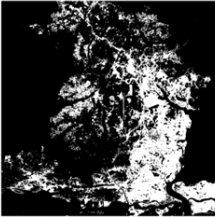

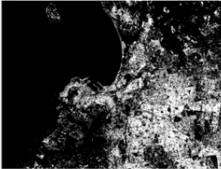
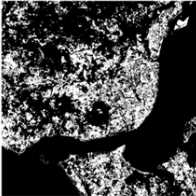
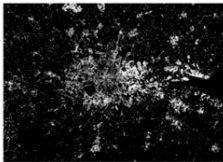
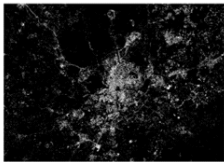
 <p>Katmandou Népal $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 98$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,550 \pm 0,003$ $D_2 = 1,829 \pm 0,009$ Date : 04/11/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Kuala Lumpur Malaisie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 121$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,242 \pm 0,004$ $D_2 = 1,716 \pm 0,006$ Date : /02/2007 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Lagos 1 Nigeria $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 31\,257$ m $D_2 = 1,699 \pm 0,005$ Date : 06/02/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Lagos 2 Nigeria $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,478 \pm 0,004$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Le Cap Afrique du Sud $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 82$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,329 \pm 0,011$ $D_2 = 1,744 \pm 0,007$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Lisbonne Portugal $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,718 \pm 0,006$ Date : 14/03/1989 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Londres Royaume-Uni $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 399$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,202 \pm 0,012$ $D_2 = 1,803 \pm 0,012$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Madrid Espagne $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 337$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,066 \pm 0,016$ $D_2 = 1,786 \pm 0,009$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>

Figure 64-6. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

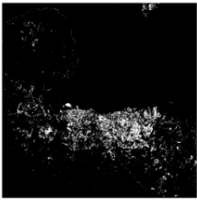
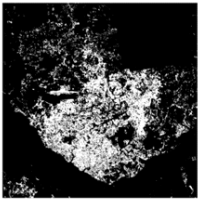

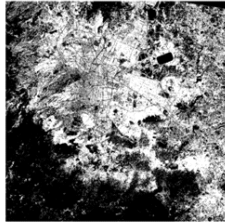

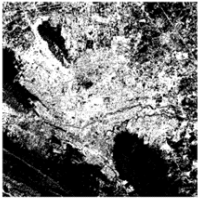
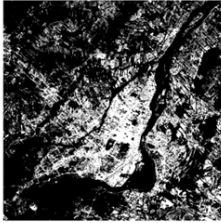
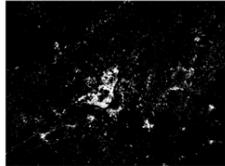
 <p>Managua Nicaragua $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 258$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,223 \pm 0,011$ $D_2 = 1,562 \pm 0,008$ Date : 25/03/1989 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Manaus Brésil $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,672 \pm 0,005$ Date : 11/08/2001 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Melbourne Australie $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 25\,591$ m $D_2 = 1,765 \pm 0,005$ Date : 05/10/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Mexico Mexique $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,836 \pm 0,006$ Date : 21/03/2000 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>
 <p>Miami Etats-Unis, Floride $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 328$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,341 \pm 0,010$ $D_2 = 1,709 \pm 0,012$ Date : 25/05/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Monterrey Mexique $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 76$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,574 \pm 0,007$ $D_2 = 1,828 \pm 0,009$ Date : 28/11/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Montreal 1 Canada $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_C = 138$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,560 \pm 0,003$ $D_2 = 1,806 \pm 0,009$ Date : 08/06/2001 Eléments perturbateurs : Champs Source : Small, 2006</p>	 <p>Montreal 2 Canada $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 773$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,014 \pm 0,003$ $D_2 = 1,713 \pm 0,011$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>

Figure 64-7. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

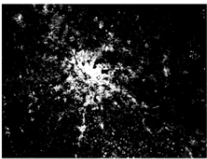
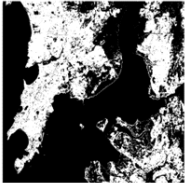
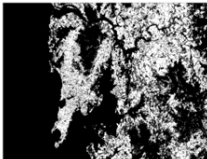
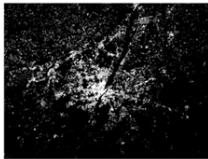
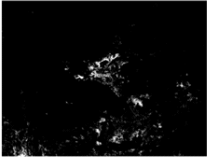


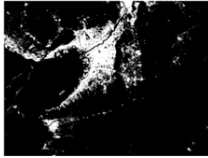
 <p>Moscou Russie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 593$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,273 \pm 0,004$ $D_2 = 1,764 \pm 0,011$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Nuages et leurs ombres Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Mumbai 1 (ancien nom : Bombay) Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,479 \pm 0,006$ Date : 11/01/2001 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Mumbai 2 Inde $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,763 \pm 0,005$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Munich Allemagne $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 436$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,249 \pm 0,011$ $D_2 = 1,760 \pm 0,012$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Champs Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Nairobi Kenya $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 360$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,190 \pm 0,008$ $D_2 = 1,758 \pm 0,009$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>New York Etats-Unis, New York $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,781 \pm 0,005$ Date : 17/09/2000 Eléments perturbateurs : Image légèrement abimée à l'est Source : Small, 2006</p>	 <p>Nouvelle-Orléans Etats-Unis, Louisiane $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 79$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,428 \pm 0,012$ $D_2 = 1,802 \pm 0,007$ Date : 17/09/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Osaka Japon $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,547 \pm 0,003$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>

Figure 64-8. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

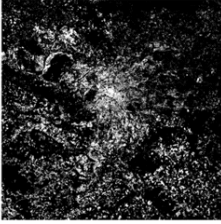
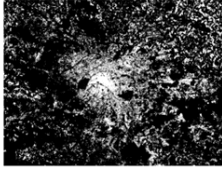
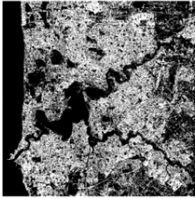
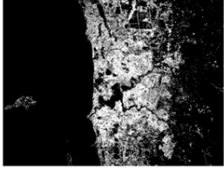
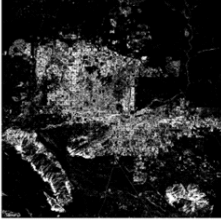
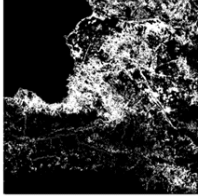
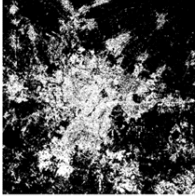
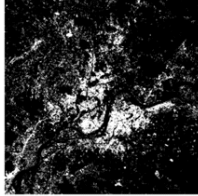
 <p>Paris 1 France $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_C = 238$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,398 \pm 0,003$ $D_2 = 1,830 \pm 0,013$ Date : 09/05/1987 Éléments perturbateurs : Champs Source : Small, 2006</p>	 <p>Paris 2 France $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 234$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,371 \pm 0,010$ $D_2 = 1,816 \pm 0,008$ Date : 1999 Éléments perturbateurs : Champs Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Perth 1 Australie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 71$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,428 \pm 0,014$ $D_2 = 1,835 \pm 0,009$ Date : 23/08/2000 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Perth 2 Australie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 70$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,400 \pm 0,015$ $D_2 = 1,706 \pm 0,007$ Date : 1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Phoenix Etats-Unis, Arizona $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_C = 167$ m $\varepsilon_{max} = 42\,193$ m $D_1 = 1,459 \pm 0,012$ $D_2 = 1,776 \pm 0,009$ Date : 19/04/2000 Éléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>Port-au-Prince Haïti $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 169$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,494 \pm 0,005$ $D_2 = 1,736 \pm 0,012$ Date : 02/07/1999 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Puebla Mexique $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 218$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,564 \pm 0,006$ $D_2 = 1,797 \pm 0,012$ Date : 06/09/2000 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Pyongyang Corée du Nord $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 254$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,286 \pm 0,008$ $D_2 = 1,773 \pm 0,012$ Date : 06/05/2000 Éléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-9. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

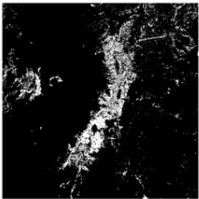
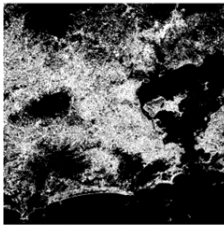
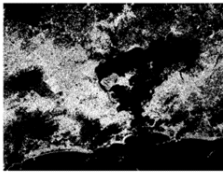
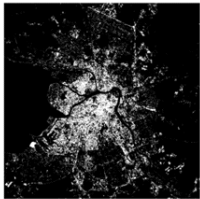
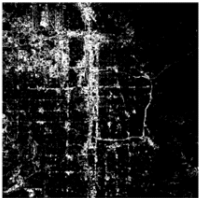
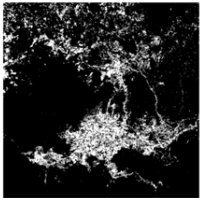
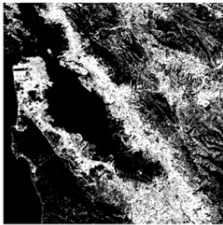
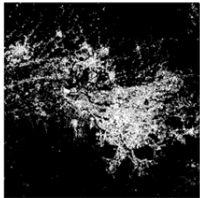
 <p>Quito Equateur $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 526$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,407 \pm 0,004$ $D_2 = 1,610 \pm 0,016$ Date : 14/11/1999 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>Rio de Janeiro 1 Brésil $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_C = 38$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,526 \pm 0,006$ $D_2 = 1,781 \pm 0,007$ Date : 28/10/2001 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Rio de Janeiro 2 Brésil $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 85$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,375 \pm 0,018$ $D_2 = 1,760 \pm 0,005$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Saint-Petersbourg Russie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 218$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,298 \pm 0,011$ $D_2 = 1,718 \pm 0,009$ Date : 25/04/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>
 <p>Salt-Lake-City Etats-Unis, Utah $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 298$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,347 \pm 0,008$ $D_2 = 1,723 \pm 0,010$ Date : 14/08/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Salvador El Salvador $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 238$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,438 \pm 0,006$ $D_2 = 1,684 \pm 0,011$ Date : 31/12/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>San Francisco Etats-Unis, Californie $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,792 \pm 0,005$ Date : 07/07/1999 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>San Jose Costa Rica $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_2 = 1,642 \pm 0,006$ Date : 11/06/2001 Eléments perturbateurs : Nuages et leurs ombres Source : Small, 2006</p>

Figure 64-10. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

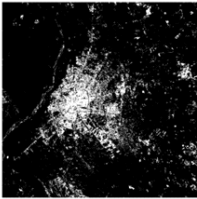
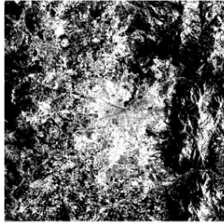
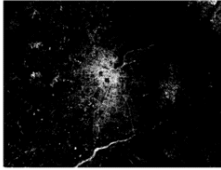
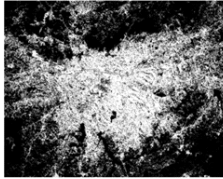
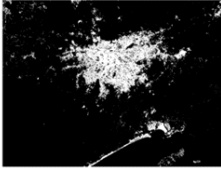
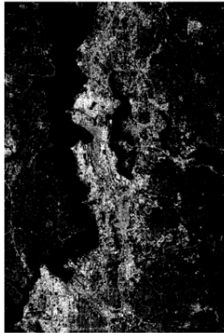
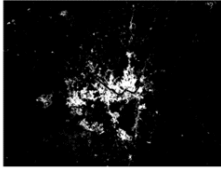
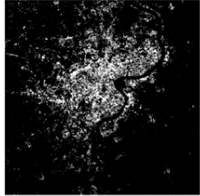
 <p>Santa Cruz Bolivie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 599$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,391 \pm 0,005$ $D_2 = 1,724 \pm 0,018$ Date : 11/08/2001 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Santiago 1 Chili $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_C = 81$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,576 \pm 0,003$ $D_2 = 1,845 \pm 0,009$ Date : 26/12/1999 Eléments perturbateurs : Montagnes Source : Small, 2006</p>	 <p>Santiago 2 Chili $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 698$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,163 \pm 0,010$ $D_2 = 1,642 \pm 0,011$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Cours d'eau au sud Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Sao Paolo 1 Brésil $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,816 \pm 0,005$ Date : 17/06/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>
 <p>Sao Paolo 2 Brésil $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,552 \pm 0,004$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Seattle – Tacoma Etats-Unis, Washington $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_C = 276$ m $\varepsilon_{max} = 42\,193$ m $D_1 = 1,430 \pm 0,008$ $D_2 = 1,781 \pm 0,008$ Date : 25/09/2000 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Séoul Corée du Sud $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 2\,520$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,339 \pm 0,003$ $D_2 = 1,600 \pm 0,016$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Shanghai Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 483$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,364 \pm 0,008$ $D_2 = 1,700 \pm 0,015$ Date : 02/06/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-11. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde


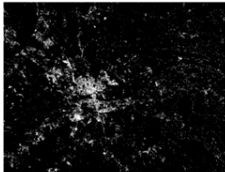
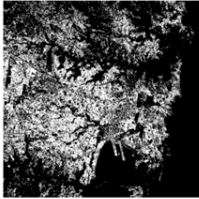

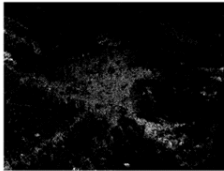
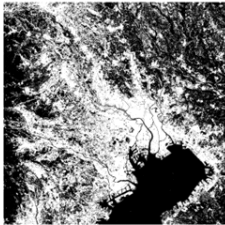
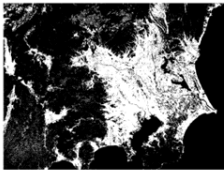
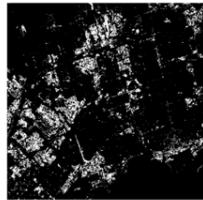
 <p>Shenyang Chine $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 645$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,179 \pm 0,002$ $D_2 = 1,759 \pm 0,012$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Stockholm Suède $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 543$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 1,064 \pm 0,009$ $D_2 = 1,781 \pm 0,012$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Sydney 1 Australie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 87$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,369 \pm 0,011$ $D_2 = 1,800 \pm 0,008$ Date : 08/08/2001 Eléments perturbateurs : Bois Source : Small, 2006</p>	 <p>Sydney 2 Australie $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 234$ m $\varepsilon_{max} = 32\,860$ m $D_1 = 1,162 \pm 0,012$ $D_2 = 1,497 \pm 0,007$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>
 <p>Teheran Iran $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 251$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_1 = 0,916 \pm 0,026$ $D_2 = 1,606 \pm 0,007$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Tokyo 1 Japon $\varepsilon_{min} = 15$ m $\varepsilon_{max} = 42\,193$ m $D_2 = 1,849 \pm 0,005$ Date : 21/05/1987 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Tokyo 2 Japon $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_{max} = 34\,544$ m $D_2 = 1,748 \pm 0,005$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Nuages et leurs ombres Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Toronto Canada $\varepsilon_{min} = 30$ m $\varepsilon_C = 553$ m $\varepsilon_{max} = 28\,283$ m $D_1 = 1,375 \pm 0,004$ $D_2 = 1,713 \pm 0,018$ Date : 05/08/1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>

Figure 64-12. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

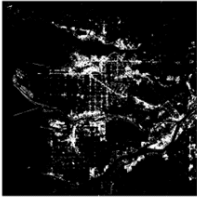

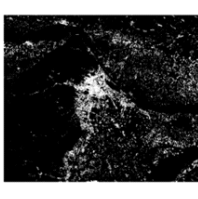
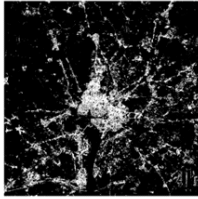
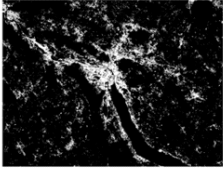
 <p>Vancouver Canada $\varepsilon_{min} = 30 \text{ m}$ $\varepsilon_C = 693 \text{ m}$ $\varepsilon_{max} = 28\,283 \text{ m}$ $D_1 = 1,353 \pm 0,002$ $D_2 = 1,641 \pm 0,013$ Date : 28/06/2000 Eléments perturbateurs : Bois Source : Small, 2006</p>	 <p>Venise Italie $\varepsilon_{min} = 30 \text{ m}$ $\varepsilon_C = 482 \text{ m}$ $\varepsilon_{max} = 28\,293 \text{ m}$ $D_1 = 1,429 \pm 0,001$ $D_2 = 1,637 \pm 0,016$ Date : 09/08/1992 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>	 <p>Vienne Autriche $\varepsilon_{min} = 30 \text{ m}$ $\varepsilon_C = 441 \text{ m}$ $\varepsilon_{max} = 34\,544 \text{ m}$ $D_1 = 1,283 \pm 0,011$ $D_2 = 1,755 \pm 0,011$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Champs Source : Bryant, 2007</p>	 <p>Washington DC Etats-Unis, Virginie $\varepsilon_{min} = 30 \text{ m}$ $\varepsilon_C = 489 \text{ m}$ $\varepsilon_{max} = 28\,283 \text{ m}$ $D_1 = 1,402 \pm 0,005$ $D_2 = 1,761 \pm 0,019$ Date : 05/10/2001 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Small, 2006</p>
 <p>Zurich Suisse $\varepsilon_{min} = 30 \text{ m}$ $\varepsilon_C = 554 \text{ m}$ $\varepsilon_{max} = 34\,544 \text{ m}$ $D_1 = 1,317 \pm 0,006$ $D_2 = 1,781 \pm 0,012$ Date : 1999 Eléments perturbateurs : Aucun Source : Bryant, 2007</p>			

Figure 64-13. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde

Si l'on considère que ces douze images en double sont indépendantes, la combinaison des estimations (valeurs et erreurs) se calcule de la manière suivante : soient $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ et $w = \sum_i w_i$ alors la moyenne vaut $\hat{\mu} = \frac{1}{w} \sum_i w_i D_i$, où D_i est la dimension fractale, et l'erreur vaut $\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{w}}$. Si on applique cette méthode statistique, on peut proposer une estimation globale de la dimension fractale des douze villes en double (Figure 65).

Agglomération	Dimension fractale corrigée	Erreur corrigée
Buenos Aires	1,766	0,004
Calcutta	1,759	0,006
Lagos	1,564	0,003
Montreal	1,769	0,007
Mumbai	1,757	0,004
Paris	1,820	0,007
Perth	1,755	0,006
Rio de Janeiro	1,767	0,004
Santiago	1,764	0,007
São Paulo	1,655	0,003
Sydney	1,628	0,005
Tokyo	1,798	0,004

Figure 65. Tableau présentant les corrections des dimensions fractales des douze agglomérations en double

Ces corrections étant effectuées, il est possible de dresser une statistique de la dimension fractale observée pour chacune de ces agglomérations (Figure 66). On suppose que la loi des grands nombres atténue le bruit contenu dans chacune des images analysées, et qu'il s'agit d'une distribution gaussienne en première approximation. La statistique est centrée autour de la valeur $1,7 \pm 0,1$.

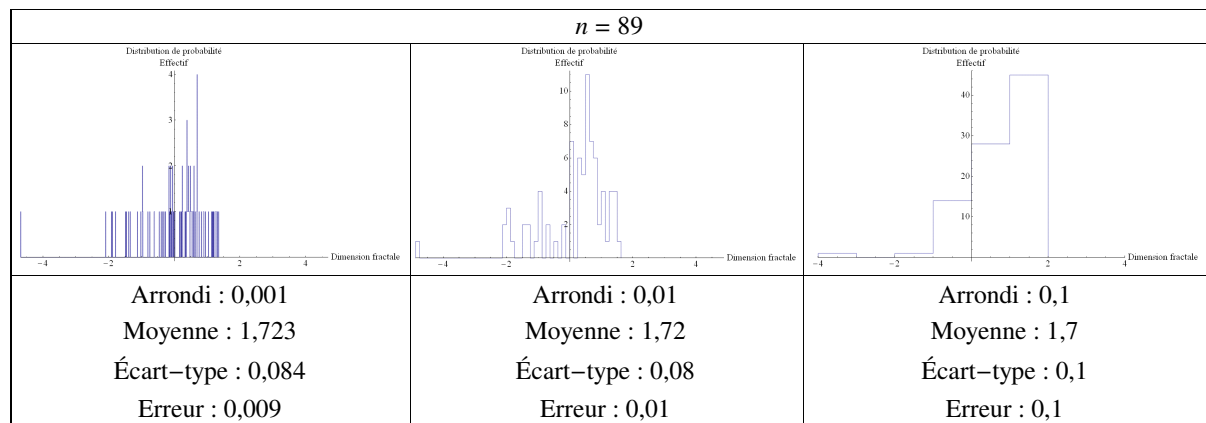


Figure 66. Distribution de probabilité de la dimension fractale centrée et réduite des différentes villes

7.2.2. La critique des données extraites

Pour être certain que cette moyenne n'est pas biaisée par les tailles des différentes images, il faut isoler les deux sources de données et dresser leur statistique respective.

Les données de Christopher Small présentent une distribution statistique (Figure 67) analogue à la Figure 66. Il en est de même avec les données d'Ann Bryant (Figure 68). De plus, la part des deux sources différentes (1,737 et 1,705) dans la valeur moyenne (1,723) est de l'ordre de 50% ($1,737 - 1,723 = 0,014$ et $1,723 - 1,705 = 0,018$). Autrement dit, les deux sources de données sont comparables, l'une ne domine pas l'autre.

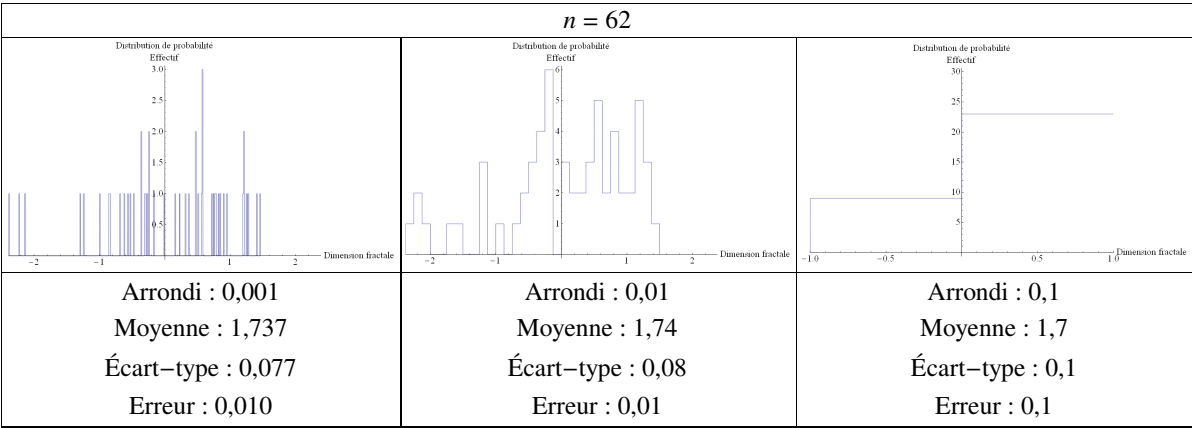


Figure 67. Distribution de probabilité de la dimension fractale centrée et réduite de la base de Christopher Small

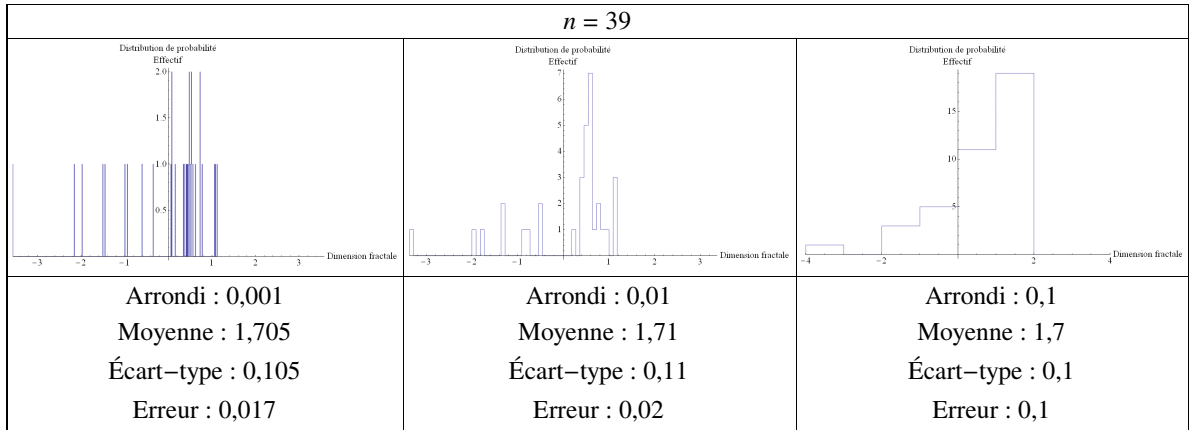


Figure 68. Distribution de probabilité de la dimension fractale centrée et réduite de la base d'Ann Bryant

7.3. Interprétations

Comment expliquer cette dimension fractale constante ? Plusieurs hypothèses peuvent être formulées. Tout d'abord, la dimension fractale est peut-être liée à la localisation des taches sur l'espace terrestre. Ensuite, elle pourrait être reliée à la population contenue dans cette tache. Enfin, elle pourrait être reliée à la surface relative des taches.

7.3.1. Dimension fractale et localisation des taches

La localisation des taches mesurées (Figure 69) permet de constater qu'il n'existe aucun lien entre la répartition et les aires culturelles, même si l'on constate sur la carte quelques nids au niveau des grands foyers de peuplement (Europe, Inde, Chine et partie est des États-Unis) autour desquels les dimensions fractales sont plus faibles que ceux-ci. Autrement dit, la dimension fractale de chacune de ces taches est indépendante de sa localisation. En effet, que la ville suive un plan hippodamien ou un plan circulaire ou qu'elles apparaissent sous forme d'une tache « étoilée », la dimension fractale reste très proche de 1,7. Qu'en est-il du rapport entre la dimension fractale et de la population contenue dans cette tache ?

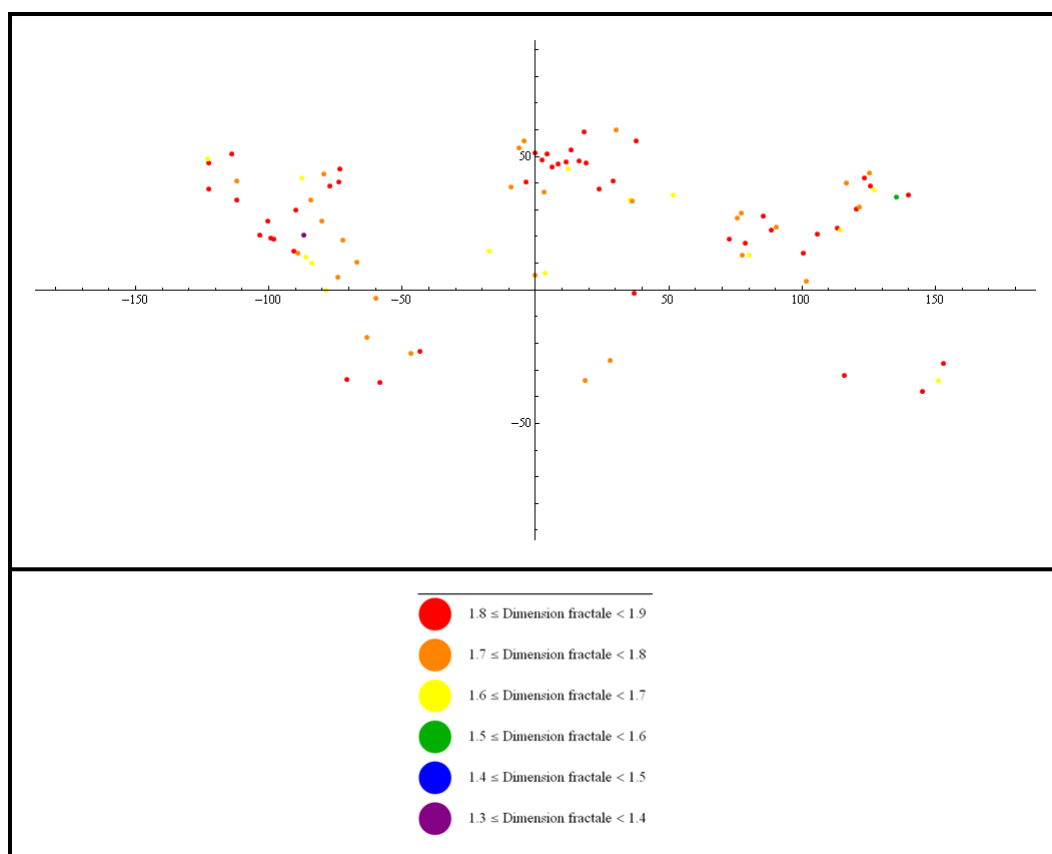


Figure 69. Localisation des dimensions fractales de chacune des taches urbaines mesurées

7.3.2. Dimension fractale et population urbaine

Pierre Frankhauser (1994) a montré qu'il existait des liens entre la dimension fractale et la population urbaine. Les données de la population sont issues de la base *Tageo* qui sera expliquée en détail dans le chapitre 16. La valeur que fournit cette base ne concerne que la ville principale, et non la totalité de la tache formant l'agglomération morphologique. Toutefois, la Figure 70 et la Figure 71 semblent indiquer l'inverse des résultats de Pierre Frankhauser : il n'existe aucun lien entre la dimension fractale et la population de la ville principale de la tache. Qu'en est-il de la dimension fractale et de la surface relative ?

Tache	D_2	Population	Tache	D_2	Population	Tache	D_2	Population
Accra	1.743	1 719 100	Hangzhou	1.77	1 881 500	Port-au-Prince	1.736	1 156 400
Alger	1.711	1 661 000	Hanoi	1.78	1 420 400	Puebla	1.797	1 370 800
Athènes 1	1.81	762 100	Hong Kong	1.565	7 018 600	Pyongyang	1.773	2 811 500
Atlanta	1.671	423 900	Hyderabad	1.75	3 654 900	Quito	1.61	1 466 300
Bangalore	1.709	4 547 300	Istanbul	1.755	9 592 200	Rio de Janeiro 1	1.767	6 150 200
Bangkok	1.818	5 455 200	Jaipur	1.693	2 462 500	Saint-Petersbourg	1.718	4 079 400
Beijing 1	1.739	7 209 900	Johannesbourg	1.66	1 975 500	Salt-Lake-City	1.723	179 900
Berlin	1.752	3 396 300	Katmandou	1.829	743 300	Salvador	1.684	513 400
Beyrouth	1.598	1 185 300	Kuala Lumpur	1.716	1 410 300	San Francisco	1.792	746 900
Bogota	1.689	6 981 500	Lagos 1	1.564	8 682 200	San Jose	1.642	340 100
Brisbane	1.83	1 598 600	Le Cap	1.744	2 984 100	Santa Cruz	1.724	1 196 100
Brussels	1.822	1 005 800	Lisbonne	1.718	560 700	Santiago 1	1.764	4 434 900
Budapest	1.833	1 727 300	Londres	1.803	7 593 300	Sao Paulo 1	1.655	10 260 100
Buenos Aires 1	1.766	11 928 400	Madrid 2	1.786	3 167 000	Seattle-Tacoma	1.781	767 200
Calcutta 1	1.759	4 852 800	Managua	1.562	1 113 100	Seoul	1.6	10 165 400
Calgary	1.754	938 300	Manaus	1.672	1 615 700	Shanghai 1	1.7	13 278 500
Caracas	1.714	1 967 800	Melbourne	1.765	3 666 000	Shenyang	1.759	3 527 800
Changchun	1.743	2 337 000	Mexico 1	1.836	8 705 100	Stockholm	1.781	1 250 400
Chennai	1.641	4 466 900	Miami	1.709	380 500	Sydney 1	1.628	4 277 200
Chicago	1.553	2 862 400	Monterrey	1.828	1 142 900	Teheran	1.606	7 317 200
Cozumel	1.33	69 400	Montreal 1	1.769	3 256 300	Tokyo 1	1.798	8 294 200
Dakar	1.572	2 613 700	Moscou	1.764	11 102 300	Toronto 1	1.713	4 551 800
Damas	1.719	1 614 500	Mumbai 1	1.757	12 622 500	Vancouver 1	1.641	1 836 500
Delhi	1.741	10 400 900	Munich	1.76	1 241 100	Venise 1	1.637	271 800
Dhaka	1.721	5 818 600	Nairobi	1.758	2 504 400	Vienne 2	1.755	1 504 100
Dublin	1.713	1 027 900	New York	1.781	8 091 700	Washington DC	1.761	556 500
Genève	1.756	181 200	Nouvelle-Orléans	1.802	466 600	Zurich	1.781	347 900
Glasgow	1.696	1 081 800	Osaka	1.547	2 596 700			
Guadalajara 1	1.824	1 672 000	Paris 1	1.82	2 107 700			
Guangzhou	1.771	3 244 900	Perth 1	1.755	1 412 900			
Guatemala	1.773	999 400	Phoenix	1.776	1 409 900			

Figure 70. Taches urbaines, dimensions fractales mesurées et population de la ville principale

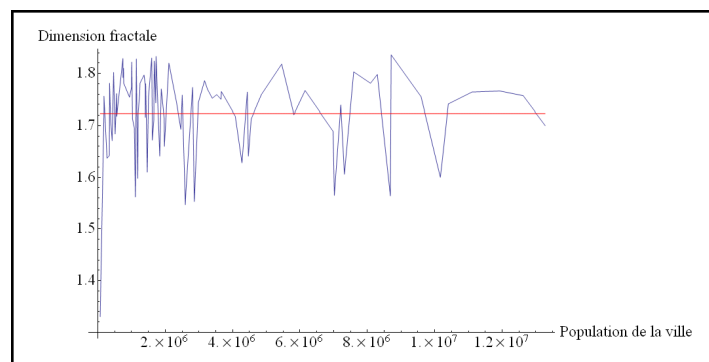


Figure 71. Population de la ville principale et dimension fractale de la tache

7.3.3. Dimension fractale et surface relative

On appelle surface relative S_R le rapport entre la surface que représentent les « pixels villes » S_N en mètre carré sur la surface totale de l'image S_T en mètre carré.

$$S_R = \frac{S_N}{S_T} \times 100$$

S_N et S_T sont calculées à partir de la résolution de chaque image (ε_{min}) et du nombre de « pixels villes » extrait N_V (ou le nombre total de pixels N_T).

$$S_N = N_V \times \varepsilon_{min}^2$$

$$S_T = N_T \times \varepsilon_{min}^2$$

La Figure 72 montre qu'il n'existe aucun lien entre la surface relative et la dimension fractale de chacune des taches.

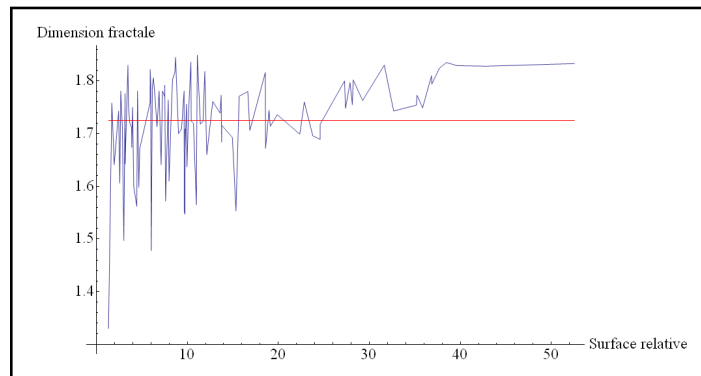


Figure 72. Surface relative et dimension fractale de chacune des taches

L'analyse fractale de l'organisation spatiale de différentes agglomérations mondiales aboutit à un résultat étonnant : pour une même résolution initiale (30 m), on observe une dimension fractale moyenne proche de 1,7, quelle que soit la forme géométrique apparente de la ville. Ce résultat est en accord avec l'hypothèse de Pierre Frankhauser d'après des calculs réalisés sur Berlin et Montbéliard (Frankhauser, 1994), sur Besançon (Frankhauser, 1998) et sur Bruxelles (Keersmacker *et alii*, 2004) qui proposait un modèle théorique de type « tapis de Warlaw Sierpinski » dont la dimension fractale était proche de 1,7.

De plus, cette dimension fractale constante prouve que c'est par l'étude de l'organisation multi-échelle que l'on a pu découvrir un invariant intrinsèque à l'organisation des agglomérations morphologiques que représentent les taches. La dimension fractale permet aussi de classer les différentes villes du monde en fonction de leur niveau d'organisation scalaire, mais sans que cela soit facilement interprétable. Pour preuve, il faut ajouter qu'il n'a pas été possible de relier cet indicateur à d'autres variables « plus classiques » en géographie, telles que la population de la ville principale, la surface de la tache urbaine ou la répartition même de ces taches à l'échelle du monde à nuancer en fonction des pistes évoquées ci-dessus et à vérifier. Quel est donc le processus engendrant ces morphologies si différentes d'un point de vue spatiale ? Ces processus sont-ils eux-mêmes fractales ? Enfin, l'extraction ayant été approximative, il faut vérifier ce résultat sur deux cas : l'un sur un plan de ville (Avignon), l'autre sur une répartition des bâtiments d'une ville (Montbéliard). Cela permettra également de répondre aux deux questions précédentes.

8

L'analyse morphologique d'images à résolution variable de la ville d'Avignon

L'analyse morphologique du réseau hydrographique des Gardons a permis de proposer une méthode d'analyse spatiale de structures linéaires et arborescentes. Toutefois, les mêmes méthodes peuvent servir, par exemple, à l'étude de la morphologie urbaine. Il est vrai que les villes sont des objets géographiques dont la fractalité n'est plus à prouver (Batty et Longley, 1994 ; Frankhauser, 1994 ; Frankhauser et Pumain, 2001). Une étude menée sur l'agglomération d'Avignon a permis d'éprouver cette méthode sur un élément surfacique.

8.1. Présentation des données

Les données de la commune d'Avignon et du Pontet sont issues d'une capture image-écran des cartes disponibles sur le site *Mappy* en mars 2008. La capture a permis d'obtenir six images de résolutions différentes (Figure 73 et Figure 74). Certaines d'entre elles (images 1 et 2 de la Figure 74) ont évidemment dû être capturées par morceaux, ce qui a nécessité de les recoller et a engendré quelques pertes négligeables de pixels. Il s'agit ici d'étudier la limite de la ville en tant que surface à différentes résolutions. Aussi, de toutes les informations contenues sur la carte originale, on peut ne conserver que les contours et la surface de la ville, en noir, et le reste en blanc pour toutes les images (Figure 74). Il est à noter que pour, l'image 1, le réseau intra-urbain apparaît clairement, aussi il a été décidé de l'inclure dans cette image en blanc. Ce choix peut être justifié par la notion d'émergence d'échelle : à cette échelle, on voit ce détail supplémentaire. En effet, à une résolution 3 m, il est difficile de cerner le réseau complet intra-urbain. D'ailleurs, les images aériennes, également disponibles sur *Mappy*, le montrent bien. Pour ce fait, il a été choisi de ne pas représenter les quelques tronçons visibles. Toutefois, le passage entre l'image 3 et l'image 4 se caractérise par une perte d'information due au changement d'échelle : au nord d'Avignon la zone commerciale du Pontet disparaît à la résolution 25 m.

Numéro de l'image	Échelle géographique	Taille du pixel en mètre (pour une précision de 10^{-1} mètres)
1	101 pixels pour 100 mètres	1 pixel pour 1,0 mètres
2	101 pixels pour 300 mètres	1 pixel pour 3,0 mètres
3	101 pixels pour 800 mètres	1 pixel pour 7,9 mètres
4	121 pixels pour 3 000 mètres	1 pixel pour 24,8 mètres
5	101 pixels pour 10 000 mètres	1 pixel pour 99,0 mètres
6	116 pixels pour 40 000 mètres	1 pixel pour 344,8 mètres

Figure 73. Tableau de la résolution des images capturées d'Avignon

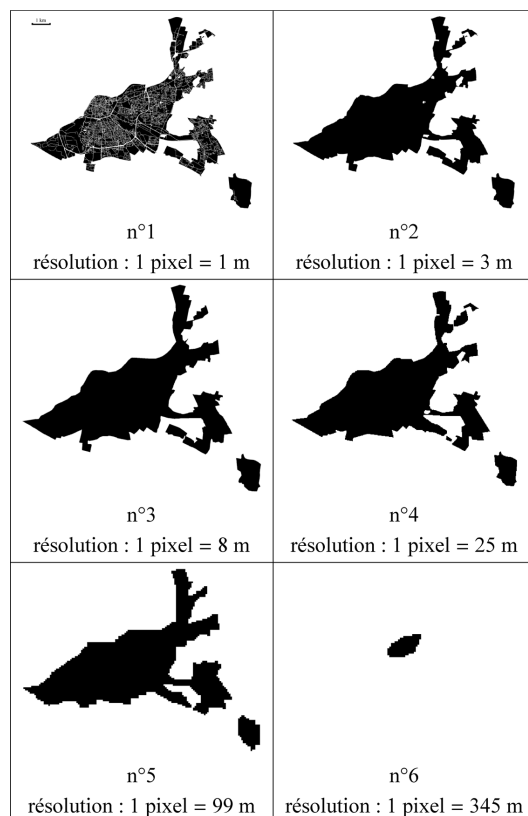


Figure 74. Images capturées de *Mappy* traitées pour étudier la morphologie d'Avignon

L'étendue considérée concerne, à toutes les résolutions envisagées, l'agglomération d'Avignon et du Pontet.

8.2. Étude fractale des données

La « succession d'analyses des niveaux d'agrégation et des passages entre ces niveaux aboutit à l'analyse du système d'échelles » (Piron, 1993). Cette citation résume bien l'état d'esprit dans lequel il faut aborder les données morphométriques de la ville d'Avignon.

8.2.1. L'état de la question

Peu d'analyses fractales de la morphologie urbaine ont considéré une approche réellement multi-résolution. Pourtant, la piste fut lancée par Pierre Frankhauser (1994, p. 130) où, à travers l'exemple de l'agglomération de Berlin, il mesura la dimension fractale à deux résolutions différentes, mais très proches. Il contesta que les dimensions fractales obtenues quelle que soit la méthode utilisée étaient sensiblement différentes. De plus, il note que « sur une carte d'échelle régionale, une ville se présente plus ou moins comme une tache d'encre. Partant du centre on trouve des espaces libres surtout dans la périphérie où la structure déchiquetée donne lieu à des zones libres de plus en plus grandes, si bien que la surface bâtie se dissout en miettes de plus petits habitats. En descendant à une échelle plus détaillée, les grands corridors des voies de transport comme les artères routières et ferroviaires apparaissent. [...] Enfin au niveau des quartiers, on découvre encore plus d'espaces libres en forme de squares et de rues qui suivent, eux aussi, à cette échelle un ordre hiérarchique, par exemple pour la largeur des rues, la grandeur des places, *etc.* Finalement, on pourrait dire que même à l'intérieur des îlots, on découvre des espaces libres encore plus petits, tels que des cours » (Frankhauser, 1994, p. 99-100). Quant au deuxième manuel de référence (Batty et Longley, 1994), il n'évoque même pas la question. La plupart des fractalistes en géographie urbaine continue d'ailleurs à n'étudier leur objet qu'à une seule résolution de référence (Tannier et Pumain, 2005), généralement la plus fine possible.

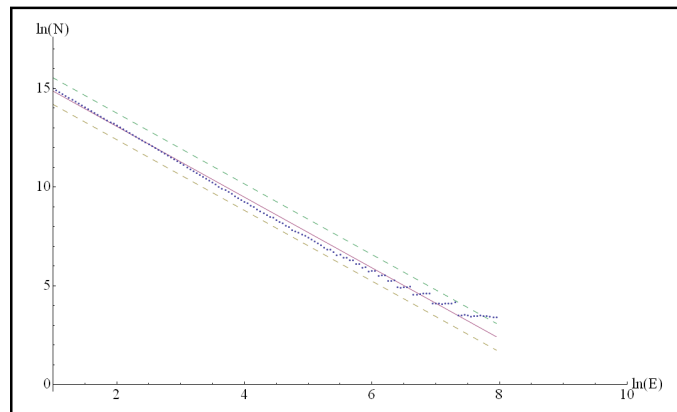
Avec des données de *Mappy*, on ne peut pas descendre jusqu'au niveau du bâti. On doit se contenter des îlots urbains, du moins pour l'image 1 où ils sont apparents. Les images 2 à 6 considérant la ville comme un bloc ne sont pas concernés par cette remarque. En effet, les îlots n'apparaissent pas à ces échelles, si on se reporte à la vue aérienne de la carte. Toutefois, Safouk Al Khalifeh (2008) a mené une analyse fractale à une résolution sur le bâti et la végétation d'Avignon et du Pontet. L'analyse présentée ici n'est qu'un complément explicatif aux résultats qu'il avait obtenus.

8.2.2. L'analyse multi-résolution de la ville d'Avignon

Un calcul de dimension fractale de boîte carrée va être mené sur chacune des images considérées. Le choix de cette méthode s'est imposé de lui-même. Pour des raisons techniques, il est plus facile de programmer sur des images *raster* ce type de dimension sur Mathematica©Wolfram. Le programme utilisé est une adaptation d'un programme de Laurent Nottale (2008) qui avait servi pour analyser d'autres images comme celles des courbes de niveau des Gardons.

8.2.2.1. Traitement de l'image 1

L'image 1 présente toutes les caractéristiques du problème issu de la relation entre la grande étendue et la grande résolution. En effet, l'image est trop grande pour être traitée par le logiciel *Mathematica*. Aussi, il faut la découper. Une partition de $3\,000 \times 3\,000$ pixels a été réalisée. Ensuite, on calcule la dimension fractale de boîtes carrées de chaque découpage. Puis, on recompile les données obtenues pour chaque image en les additionnant (Figure 75). La dimension fractale de l'agglomération Avignon - Le Pontet vaut 1,79 à une résolution d'un mètre. Cette procédure implique une perte d'information aux petites échelles, mais sur une image possédant 117 521 140 pixels, cette solution était optimale par rapport à la réflexion menée.



$$\ln N = -1,792(\pm 0,009)\ln \varepsilon + 16,661(\pm 0,041)$$

Figure 75. Calcul de la dimension fractale de l'image 1

Intervalle de confiance : 99 %

8.2.2.2. Traitement des images 2 à 6

Sur les images 2 à 6 (Figure 74), un calcul de dimension de boîtes carrées a été réalisée directement. La technique de calcul est assez simple. Chaque image a été convertie en bitmap monochrome. Dans ce cas, la couleur noire est codée 0, tandis que la couleur blanche est codée 1. Ensuite, avec la méthode de la partie entière, il est extrêmement simple de calculer une dimension fractale par comptage de boîtes carrées. La taille de ces images étant moins volumineuse que la première, le calcul se fait directement.

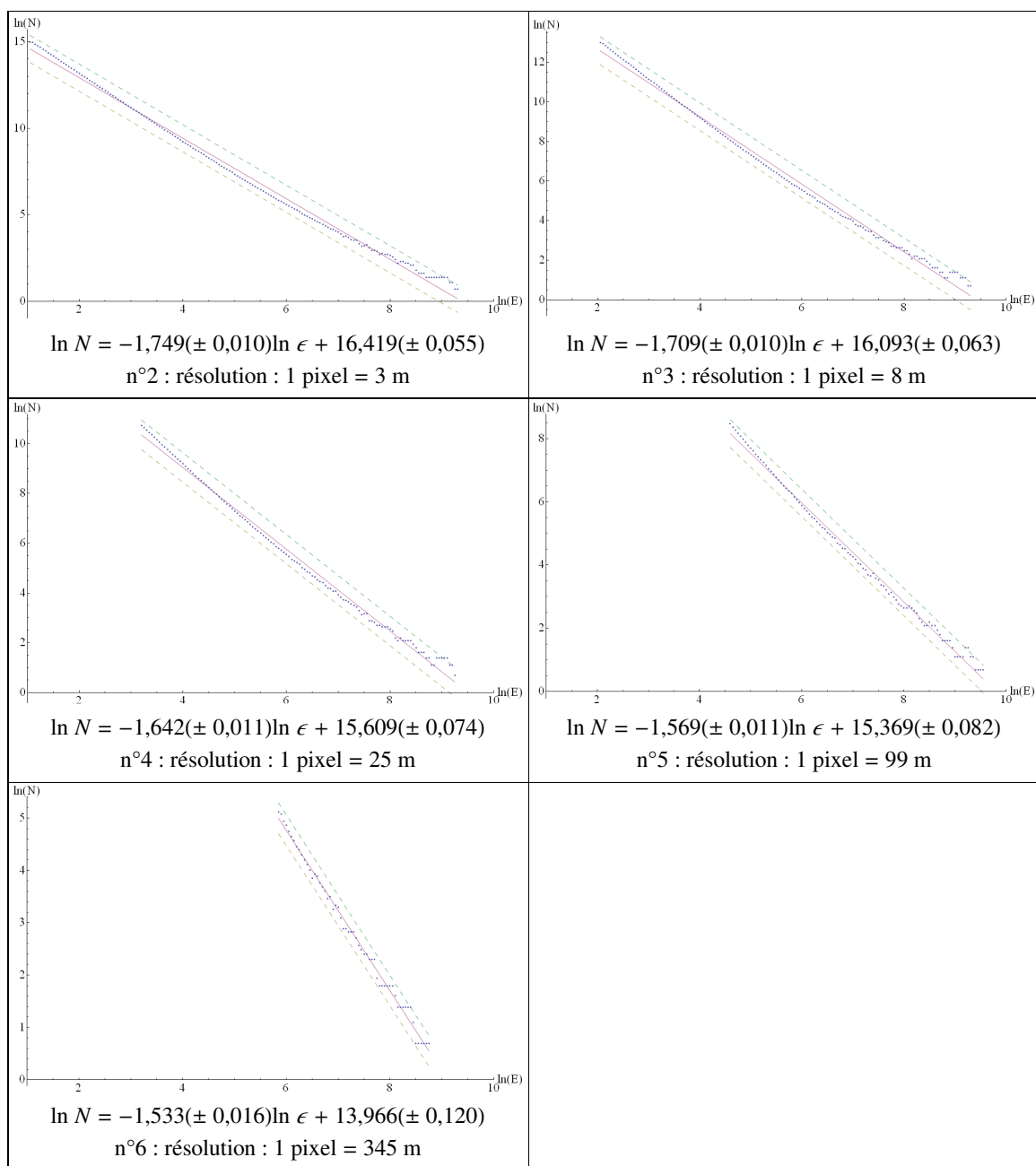


Figure 76. Calcul des dimensions fractales des différentes images

Intervalle de confiance : 99 %

Sur chaque graphique, l'axe des abscisses représente le logarithme népérien de la résolution ; l'axe des ordonnées représente le logarithme népérien du nombre de carré contenant une information. La dimension fractale correspond à la pente de la droite estimée en violet.

8.3. Interprétation des résultats obtenus

La Figure 77 présente la superposition des six droites de régression obtenues. Pour interpréter correctement ces courbes, il faut rappeler que la gamme d'échelle de la courbe représentant la résolution à 1 m n'est pas complète. Ensuite, il faut remarquer que si elle l'était, on aurait une gamme d'échelle comprise entre les facteurs 1 et 22 000 m. Ce qui signifie que la gamme d'échelle suffisante de 10^4 est atteinte. La courbe représentant la résolution 3 m n'est pas significative de ce point de vue (entre 1 et 7 400 m). Il en va de même pour les quatre autres.

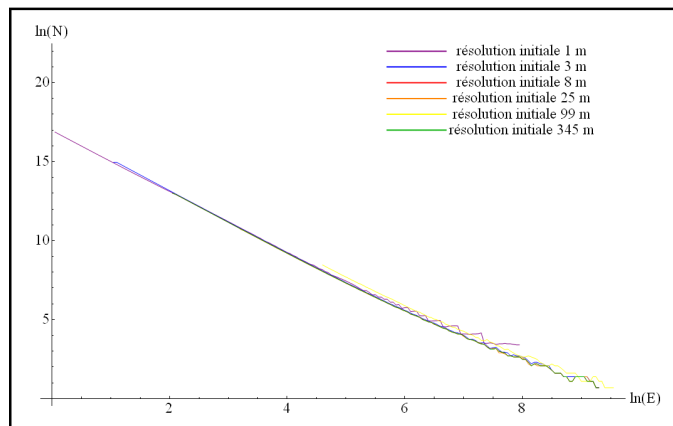


Figure 77. Toutes les courbes estimées

L'objectif de cette étude est de montrer que la dimension fractale peut être utilisée comme mesure de l'information géographique. Le premier constat que l'on peut faire de l'analyse précédente est que chaque image avec une résolution spécifique possède une dimension fractale différente (Figure 75, Figure 76, Figure 78 et Figure 79), ce qui avait été remarqué par Dominique Badariotti (2005) et Gilles Maignant (2007). Cela montre bien que l'irrégularité d'une structure géographique varie en fonction de sa résolution. De plus, la qualité de l'information contenue dans les dimensions fractales est mesurée par leurs écarts-types respectifs. On constate que la qualité de la mesure décroît en même temps que la résolution de manière significative. Dès lors, on peut essayer de rechercher une relation entre la dimension fractale et la résolution. La Figure 80 montre qu'il existe une relation linéaire entre la dimension fractale et le logarithme népérien de la résolution à laquelle elle a été mesurée.

Image	Dimension fractale τ	Erreur	Logarithme de la résolution $\ln \epsilon$
1	1,792	0,009	0,01
2	1,749	0,010	-1,09
3	1,709	0,010	-2,07
4	1,642	0,011	-3,21
5	1,568	0,011	-4,60
6	1,533	0,016	-5,83

Figure 78. Tableau de synthèse des dimensions fractales obtenues en fonction de leur résolution

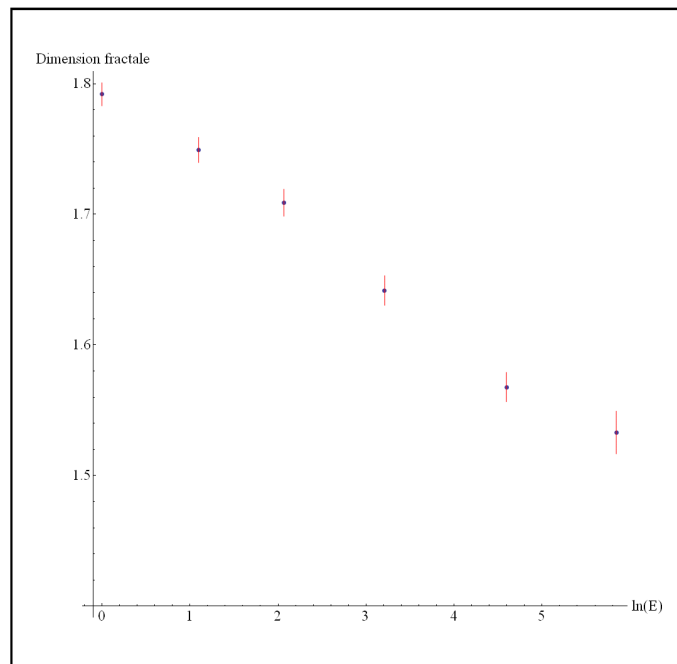


Figure 79. Graphique de synthèse des résolutions en fonction des dimensions fractales obtenues

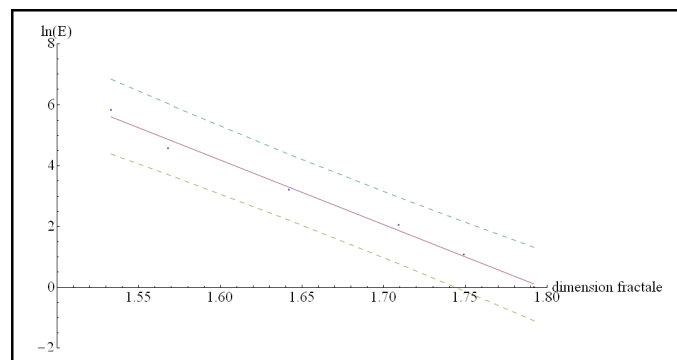


Figure 80. Graphique de synthèse représentant des dimensions fractales obtenues en fonction de leur résolution

Intervalle de confiance : 99 %

Ce modèle linéaire (Figure 80) présente une relation hautement significative. En effet, lorsqu'il y a peu de points ; on peut avoir un doute sur la qualité de l'ajustement. On peut alors calculer la variable t de Student de ce dernier. Cette variable correspond à une combinaison du coefficient de corrélation (valant 0,990 ici) et du nombre de variables n .

$$t = \frac{\rho \sqrt{N-1}}{\sqrt{1-\rho^2}} = 111,242 \text{ (dans ce cas précis)}$$

Plus t est important, plus la relation est significative, à condition d'associer cette valeur aux différentes tables de probabilité existantes de Student qui donnent le risque d'obtenir cet ajustement par hasard. Ici, la probabilité de trouver une telle relation est inférieure à 10^{-4} .

À partir d'elle, on peut proposer un exemple pédagogique autour de la notion de « dynamique d'échelle ».

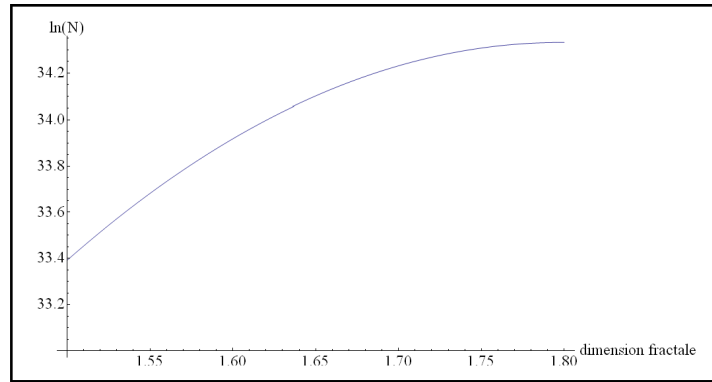
La dynamique d'échelle repose sur une inversion des variables. La variable explicative devient la dimension fractale variable. La variable expliquée devient le logarithme du nombre de boîtes comptées. Dans ce cadre, le logarithme de la résolution $\ln \varepsilon$ devient, par analogie aux lois du mouvement, une « vitesse d'échelle » qui correspond à la dérivée première du logarithme du nombre de boîtes comptées par rapport à la dimension fractale variable.

$$\begin{aligned}\ln \varepsilon &= \frac{d \ln N}{d \tau} = a\tau + b \\ \Leftrightarrow d \ln N &= (a\tau + b)d\tau \\ \Leftrightarrow \ln N &= \frac{1}{2}a\tau^2 + b\tau + c\end{aligned}$$

Toutes les variables sont ici connues :

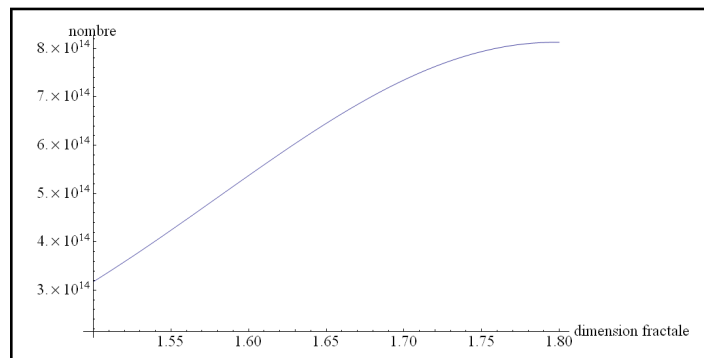
$$\begin{cases} a = 21,255 (\pm 0,946) = \frac{F}{m} = \text{accélération d'échelle constante} \\ b = -38,202 (\pm 1,578) = \ln \varepsilon_0 \\ c = 0 = \tau_0 \end{cases}$$

Ainsi, après identification des variables, le logarithme du nombre de boîtes comptées est relié à la dimension fractale de chaque résolution par une relation quadratique (Figure 81). Autrement dit, le nombre de boîtes comptées, à telle ou telle résolution, diverge en fonction de celle-ci de manière exponentielle (Figure 82).



$$\ln N = 10,627 \tau^2 - 38,202 \tau$$

Figure 81. Relation quadratique entre la dimension fractale et le logarithme du nombre de boîtes comptées



$$N = e^{10,627 \tau^2 - 38,202 \tau}$$

Figure 82. Relation exponentielle entre la dimension fractale et le nombre de boîtes comptées

À partir du moment où le nombre de boîtes comptées ne diverge plus, une résolution plus fine n'apportera plus aucune information. Cela signifie que l'on entre dans un domaine non fractal. Ici, la dimension fractale qui fixe cette limite semble être $\tau_l > 1,70$. Autrement dit, si $\tau > \tau_l$ alors le changement d'échelle n'apportera aucune information supplémentaire sur l'objet géographique qu'est Avignon. A *contrario*, si $\tau < \tau_l$ alors le changement d'échelle apportera une information supplémentaire sur l'objet géographique qu'est Avignon. Cela revient donc à dire que l'on peut définir l'existence d'un objet géographique non fractal lorsque $\tau > \tau_l$. De plus, la valeur seuil de 1,70 n'est pas sans rappeler l'analyse effectuée dans le chapitre 7. On retrouve, dans ce cas particulier, avec des données sans bruits, la dimension fractale moyenne des taches urbaines. Néanmoins, à ces résultats, une réserve peut être formulée. Elle concerne la dimension fractale limite. En effet, il n'est pas impossible qu'il en existe une seconde en allant vers les grandes échelles. Ici, l'unité de mesure la plus précise étant le mètre, on s'est arrêté au mètre, mais il n'est pas impossible qu'en descendant vers une unité plus petite, une seconde limite apparaisse.

Pour conclure, il est bon de préciser que l'analyse menée confirme les résultats de Marie Piron (1993). « Si l'analyse du niveau supérieur rend compte au mieux des mêmes structures [...] que celle du niveau inférieur, alors l'analyse du passage entre ces deux niveaux dégage une perte minimale d'information due à l'agrégation, mais qui ne bouleverse pas l'organisation des données au niveau le plus fin [...] ; dans ce cas, on peut ramener l'étude au niveau supérieur d'agrégation qui conserve alors la stabilité du phénomène observé au niveau inférieur. Si l'analyse du niveau supérieur, en revanche, ne se structure pas comme celle du niveau inférieur, alors l'analyse du passage rend compte d'une même organisation du nuage de points que celle du niveau inférieur [...] ; dans ce cas, les analyses aux deux échelles distinctes apportent deux points de vue différents » (Piron, 1993). Le changement d'échelle transforme l'information soit de manière considérable, soit de manière minimale, ce qui correspond à la définition littéraire des objets fractals. Grâce à la dimension fractale, on peut visualiser les pertes et les gains d'information de manière relativement simple, ce qui est une solution possible au M.A.U.P. (*Modifiable area unit problem*).

Cette méthode permet de travailler sur l'objet ville définie comme étant une tache urbaine particulière où la ville est définie par le négatif de son réseau intra-urbain. Toutefois, une autre définition est possible : celle où la ville est considéré comme un ensemble de bâtiments plus ou moins organisés. Le non bâti correspond aux rues, aux places, aux cours et aux jardins privés ou publics (Allain, 2005). Le chapitre suivant essaiera de répondre à cette question à travers l'exemple de l'agglomération de Montbéliard.

9

Morphologie de l'objet « ville » défini par ses éléments bâtis

La ville peut se définir également avec la répartition de ses bâtiments. Avec le développement des systèmes d'information géographique, de nombreuses communautés urbaines, d'agglomérations ou de communes ont développé des cartes très précises de leurs territoires. Ainsi, la localisation des bâtiments composant la communauté peut être réalisée de manière très méticuleuse ; tel est le cas de la Communauté d'Agglomération des Pays de Montbéliard (Figure 83) qui réalisa un relevé de ses bâtiments au début des années 2000. Un calcul de dimension fractale par comptage de boîtes carrées permet d'estimer la dimension fractale d'une telle structure.

La Figure 84 montre une structure fractale complexe. En effet, la ville est, dès la plus grande échelle au sens géographique, directement de nature fractale $D_1 = 1,355 \pm 0,010$. Lorsque l'on compare ce résultat avec ceux des Gardons (Figure 37 et Figure 38) qui débutent avec un domaine non fractal, il peut paraître surprenant. En réalité, les villes sont toutes organisées dès qu'elles apparaissent dans l'histoire. L'aménagement urbain est pensé dès que les habitations commencent à s'agglomérer. Si l'on prend le cas romain ou grec, dès le départ, les zones d'habitation sont pensées sur un système en damier appelé « plan hippodamien » qui lui-même renvoie à une fractale déterministe rentrant dans la catégorie des tapis de Sierpinski (Batty et Longley, 1994 ; Frankhauser, 1994). Aussi, une ville définie par ses bâtiments sera directement de nature fractale, et c'est l'agrégation progressive de ces derniers qui va engendrer une tache urbaine. Celle-ci sera d'une toute autre nature avec $D_2 = 1,583 \pm 0,004$. Autrement dit, l'échelle de coupure ($\varepsilon_c = 99$ m) entre les deux dimensions fractales prend une signification très particulière. Il s'agit de l'échelle à partir de laquelle l'agrégation du bâti est telle qu'elle devient une tache urbaine où il se fond complètement. Ce résultat peut être considéré comme significatif puisque, ici, la gamme d'échelle est suffisante (de l'ordre de 10^4) pour évaluer la structure fractale.

Cela signifie que la ville définie par ses bâtiments ou la ville définie par sa tache correspond au même objet géographique, mais à une échelle différente. L'articulation entre les deux définitions peut être « optimisée » par une analyse fractale qui révèle l'échelle de coupure à partir de laquelle l'objet « ville » change de définition. Ce changement de nature était plus difficile à identifier pour le cas d'Avignon où l'on avait choisi la définition de la ville par son réseau intra-urbain. Dans ce cas, une transition fractal - non fractal n'existait pas quelle que soit l'échelle choisie, mais il n'y avait pas non plus de transition fractal - fractal tel que l'on peut le constater sur la Figure 84. Ainsi, une articulation scalaire pour une ville s'opère entre le bâti et la tache urbaine. Autrement dit, l'affrontement des différentes écoles de géographie urbaine (Lévy, 2005) peut trouver un terrain d'attente par une approche multi-échelle. Tout dépend de ce que l'on veut étudier.

Ce qui est donc essentiel, c'est d'identifier les échelles de coupure entre les domaines. En-deçà de 100 m, la gamme d'échelle entre dans le domaine d'étude de l'architecture. Au-delà jusqu'à 35 km, il s'agit plutôt de celui de l'urbanité. La question fondamentale est donc de savoir si 100 m est un invariant que l'on peut retrouver pour toutes les villes de monde. D'après les résultats du chapitre 7, il semblerait que non. Toutefois, rien n'est acquis. La seconde question que l'on peut se poser est de savoir à quel niveau se place l'échelle de coupure entre l'urbanité et le réseau urbain. C'est en tout cas sur cet exemple que l'on va organiser un début de réflexion.

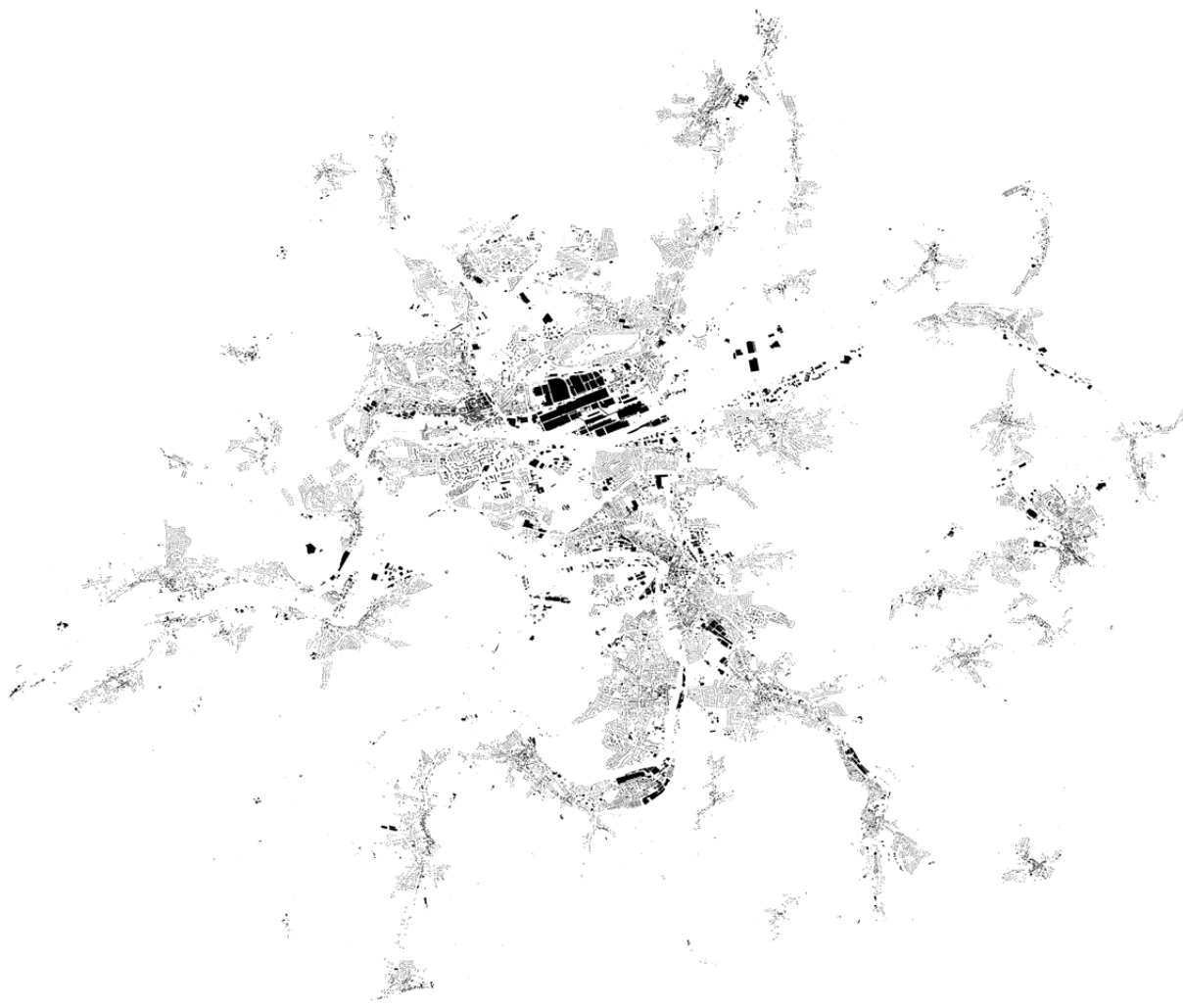


Figure 83. Carte des éléments bâtis de Montbéliard

Échelle : 400 pixels pour 1 000 m

Résolution : 1 pixel pour 2,5 m

Source des données : Communauté d'Agglomération du Pays de Montbéliard (CAPM)

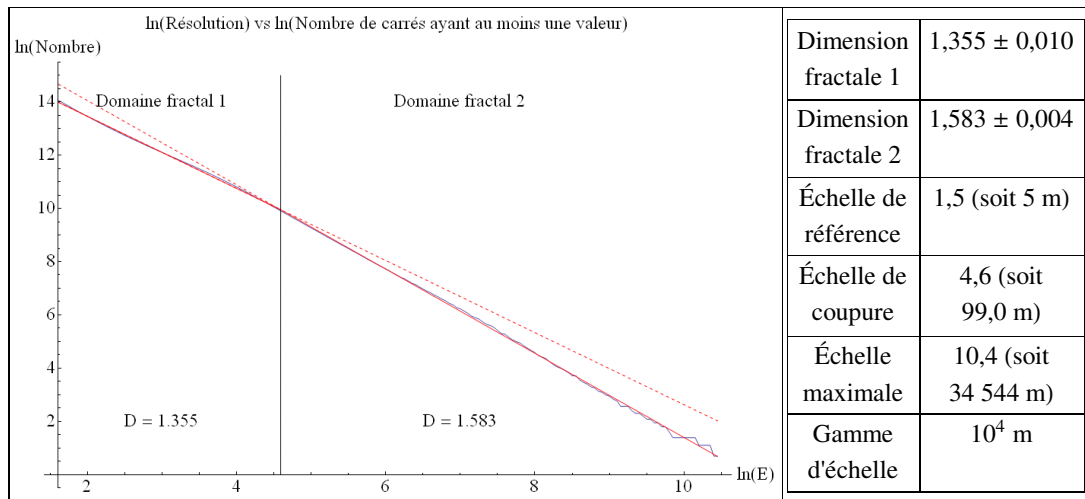


Figure 84. Calcul de la dimension fractale par la méthode de comptage de boîtes carrées

Plus généralement, on perçoit de nouveau l'idée suivante : pour avoir une structure fractale, il faut nécessairement deux niveaux d'organisation. La structure multifractale d'une ville n'est donc guère étonnante en soi (Frankhauser, 1994), mais l'information essentielle de cette structure est l'échelle de coupure. A partir de l'exemple de l'agglomération de Montbéliard, il est possible de généraliser les chapitres 7 et 8 en montrant que le processus intrinsèque qui organise une ville, ou plutôt une agglomération, suit lui-même une logique multi-échelle qui, en l'état des connaissances actuel n'est soit pas quantifiable, soit pas calculable. Il faudra par conséquent établir des hypothèses théoriques de travail permettant de comprendre l'origine de cette morphologie multi-scalaire.

9.1. L'organisation multi-échelle des agglomérations

Avant de commencer cette partie, il faut préciser qu'il est préférable ici d'utiliser la notion d'agglomération morphologique au sens de François Moriconi-Ébrard (1994), c'est-à-dire une ville comprise comme un ensemble de bâtiments engendrant des « vides » et des « pleins », à l'instar du regard qu'ont les architectes et les urbanistes de la ville (Sitte, 1996). C'est par l'existence de cette dualité morphologique qu'une agglomération possède une structure multi-échelle. De ce fait, il faut bien séparer les notions de ville et d'agglomération, car, au sens de François Moriconi-Ébrard, une agglomération peut être soit urbaine, soit rurale, la différence entre les deux se déterminant par la notion de concentration du nombre d'habitants en un lieu donné (l'urbaine ayant une concentration plus importante que la rurale). Il est donc nécessaire de se fixer un seuil qui ne peut être qu'arbitraire. Par contre, la notion de ville est plus liée à des spécificités fonctionnelles qui n'existe pas dans un village. De plus, l'agglomération morphologique doit se distinguer de l'agglomération administrative, car elles ne coïncident que très rarement, le problème s'étant posé dans le chapitre 7. Ces problèmes sémantiques ayant été évoqués, ce chapitre va se concentrer sur l'étude de l'agglomération morphologique en tant qu'objet géographique qui articule des « vides » et des « pleins ». Il faut toutefois préciser que seront considérés comme entrant dans la catégorie des vides, les espaces non couverts par un toit.

9.1.1. Les « vides »

Dans une agglomération morphologique, les « vides » semblent plus nombreux que les « pleins ». C'est par les « vides » que l'organisation multi-échelle est possible, car ils empêchent l'occupation totale d'une surface sur laquelle une population se concentre. Ces vides portent différents noms. Le vide le plus évident que l'on perçoit sur la Figure 83, est celui laissé par les rues et les autres voies de communication comme les voies d'eau et les voies ferrées. Les autres vides possibles sont les jardins privés ou publics, les forêts ou les champs, mais aussi les cours privées et les places publiques. Ces « vides » sont vitaux pour les agglomérations, car ils assurent un renouvellement permanent de l'air (Vitruve, 1999). En effet, si l'on imaginait une agglomération entièrement couverte, l'air serait difficilement renouvelé ; il faudrait prévoir des puits d'aération pour éviter la propagation de maladies. Les vides permettent donc un assainissement relativement efficace de l'agglomération. Ils assurent une déconcentration locale propre à établir des brassages prophylactiques. De ce point de vue, penser le plan d'une agglomération est fondamental (Vitruve, 1999). Ensuite, seulement, les rues ont une fonction de circulation, et les places pensées comme des lieux de rencontre. D'ailleurs, les places se localisent principalement près des lieux de cultes, des lieux d'échanges commerciaux et des lieux de pouvoir. De plus, l'articulation des deux est assez complexe. Deux cas sont possibles : soit les rues se croisent au centre de la place, soit elles contournent la place (Sitte, 1996), ce qui signifie que le vide a besoin d'être lui-même organisé, surtout depuis l'apparition des automobiles. Enfin, les différents espaces verts internes favorisent également cet assainissement de l'air. Les vides sont donc vitaux à plus d'un titre pour une agglomération.

Camillo Sitte (1996, p. 92-96) expliquait qu'un plan de ville s'organise comme une maison. Qu'est-ce qu'une maison sinon une organisation d'un vide à l'intérieur de parois qui constituent les murs ? Ainsi, les couloirs sont ainsi assimilables à des rues, et les pièces à des places fermées. L'organisation est donc identique dans le cas d'une agglomération et d'une maison, car ce qui compte, c'est l'organisation du vide. De plus, la position de la maison sur son terrain dépend fortement de la contrainte du relief. Si l'on peut faire autrement, on ne construira pas une maison sur une pente forte. Dès lors, on peut résumer la nature morphologique des vides d'une agglomération en une structure multi-échelle en quatre niveaux :

- niveau 4 : le vide autour de la ville (champs et forêts) et les voies de communication inter-urbaines (routes, voies d'eau, voies ferrées) ;
- niveau 3 : les places, les jardins publics et les rues ;
- niveau 2 : les cours privées et les jardins privés ;
- niveau 1 : les couloirs et les pièces.

À ces quatre niveaux, il est facile de percevoir qu'il en existe un cinquième : celui du réseau inter-urbain qui, en fonction de la résolution, sera tantôt représenté par une tache urbaine (chapitre 7), tantôt par des points (chapitre 17). Ainsi, l'organisation des vides d'une agglomération, ou d'un réseau inter-urbain peut se résumer en cinq niveaux d'organisation. Pour établir formellement ces niveaux, il faudrait posséder la répartition complète de tous les bâtiments sur un territoire donné. Cette information est connue, puisqu'il s'agit tout simplement du cadastre, mais on ne possède pas à l'heure actuelle des machines ayant une puissance de calcul suffisante pour traiter cette information. Ainsi, l'étude du cinquième niveau ne peut se faire que pour lui-même (chapitre 10 à 17).

9.1.2. Les « pleins »

L'organisation des « pleins » est beaucoup plus simple, puisqu'ils ne font référence qu'à une seule entité : les bâtiments, quelle que soit leur fonction. Logiquement, les « vides » apparaissent plus riches que les « pleins ». Toutefois, que l'agglomération soit urbaine ou rurale, il existe de tout temps et en tout lieu deux types de structures : les monuments à usage collectif direct ou indirect comme symbole du pouvoir, et les maisons ou habitations à usage individuel (personne ou famille) (Vitruve, 1999). Les monuments sont pensés comme devant être « éternels » et « immuables ». Ils sont rarement totalement détruits même s'ils n'ont plus leur fonction initiale. Combien de mairies en France se trouvent dans d'anciens châteaux ? Combien de bâtiments antiques ou médiévaux ont-ils eu plusieurs vies pendant les périodes qui sont postérieures à leur construction ? Ainsi, ils structurent dans le temps et dans l'espace l'organisation de l'agglomération. *A contrario*, la maison n'est pas pensée pour durer dans le temps. Elle n'a pour horizon qu'une destruction programmée. Les architectes disent généralement qu'une maison possède une durée de vie moyenne d'un ou deux siècles au maximum, et encore ; pour les habitations collectives, comme les HLM, la durée est réduite à environ trente ans.

On peut alors résumer les « pleins » en trois niveaux, calés sur les niveaux déterminés pour le « vide » :

niveau 5 : le réseau inter-urbain représenté par un nuage de points ;

niveau 4 : la tache urbaine représentant une surface issue de l'agrégation de l'ensemble des bâtiments ;

niveau 2 : les bâtiments représentant une surface individuelle occupée.

Toutefois, le plein peut générer le vide, car la destruction d'une maison crée un nouveau vide que l'on peut soit combler (reconstruction d'un ou de plusieurs bâtiments), soit laisser (création d'une nouvelle place, d'un nouveau jardin public). Ainsi, le processus de construction est indétachable de l'histoire de l'urbanisme de l'agglomération (Goze, 1976). Il faut donc comprendre comment s'articulent ces vides et ces pleins.

9.1.3. L'articulation des vides et des pleins

L'articulation entre les vides et les pleins semblent s'optimiser dans l'organisation multi-échelle de l'agglomération morphologique. C'est le sens de la dimension fractale constante définie dans le chapitre 7 pour les taches urbaines, à savoir $D = 1,7 \pm 0,1$. Le problème est d'essayer de comprendre la signification de cette valeur.

Pierre Frankhauser (1994) avait proposé de comparer les dimensions fractales mesurées sur les agglomérations aux différentes fractales déterministes existantes. Le modèle qui convient le mieux est un tapis de Sierpinski (Frankhauser, 1997) dont la dimension fractale est proche de 1,7. Pour construire un tapis ayant cette dimension fractale, il faut utiliser les paramètres suivants : un facteur d'échelle $q = 5$ et un nombre de carrés pleins p valant 16. Autrement dit, on partitionne un grand carré en vingt-cinq petits carrés, et on en choisit seize à chaque itération. La constante caractérisant les échelles est alors la dimension fractale qui vaut dans ce cas : $\frac{\ln 16}{\ln 5}$ soit environ 1,7. Les tapis classiques étant peu réalistes, la Figure 85 propose une approche pseudo-aléatoire.

Pour ce, on construit un grand carré dont la taille est $10\,000 \times 10\,000$ pixels. Puis, on le divise en vingt-cinq petits carrés ayant un côté de 2 000 pixels ; on demande à l'ordinateur de choisir de manière aléatoire seize de ces carrés que l'on noircit. Chaque carré noirci est à nouveau divisé en vingt-cinq petits carrés de 400 pixels dont on choisit seize petits carrés, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on atteigne la résolution de l'image (ou la taille du pixel). Un tel processus n'est déterminé que par le choix (ici pseudo-aléatoire) des pixels noirs : un pixel noir peut devenir blanc ou rester noir, mais un pixel blanc ne peut devenir noir : il reste blanc.


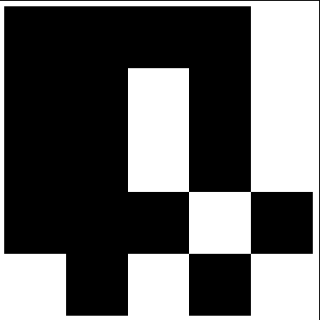

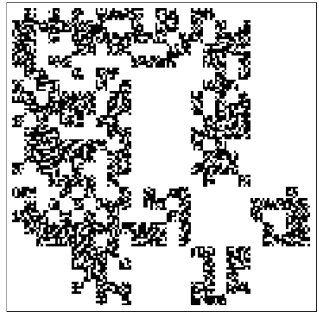
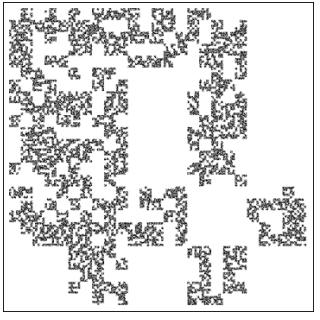
<p>Étape 1 : $\varepsilon = 10\,000$ pixels</p>  <p>Pixels du comptage de boîtes</p> <p>N = 1 B = 0 Pixels réels N = 100 000 000 B = 0</p>	<p>Étape 2 : $\varepsilon = 2\,000$ pixels</p>  <p>Pixels du comptage de boîtes</p> <p>N = 16 B = 9 Pixels réels N = 64 000 000 B = 36 000 000</p>	<p>Étape 3 : $\varepsilon = 400$ pixels</p>  <p>Pixels du comptage de boîtes</p> <p>N = 256 B = 369 Pixels réels N = 40 960 000 B = 59 040 000</p>
<p>Étape 4 : $\varepsilon = 80$ pixels</p>  <p>Pixels du comptage de boîtes</p> <p>N = 4 096 B = 11 259 Pixels réels N = 26 214 400 B = 73 785 600</p>	<p>Étape 5 : $\varepsilon = 16$ pixels</p>  <p>Pixels du comptage de boîtes</p> <p>N = 65 536 B = 325 089 Pixels réels N = 16 777 216 B = 83 222 784</p>	<p>Étape 6 : $\varepsilon = 3$ pixels</p> <p>Incalculable par rapport à l'étendue choisie</p>

Figure 85. Construction d'une fractale pseudo-aléatoire à partir d'un tapis de Sierpinski

Les formes obtenues sont proches de la Figure 83, mais il manque un détail très important : les voies de communication et la centralité. Ce test montre bien l'importance des rues, par exemple, dans la structure d'une agglomération, donc celle de son plan. L'image finale obtenue par la simulation ressemble plus à un labyrinthe qu'à une agglomération de bâtiments (Le Bras, 2000). De plus, si l'on veut respecter l'idée de concentration de population pour constituer une agglomération urbaine. Le nombre de bâtiments au centre d'une telle structure ne peut être vide. Ainsi, la Figure 86 montre une simulation où, initialement, le choix du vide de l'étape n°2 est restreint aux carrés périphériques (soit 16 carrés au lieu de 25), ce qui permet de faire émerger une pseudo-centralité. Les règles précédentes s'appliquent à partir de l'étape n°3. Ces images plus réalistes, si l'on les compare à la Figure 83, ne permettent toujours pas de percevoir une organisation des rues.

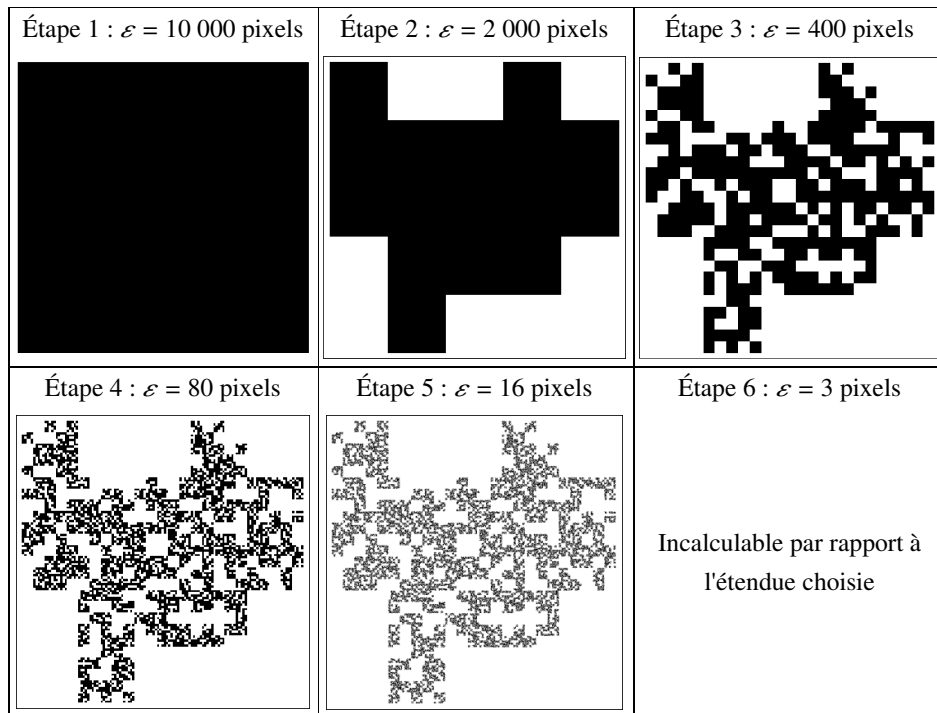


Figure 86. Construction d'une fractale pseudo-aléatoire à partir d'un tapis de Sierpinski avec une condition supplémentaire à la première itération

Sur ce modèle (Figure 86), on estime une dimension fractale par comptage de boîtes carrées à partir de l'image de l'étape n°5. Exceptionnellement, pour ce cas, on utilisera une résolution en pixel, et non en système métrique, comme cela s'est fait jusqu'à présent. La plus basse résolution de cette image est 16 pixels ; l'étendue maximale est 10 000 pixels. La Figure 87 montre le résultat obtenu. La valeur de la dimension fractale mesurée est $1,668 \pm 0,006$ qui est une très bonne estimation de la valeur théorique, à savoir 1,723. Toutefois, sur cette figure, on remarque l'existence d'une échelle de coupure valant environ $\ln(3,5) \approx 33$ pixels. Cette échelle n'est pas du même ordre de grandeur que celle observée dans le cas de Montbéliard (Figure 83 et Figure 84), ou encore dans celui des taches urbaines (chapitre 7). En effet, ici, il s'agit d'un artefact de mesure. Laurent Nottale *et alii* (2009 ; 2010) montrent que lors d'un calcul d'une dimension fractale de boîtes, il existe toujours un biais de l'ordre de 0,7 (en mesure logarithmique). Ainsi, la Figure 88 présente une « loi de transition fractal - fractal » qui donne une meilleure estimation de la dimension fractale aux petites échelles : $D_2 = 1,687 \pm 0,006$ (dimension fractale de boîtes). Aux grandes échelles, le meilleur ajustement donne $D_1 = 1,194 \pm 0,013$ (biais dû à la méthode). À partir de ces deux résultats, on peut revenir sur l'interprétation des transitions fractal - fractal précédentes : soit il s'agit d'une vraie gamme d'échelle qui identifie des structures très fines qui correspondent soit à un objet géographique particulier (l'ensemble des bâtiments), soit à un bruit du à une méthode d'extraction de données ; soit il s'agit d'un biais dû à la méthode d'estimation de la dimension fractale. En l'état, il est impossible de se prononcer pour les mesures effectuées dans les chapitres 7 et 8.

De plus, un calcul de la dimension fractale des pixels blancs a été réalisé. Sa valeur est d'environ 1,9 soit une valeur très proche de 2, c'est-à-dire de la dimension topologique de l'espace support. Dans ce cas, la dimension du fond est donc différente de celle de la forme. De plus, on pourrait énoncer que le vide remplit l'espace, c'est-à-dire que le vide domine le plein. Une géographie « du vide » est donc à construire.

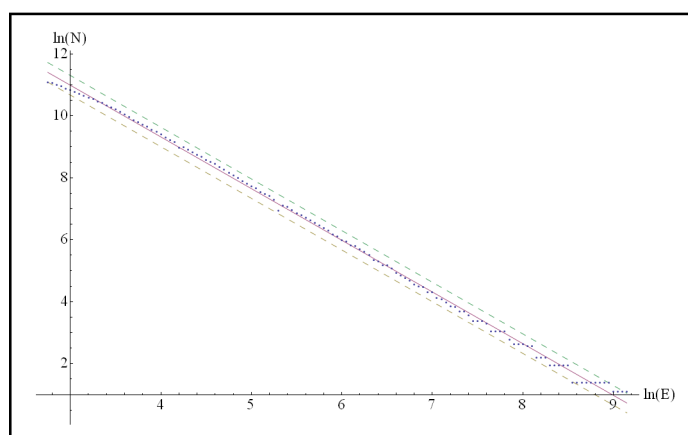


Figure 87. Estimation de la dimension fractale du modèle du comptage de boîtes carrées

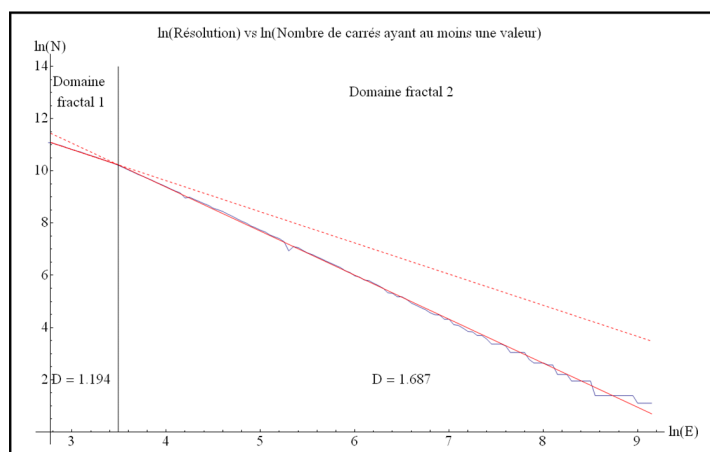


Figure 88. Estimation par une loi de transition fractal - fractal du modèle par la méthode du comptage de boîtes carrées

Quoi qu'il en soit, ces réflexions montrent que l'on peut rapprocher les structures multi-échelles des agglomérations des fractales déterministes obéissant à des règles de répartition pseudo-aléatoire conforme à la dimension fractale des taches urbaines estimée dans le chapitre 7. De ce fait, si l'organisation d'une agglomération est scalaire avant d'être spatiale, la morphogenèse et la morphologie urbaine peuvent se réduire à quatre changements d'échelles :

1. Comment est-on passé du couloir à la rue ? Comment est-on passé des maisons aux monuments (ou inversement) ?
2. Comment est-on passé du plan en damier au plan radio-concentrique ?
3. Comment est-on passé de la rue à la route ?
4. Comment est-on passé de routes indépendantes à un réseau inter-urbain ?

Cette partie a essayé de montrer qu'un raisonnement multi-échelle était sans doute la clé qui permettra d'obtenir un certain nombre de réponses. Pour ouvrir quelques pistes de réflexion, on peut même formuler au moins deux hypothèses de travail, non indépendantes l'une de l'autre, avant de conclure ce chapitre et cette partie.

9.2. Le poids de l'histoire (hypothèse 1)

Les principales villes du monde ont une épaisseur historique plus ou moins importante. Cela se vérifie essentiellement au niveau du plan de la ville, ou, plus généralement, de l'agglomération. Par exemple, les villes proche et moyenne orientales, indiennes et chinoises sont plurimillénaires. D'autres, comme les villes d'Amérique du Nord ou d'Afrique n'ont que quelques siècles d'existence. Le moment de création d'une ville dans l'histoire est très important, car, selon la culture et les capacités techniques, elles n'ont pas la même forme initiale : en Orient, on préfère la ville circulaire ; Bagdad au XI^e siècle en était l'archétype. En Occident, l'urbanisme oscille entre le plan hippodamien et le plan circulaire. En effet, en règle générale, les villes fondées par les Grecs et les Romains suivent un plan en damier, mais, dès le début de la période médiévale, elles s'arrondissent pour devenir radio-concentrique. L'archétype est bien sûr le plan de Paris. En Chine et en Amérique du Sud, le plan en damier était la règle (Beijing, Tenochtitlan, *etc.*), de même qu'en Amérique du Nord, après l'arrivée des colons européens. À l'origine, les formes euclidiennes dominent, comment dès lors deviennent-elles fractales ou multifractales au cours des siècles.

La question de la fractalité peut être divisée en deux sous-problèmes. Le premier correspond au cas d'un plan d'urbanisme parfaitement conçu en damier ou en cercle. Cette régularité est maintenue par les politiques urbanistiques menées (Sitte, 1996), et la fractalité naît de l'agrégation entre les maisons, puis entre les quartiers, avant d'atteindre les limites physiques de la ville. Autrement dit, cela signifie que, dans le cadre, d'une telle planification, seules les rues ou les routes « commandent » régulièrement la fractalité urbaine, les places et les jardins jouant un rôle plus anecdotique. Camillo Sitte (1996) précise que tout cela a été remarqué par l'Union des Associations d'Architectes et d'Ingénieurs Allemands à Berlin en 1874. « 1. La planification d'une extension de ville consiste pour l'essentiel à définir les directions fondamentales de tous les moyens de communications : routes, tramways à chevaux, chemins de fer à vapeur, canaux, qu'il faudra traiter de manière systématique, et, par conséquent, sur une vaste étendue. 2. Dans un premier temps, le réseau des rues ne doit comporter que les axes principaux (en tenant compte, autant qu'il est possible, des chemins existants) et les voies secondaires dont le tracé est déterminé de manière certaine par les conditions locales. La division subséquente du terrain doit être entreprise au gré des besoins à court terme, ou bien laissée à l'initiative privée. 3. La répartition des divers quartiers doit résulter du choix judicieux de leur situation et du respect d'autres facteurs caractéristiques. Elle n'est soumise qu'à une seule contrainte, qui est celle des règlements d'hygiène relatifs à l'industrie » (Sitte, 1996, p. 130-131).

Le second sous-problème suppose une planification moins contraignante. Dans le cas d'une extension de la ville, la route existe avant les habitations, mais elle n'est pas figée. On peut prétendre que cette route est « mobile » dans le sens où il est facile de la déplacer, si elle devenait gênante pour l'urbanisme. Toutefois, si la rue remplace la route, les habitations vont « figer » celle-ci un certain temps, et dans ce cas, la modification du réseau intra-urbain ne sera possible que si une ou des habitations disparaissaient. Autrement dit, la route ou la rue contraignent les habitations ou les monuments ; les habitations ou les monuments figent la rue.

L'organisation urbaine est donc directement fractale quels que soient le plan d'origine ou l'absence du plan à l'origine.

9.3. Le rôle de l'interaction entre le réseau inter-urbain et le réseau intra-urbain (hypothèse 2)

Le rôle des routes dans la morphogenèse et la morphologie urbaine n'est plus à démontrer (Allain, 2005), mais qu'est-ce qui commande la localisation des routes ? La réponse à cette interrogation peut paraître évidente : c'est la position relative des autres villes d'une part, et celle des villages alentours de la ville considérée d'autre part. Certains penseront alors que l'on retrouve le modèle gravitaire, ce qui est incontestable, mais le point essentiel qu'apporte la structuration en échelle, est que ce qui commande l'organisation globale du réseau inter-urbain à petite échelle n'est ni plus ni moins que la position des routes d'une ville à très grande échelle. Cela signifie que si l'on a pu identifier une gamme d'échelles correspondant au bâti et une gamme d'échelle correspondant au réseau inter-urbain. Une nouvelle fois, l'information essentielle de l'organisation d'un espace géographique est donc l'organisation en échelle. Ainsi, on peut proposer un schéma (Figure 89) qui essaye d'organiser les cinq niveaux précédemment cités. Parmi ces cinq niveaux, trois niveaux sont davantage privilégiés en géographie : le niveau 3, le niveau 4 et niveau 5. Toutefois, les niveaux 1 et 2 font partis de ce que l'on appelle la géographie de l'intérieur (Staszak, 2001).

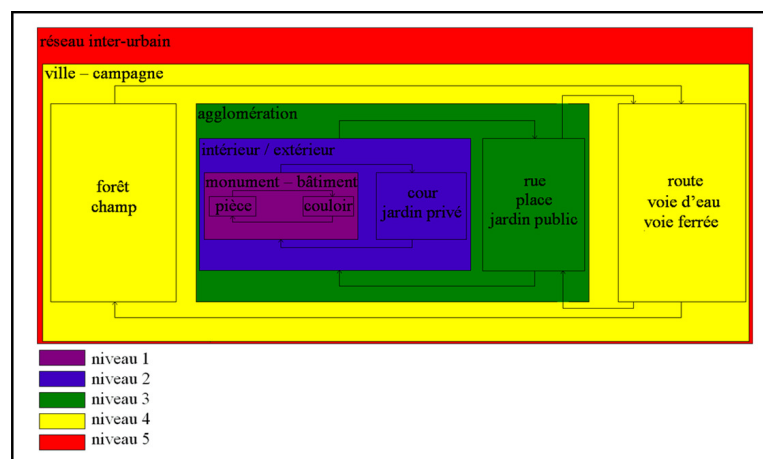


Figure 89. Schéma de synthèse de l'organisation des cinq niveaux d'organisation d'une agglomération

Les résultats des deux chapitres précédents doivent être nuancés. En effet, l'organisation en échelle d'une ville dépend explicitement du niveau de détail servant de référence : la transformation en échelle d'une tâche en éléments bâtis a abouti à l'apparition d'une structure plus complexe dont la modélisation a permis la déduction d'une échelle de coupure marquant la transition entre les éléments bâtis et la tâche urbaine. La définition morphologique d'une ville est donc bien multi-scalaire, c'est-à-dire fractale.

Ainsi, d'après les résultats du chapitre 7, la dimension fractale moyenne de 1,725 doit être comprise comme la mesure d'une dimension fractale des taches urbaines, mesure compatible avec la dimension fractale de la tache de Montbéliard. Toutefois, le chapitre 8 a montré que la dimension fractale dépendait explicitement de la résolution, résultat confirmé par le chapitre 9.

Tous les résultats des chapitres 6 à 9 ont montré des analyses morphologiques purement spatiales, c'est-à-dire que le temps qu'il soit géologique ou historique, n'intervient pas. La partie suivante essaiera de combler cette lacune en proposant une méthode que l'on pourrait appeler « scallo-spatio-temporelle » à travers l'étude de la répartition des châteaux dans l'espace picard et artésien du X^e siècle à nos jours.

Partie 3. Morphométrie et analyse spatio-temporelle en géographie

Étude du cas de la répartition des châteaux dans l'espace géohistorique
du nord de la France (Picardie et Artois)

10

Présentation de l'analyse de la répartition des châteaux en Picardie historique

L'analyse de la répartition des châteaux en Picardie historique est l'aboutissement d'une longue étude commencée en 2004 (Forriez, 2005). Au début de celle-ci, il s'agissait d'essayer d'expliquer de manière géographique un objet archéologique et historique : la motte de Boves. Diverses méthodes ont été proposées : une analyse multi-scalaire au sens d'Yves Lacoste permettant d'étudier les interactions entre Boves et les autres sites castraux, une analyse log-périodique du site de Boves et un début d'analyse radiale autour de ce que l'on avait appelé « pôles organisateurs » dans les limites du comté d'Amiens primitif (Forriez et Martin, 2008 ; Martin et Forriez, 2008). Toutefois, si ces analyses étaient prometteuses, elles étaient loin d'être satisfaisantes.

L'analyse multi-scalaire au sens d'Yves Lacoste était fortement incomplète dans la mesure où la compréhension des événements historiques ne peut s'entendre sans une mise en perspective avec la construction du royaume de France, et plus largement de la construction des États européens tels que l'on peut les connaître aujourd'hui. Ainsi, si l'on peut qualifier cette analyse de « spatio-temporelle », on peut également prétendre qu'elle est multi-échelle au sens large du terme. Quelques analyses complémentaires vont être proposées dans les chapitres suivants.

L'analyse radiale pratiquée alors était également insuffisante. Seules dix localisations (Boves, Moreuil, Amiens, Corbie, Poix, Folleville, Albert, Picquigny, Montdidier, Conty) de l'espace avaient été analysées. De plus, la base de données ne comportait que les châteaux connus du comté d'Amiens primitif, ce qui était une limite à l'analyse scalo-spatio-temporelle de la répartition des châteaux puisque, dès le XV^e siècle, l'Amiénois fut réintégré dans un ensemble territorial plus vaste : la Picardie historique. Il fallait donc augmenter l'étendue de la répartition des châteaux à l'ensemble du nord de la France (Aisne (02), Nord (59), Oise (60), Pas-de-Calais (62), Seine-Maritime (76), Somme (80)), et tracer les autres comtés pour réaliser de véritables études de la structure de ces territoires.

L'objectif de ce travail est de proposer une méthode générale d'étude des distributions scalo-spatio-temporelles de longue durée en géographie. Ce chapitre introductif rappellera la définition relativement complexe d'un château, puisqu'elle ne se limite pas à l'image populaire de ce dernier. Chemin faisant, une présentation des données relatives à la Picardie historique clôturera ce chapitre.

10.1. Les mottes et les châteaux : éléments de définition

Traditionnellement, les historiens écrivent que les luttes du X^e siècle ont engendré, à la fin de celui-ci, une forte croissance, peut-être exponentielle, d'un nouveau type de fortifications et de résidences : le château. Il s'agit d'une fortification et d'un logement individuel construit pour un seigneur (le chef) et sa mesnie (ses guerriers). Cet ensemble est généralement complété par une basse-cour peuplée par des habitants-paysans. Une hypothèse plus récente prétend que les châteaux n'ont jamais eu pour vocation première d'être des forts. En effet, comme le soulignent Jean-Pierre Arrignon et Jean Heuclin, « à partir du milieu du X^e siècle, [les invasions normandes, sarrasines ou hongroises] avaient pratiquement cessé néanmoins le paysage continua de se hérissier de *castra*, *munitiones*, *turres*, *donjio*, un siècle avant le « blanc manteau d'églises ». Leur rôle défensif est donc à écarter. Leur développement fut le signe d'une évolution et d'un éparpillement des pouvoirs de commandement (droit de ban). C'était une affirmation claire de la *potestas*, légitime ou non sur l'environnement. Le château était d'abord le signe de la loi ou de la coutume. C'est pourquoi les rois, les comtes et les immunistes furent les premiers à en élever. Ce pouvait être une motte de terre de quelques mètres, construite en un ou deux mois à coup de corvées publiques, et surmontée d'une tour en bois [...]. Dans l'espace méridional (Provence-Septimanie-Catalogne-Auvergne), mais également aux nombreux et *civitates*, les vestiges antiques étaient nombreux et facilement ré-aménageables [surtout dans l'espace méridional comme le « château des arènes » à Nîmes ou le théâtre d'Orange, *etc.*]. C'étaient des sites dont on conservait le souvenir d'utilité publique et de caractère sacré. L'usage de la pierre traduisait aussi une ancienneté qui confortait la légitimité d'un pouvoir, parfois nouveau. Le *castrum* était alors accolé au bourg, l'*oppidum* élargi, et l'escarpement aménagé [...]. La « maison-forte » visible était un palais où résidait le comte. Néanmoins, en Flandre ou en Normandie, aucun château n'échappait à l'autorité du comte ou du duc. Le châtelain était un officier subalterne, nommé et révocable, pour gérer un *pagus* ou un espace monastique » (Arrignon et Heuclin, 2008, p. 100).

Quoi qu'il en soit, le « château à motte » paraît avoir été l'instrument de la révolution castrale, car ils connurent une période de grande expansion du XI^e au XIII^e siècle. Après, ce type de construction fut abandonné (Debord, 2000). Si les châteaux marquèrent à jamais les mémoires, ce ne fut pas le cas des mottes castrales. Ainsi, il faut rappeler les distinctions et les ressemblances entre une motte et un château.

10.1.1. La motte castrale

Au XIX^e siècle, quelques archéologues ont différencié les *tumuli* pré-historiques des mottes castrales médiévales. Généralement, on différencie une motte d'un *tumulus* par la présence d'un fossé, c'est-à-dire par un caractère défensif. Les premières études sont celles d'Arcisse de Caumont et de Camille Enlart (*in* Debord, 2000, note 30, p. 60). Ils ont analysé quelques chroniqueurs et la broderie de Bayeux. Ils en ont conclu que les mottes sont « un des plus anciens types de châteaux féodaux. ». Toutefois, à cette époque, les mottes étaient étudiées très rapidement, au profit des châteaux en pierre, toujours visibles, qui sont la marque d'une histoire continue et connue. Après ces premières analyses, les historiens, entre la fin du XIX^e siècle et les années 1970, ignorèrent les mottes et les châteaux de pierre, le support matériel ne pouvant faire l'objet d'une objectivation scientifique. Depuis les années 1970, les « mottes » et les « fortifications » semblent de nouveau intéresser les historiens, et surtout les archéologues. En effet, « L'archéologie de terrain permet de mieux connaître les lieux du pouvoir : motte, bourgs castraux et châteaux » écrit Philippe Poirrier (2000, p. 56). Le château est ainsi devenu une source historique, nécessaire à l'étude de la châtellenie, du peuplement, mais aussi à celle des bourgs castraux et des réseaux de communication, du cadre de vie de la société courtoise et du marchandage, dans la mesure où les châteaux furent pendant un temps, un avoir précieux. Sur cette base, la motte devient un objet d'étude à part entière. Avec Gabriel Fournier (1978) et Michel de Bouârd (1975), elle est devenue un objet scientifique (Figure 90).

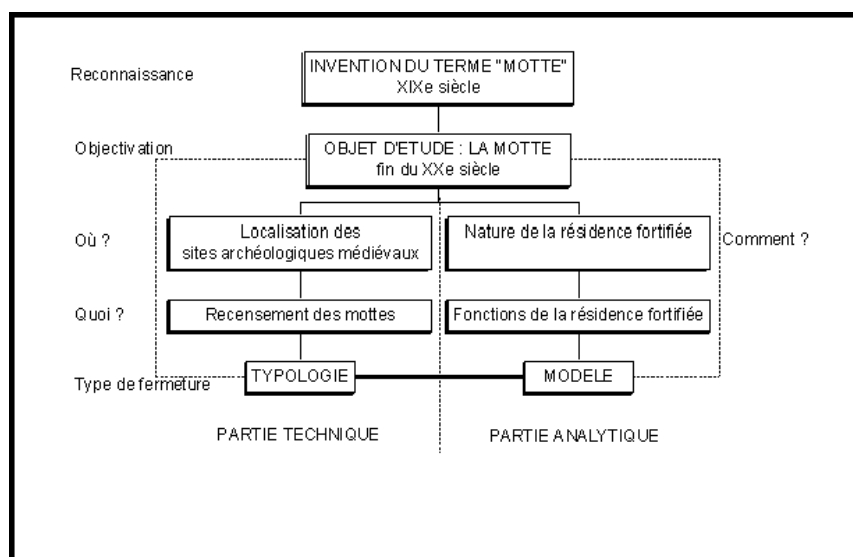


Figure 90. Rappel épistémologique sur l'objet d'étude « motte »

10.1.1.1. La motte, objet historique

Les historiens débattent sur la définition du terme. Le mot « motte » vient du latin *motta* qui signifie l'aspect concret du site fortifié. « L'acte de naissance du château à motte se situe donc dans le courant du X^e siècle, avec un coefficient de certitude satisfaisant » (Rocolle, 1994, p. 40). Le terme semble apparaître pendant la seconde moitié du XI^e siècle, mais la construction de châteaux sur une hauteur est mentionnée par des périphrases avant 1040. Michel Bur (1999) pense que Flodoard (893/894-966), un clerc archiviste de Reims, désignait la motte par le terme *munitio*. Pour Michel Bur, les premiers châteaux sont en bois parce qu'ils coûtent moins cher. À cette idée, il faudrait ajouter que, vraisemblablement, ils le sont car on ignorait combien de temps ils allaient servir. Le terme est rarement cité par les contemporains : en 1040, sur l'acte de fondation de la Trinité de Vendôme ; en 1041, sur l'acte du cartulaire de l'abbaye de Saint-Maixent où il est écrit « *castrum qui dicitur mota* » (La Mothe-Saint-Héraye) ; au XII^e siècle, chez les chroniqueurs Ordéric Vital et Suger. Au terme « motte », on préfère *castrum*, *castellum*, *munitio* pour désigner des fortifications diverses. Michel Bur (1999) définit le *castrum* par un espace relativement vaste, le terme signifie « trancher, couper du reste ». Le *castellum* qui donnera le mot « chastel », toujours défini par cet auteur, est une résidence privée d'un lignage, c'est un espace de moindre dimension, plus facile à défendre.

Pour André Debord, « il s'agit [...] de tertres, qui peuvent être constitués de terre rapportée et, donc, être entièrement artificiels. Mais, en fait, assez souvent, le tertre comporte une partie naturelle, un moyen rocheux retaillé et complété par des apports extérieurs. Il est presque toujours entouré d'un profond fossé et l'ensemble consiste - indépendamment des constructions de bois ou de pierre qu'il porte à son sommet - en un élément défensif puissant, avec une douzaine de mètres de dénivellation entre le fond du fossé et le sommet du tertre » (Debord, 2000, p. 63). Pour Michel Bur, « ce tertre artificiel, fait partiellement ou totalement de main d'homme, soit par accumulation de terre, soit par remaniement d'un relief, est toujours entouré d'un fossé. [...] La terre arrachée au fossé sert à construire le tertre, qui peut aussi, exceptionnellement, être érigé en deux étapes à partir d'une petite enceinte circulaire comblée » (Bur, 1999, p. 31). Le diamètre à la base est compris entre 30 et 100 mètres, le diamètre au sommet, entre 10 et 60 mètres et la hauteur tourne autour de 20 mètres.

Pour Dominique Barthélemy, c'est un « amas de terre de forme tronconique servant de fortification ; souvent flanquée d'une baile (ou basse-cour) » (Barthélemy, 1990, p. 287). Pour André Châtelain, il s'agit d'un « monticule naturel ou plus souvent artificiel, destiné à porter une fortification » (Châtelain, 1996, p. 108). Pour Jean-Marie Pesez, le château à motte est « une butte artificielle, circulaire et tronconique » (DROM, 1999, p. 179-198). On peut ainsi accumuler les auteurs qui ont cherché à définir le terme. Ce qui était important à remarquer, c'est que la définition du terme se trouve généralement dans celle de « château ». Rares sont les auteurs qui ont défini le terme « motte » pour lui-même. Dans les auteurs cités, il n'y a que Dominique Barthélemy (1990) qui différencie dans son lexique « château » et « motte ». L'expression dans laquelle se trouve le terme est de deux formes, soit l'auteur emploie « château à motte », soit il emploie « château sur motte ». La première expression lie implicitement la construction défensive à son support : la motte de terre, ce qui signifie que la construction de la motte et celle du château sont étroitement liées. Le château et sa motte sont étudiés ensemble, formant un tout : pas de château sans motte, pas de motte sans château, tandis que « château sur motte » matérialise plus un intérêt pour le château construit, achevé, et non pour son support de construction qu'est la motte.

10.1.1.2. L'archéologie et les mottes

Les historiens laissent aux archéologues l'effort de recensement des mottes afin d'en dresser l'inventaire et d'en programmer l'éventuelle fouille. La problématique d'étude est simple : pourquoi le nombre de sites aristocratiques et fortifiés augmente-t-il fortement à la fin du X^e siècle ? Quelles sont les fonctions de ces mottes si nombreuses ?

La motte est une résidence fortifiée de l'aristocratie châtelaine. C'est le point de départ de nombreuses châtelainies. La fonction de résidence est liée à une fonction politique. Sont-ce des résidences privées ou publiques ? On possède la mention et l'existence de mottes d'attaque ou de siège. Il existe des petites mottes avec des tours de guet. Les mottes sont donc des objets multifonctionnels. « Une des grandes acquisitions de l'archéologie médiévale de ces trente dernières années a été d'attirer l'attention sur les mottes : il s'est ainsi développé une recherche qui a permis de renouveler complètement la problématique historique. L'importance des châteaux de terre - et, en particulier, de la motte, qui restera comme le symbole de l'essor de la fortification individuelle et de la révolution castrale - ne doit cependant pas faire oublier que celle-ci s'est accomplie de bien d'autres façons et en s'appuyant sur d'autres formes castrales » (Debord, 2000, p. 77). L'auteur rappelle qu'il y a, au moins, deux structures connues : la motte dans la France du nord et les *roqua* dans la France du sud ou en montagne.

Les archéologues préfèrent l'expression « château à motte ». Certains abandonnent même le terme « château » pour celui de « motte » tout court. L'objet « motte » prend son indépendance par rapport au château. Cela se justifie par le fait que, dans la logique chronologique, on a d'abord construit la motte de terre avant de construire le château, mais qu'est-ce qui prouve qu'elle a été élaborée peu avant la construction du château ? Généralement, rien. D'où l'intérêt d'étudier cette structure pour elle-même. À partir de là, les archéologues interviennent, mais malheureusement peu de mottes ont été fouillées en France.

10.1.1.3. La motte, une forme spatiale

La motte est une forme saillante et prégnante qui se déploie dans l'espace géographique. Elle peut donc faire l'objet d'une étude géographique. Cette forme s'est cristallisée aux alentours du X^e-XI^e siècles en Occident, comme un symbole de pouvoir, à un moment où il n'existait plus de pouvoir central suffisamment puissant pour assurer la sécurité et, plus généralement, l'organisation de l'espace occidental médiéval. C'est un processus qui s'inscrit dans une différenciation spatiale par fragmentation des territoires et cela se traduit dans le processus de la construction de points singuliers. La motte est avant tout une production anthropique, c'est ce qui la différencie des buttes témoins en géomorphologie, par exemple. Généralement, la motte est tronconique, et sert de support à un bâtiment à caractère défensif. Comme la motte structure l'espace à des niveaux différents, il peut s'agir d'un objet géographique. D'abord, elle donne sa cohérence à un complexe politique et religieux. Ensuite, elle s'articule au sein d'un réseau local de mottes et de châteaux qui se manifeste par différentes alliances matrimoniales, différentes guerres privées, *etc.* Enfin, même si la plupart de ces mottes ont été détruites par les agriculteurs ou par l'érosion, elles n'en demeurent pas moins fondamentales pour comprendre certains territoires, et en particulier, les formes dans les terroirs circulaires (Soyer, 1970).

10.1.2. Les châteaux

Ainsi, si le terme « château » est employé par commodité dans la plupart des récits historiographiques (Cuvillier, 1998), cela vient des difficultés à maîtriser le champ lexical des termes ou expressions employés dans les sources. Par exemple, « *castrum* », « *castellum* », « *munitio* », « *bastimentum* », « *turris* » renvoient plus au mot français « forteresse » qu'au terme « château ». De plus, dans les sources, on distingue clairement l'aspect militaire de l'aspect politico-administratif. Ainsi, ce dernier est souvent désigné par « *firmitas* » (fermeté, fertilité) dans le nord et « *fortalitas* » ou « *fortitia* » dans le Midi. Pour compliquer davantage le problème, on rencontre souvent dans les sources le terme « *oppidum* » qui désignait originellement une ville fortifiée à l'époque antique, mais qui, à l'époque du Moyen et du Bas Moyen Âge, renvoyait à ce que l'on appelle aujourd'hui « château ».

Pour résumer, le château était un lieu de pouvoir politique et administratif qui avait souvent l'apparence d'une forteresse et qui contrôlait un territoire bien défini : la châtellenie. Différentes phases architecturales peuvent être proposées. Aux IX^e et X^e siècles, les forteresses étaient très proches, dans leur forme, des camps fortifiés romains : un fossé, une palissade, et éventuellement une motte dont l'origine est plutôt normande. Aux X^e et XI^e siècles, les premières tours de guet apparurent à l'intérieur des enceintes. Elles avaient pour fonction la surveillance des territoires ruraux. Autrement dit, leur implantation ne se fit pas n'importe où puisque leur objectif était de contrôler un territoire donné. Le choix du site était donc fondamental. D'ailleurs, beaucoup de « mottes improvisées » furent abandonnées dès le X^e siècle. Aux XI^e et XII^e siècles, les premiers châteaux en pierre apparurent. Leur organisation était simple : une enceinte, et une haute tour rectangulaire que les historiens du XIX^e siècle appelleront « donjon ». Parallèlement, les basses-cours apparurent, et une nouvelle organisation politico-administrative vit le jour. Aux XIII^e et XIV^e siècles, l'organisation des châteaux devint de plus en plus complexe. Les tours s'arrondirent, les mâchicoulis, les ponts-levis, les archères et les arbalétriers apparurent. Toutefois, ce ne fut pas suffisant pour contrer les canons qui firent leur apparition en Europe. Ainsi, du XV^e au XIX^e siècles, le château perdit progressivement ses fonctions militaires pour devenir une résidence qui était le symbole du pouvoir local.

La Picardie historique et l'Artois offrent un exemple remarquable, puisque les châteaux y furent très nombreux, et les territoires fortement affectés par divers redécoupages au cours des siècles.

10.2. Les données

L'étude de la distribution spatio-temporelle des mottes et châteaux de la Picardie historique qui englobe le Pas-de-Calais, la Somme, l'est de l'Aisne et le nord de l'Oise (Forriez, 2005), étendue à l'Artois (Forriez, 2007) a été réalisée à partir de différentes sources de données. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas facile de localiser et de dater les mottes et les châteaux. Ainsi, une présentation des sources et de la nature des données est fondamentale.

10.2.1. Les sources

Cette base de données a commencé à être construite en 2004 (Forriez, 2005). À l'époque, la carte réalisée a été faite sur une « projection non terrestre » ce qui est un choix qui peut quelque peu dérouter les cartographes. De plus, je ne disposais pas de bases de données telles que *Corine Land Cover*, et la carte réalisée est issue d'une numérisation. Les cartes utilisées comme fond sont *60 km autour d'Amiens* (2004) et *60 km autour de Lille* (1996) dont le système de projection est ED50. J'y ai relevé systématiquement toutes les communes centres et tous les hameaux dépendants de ces communes, soit près de 3000 localisations. À partir de là, j'ai reporté toutes les informations que l'on connaissait sur le patrimoine castral de chacune d'elle.

Pour constituer la base de données des mottes et châteaux, aucune recherche en archives n'a été menée. Un premier dépouillement a été fait à partir de la base de données du *Quid 36 000 communes de France* qui recense le patrimoine national et fournit quelques indications chronologiques. Cette étape préliminaire a permis de répondre à la question : « où sont-les châteaux ? ». En effet, la répartition des châteaux existant ou ayant existé est mal connue pour deux raisons. D'abord, les travaux réalisés par les historiens sont généralement des monographies ; il est donc difficile d'en faire un panorama complet, mais surtout, les châteaux n'ont été étudiés que, dans une optique historique. Les travaux en histoire de l'art et en archéologie n'ont pris de l'ampleur qu'à partir de la seconde moitié du XX^e siècle. Des dictionnaires apparaissent alors (MCFAPH, 1973 ; Christ, 1978 ; Salch, 1979 ; Babelon, 1989). Une lecture systématique de ces dictionnaires par ordre alphabétique a été réalisée. Pour chaque commune, il fut vérifié les informations de la base du *Quid*. La quasi-totalité des châteaux cités par celle-ci a été retrouvée, et les informations historiques ont pu être corrigées. De plus, des châteaux oubliés ont pu être localisés.

La base de données constituée regroupe 1413 mottes ou châteaux (état 2008) répartis dans les centres d'habitations des communes et dans les différents hameaux sous la dépendance de cette commune centre.

10.2.2. La nature des données

La nature des données est double. Il s'agit d'une localisation spatiale et d'une localisation temporelle.

10.2.2.1. La localisation spatiale

Bizarrement, localiser les mottes et les châteaux est un exercice extrêmement périlleux, car mise à part les hauts lieux touristiques, la question : « où sont ou étaient les mottes et les châteaux de la Picardie historique ? » n'a pas de réponse claire. C'est une des raisons pour lesquelles la base de données initiales n'a pas été refaite. On ne peut pas localiser très précisément ces entités spatiales. L'idéal eût été de réaliser une localisation G.P.S. de chaque entité. Toutefois, lorsque le château n'existe plus et n'a pas laissé de ruines visibles, comment le localiser précisément ? Aussi, les foyers d'habitats relevés lors de la numérisation des cartes semblent être un bon compromis pour fournir une localisation des châteaux avec une précision proche du kilomètre. Cette information est essentielle pour l'analyse fractale, car elle ne pourra pas avoir une résolution inférieure à deux kilomètres, sans prendre en considération l'erreur possible due à l'absence d'information. Ceci précisé, il existe tout de même des facteurs de localisation. La plupart du temps, les mottes ou les châteaux s'installent le long des anciennes voies romaines et des cours d'eau ainsi que sur les micro-reliefs (Soyer, 1970).

10.2.2.2. La localisation temporelle

Il est très difficile d'obtenir des dates fiables à 100%. La plupart du temps, d'ailleurs, les dictionnaires de châteaux ne fournissent qu'un intervalle de temps très vague, généralement de l'ordre du siècle. Heureusement, la statistique a développé des techniques pour ce que l'on appelle les données censurées (Morgenthaler, 2007, p. 362-365). Elles correspondent au cas où l'on ne dispose pas d'informations précises, mais un intervalle de temps plus ou moins large. Son information est donc incomplète. Néanmoins, pour réaliser des calculs, on prend généralement la valeur centrale de cet intervalle et on note généralement une telle donnée avec un astérisque.

Cependant, il faut distinguer les données censurées des données manquantes. En effet, une donnée manquante correspond à un vide : on ne sait rien, si ce n'est qu'il y devrait y avoir quelque chose à ce moment-là. Une donnée censurée, par contre, est connue de manière floue, mais au moins, on sait qu'elle est comprise dans un intervalle plus ou moins large.

En effet, lorsqu'un dictionnaire informe que le château fut construit au XVIII^e siècle, cela signifie qu'il a été construit entre 1701 et 1800, ou encore : $\Delta t = 1751 \pm 50$ ans (la dernière valeur de l'intervalle étant exclue). Ceci est l'occasion de rappeler que notre calendrier chrétien débute à l'an 1, et non à l'an 0 comme certains ont voulu nous faire croire lors du soi-disant « passage à l'an 2000 », qui fut la dernière année du XX^e siècle. On peut affiner l'intervalle lorsque l'on connaît le nom du commanditaire du château et que l'on possède ses dates. Toutefois, dans de nombreux cas, l'information est beaucoup moins précise, par exemple, au « Moyen Âge », « à l'époque moderne », ou « à l'époque contemporaine ». Pour le Moyen Âge, les premiers châteaux apparaissent autour de l'an mil, son intervalle est donc $\Delta t = 1251 \pm 250$ ans ; pour l'époque moderne : $\Delta t = 1651 \pm 150$ ans ; pour l'époque contemporaine, on sait que les derniers châteaux ont été construits autour de 1925, après il ne s'agit que de restaurations ou de reconstructions, ce qui donne l'intervalle : $\Delta t = 1863 \pm 62$ ans. Heureusement, on arrive à réduire ces intervalles extrêmes lorsque l'on connaît la date de destruction du château. Par exemple, s'il a été détruit en 1427, sans aucune autre date, cela permet de conclure qu'un château a pu exister entre 1001 et 1427 ce qui donne l'intervalle $\Delta t = 1201 \pm 200$ ans. Enfin, on sait que les mottes ont été bâties majoritairement entre l'an mil et 1300, cela fournit l'intervalle $\Delta t = 1151 \pm 150$ ans.

Pour mener à bien l'étude spatio-temporelle, une fiche (cf. ci-dessous) a été réalisée pour recueillir les données relatives à l'espace géographique et à la chronologie historique de chaque motte et/ou château. Cette fiche sert de support dans la construction d'un système d'information géographique sur *MapInfo 6*. Chaque fiche a été systématiquement remplie manuellement avant d'être informatisée. Ce protocole peut sembler fastidieux, mais comme les dictionnaires fournissent généralement des informations complémentaires, le passage par écrit reste indispensable pour conserver une trace de la réflexion initiale. Cela permet de trouver les erreurs de saisie. La base de données est donc facilement corrigeable. Pour l'heure, on effectuera l'analyse sur la base à l'état 2008.

[illegible]

La base de données « Catiau », malgré toutes ses imperfections, permettra la construction d'une méthode scallo-spatio-temporelle pour l'analyse d'un espace géohistorique. Avant d'effectuer une telle analyse, il faut rappeler les grandes étapes de la déconstruction de l'Empire romain et de la construction de l'État français. Étapes dans lesquelles la Picardie et l'Artois jouent un rôle géostratégique de premier ordre.

11

Géohistoire du nord de la France de la fin du Haut Moyen Âge à nos jours

Une étude de l'espace-temps en géographie fait nécessairement appel à des connaissances historiques sur la construction des territoires. Depuis 2004, une étude spatio-temporelle du nord de la France (Picardie et Nord-Pas-de-Calais) a été engagée autour de l'objet « château » (Forriez 2005 ; Forriez, 2007 ; Forriez et Martin, 2008 ; Martin et Forriez, 2008). L'objectif de ce chapitre est d'abord de rappeler ce qu'est une étude géohistorique, puis de l'appliquer à l'espace picard du X^e siècle à nos jours.

11.1. Géohistoire ou géographie historique

La géographie historique correspond à une « géographie rétrospective, qui étudie l'espace à un moment du passé » (Jean-François Staszak *in* Lévy, Lussault, 2003, p. 465-466). Elle se définit donc par son objet (Volvey, 2005, p. 72-81) : l'étude de l'évolution des frontières politiques et des limites administratives. En France, elle connut trois grandes écoles : une première de la fin du XIX^e siècle à la Première Guerre mondiale, une seconde des années 1950 aux années 1970 (Mirot et Mirot, 1947 ; Dion, 1959) et une troisième de la fin des années 1980 à nos jours (Pitte, 1983 ; Sinclair, 1985 ; Planhol, 1988 ; Trochet, 1988 ; Miossec, 2008). Chacune de ces écoles a enrichi la discipline. De la simple école cartographique, la géographie historique s'est transformée en une géographie humaine rétrospective, et ainsi, a établi l'historicité des objets géographiques. Toutefois, elle a progressivement abandonné l'influence du milieu, si chère à Fernand Braudel (1949 ; 1958). Ce fut d'ailleurs lui qui inventa le terme « géohistoire ». Si, au départ, il s'agissait d'une contraction de l'expression « géographie historique », Fernand Braudel fit lui-même évoluer le terme dans son sens actuel (1979), définit par, entre autres, Christian Grataloup (1996) et Géraldine Djamant (2003).

La géohistoire correspond à la géographie historique à laquelle on applique des méthodes d'analyse spatiale (chorème, analyse multi-scalaire, *etc.*). Elle se définit par sa méthode (Volvey, 2005, p. 72-81). Autrement dit, on peut plus facilement l'enrichir par rapport à la géographie historique. La géohistoire

répond donc à la question « pourquoi là à ce moment là ? ». Bien que l'approche chrono-chorématique de Christian Grataloup (1996) ne sera pas reprise dans cette thèse, cet auteur a défini deux notions qui s'avéreront utiles : l'événement géographique et la période géographique. L'événement géographique correspond à un « changement significatif de logique spatiale » (Grataloup, 1996, p. 198). Autrement dit, tout événement historique ne peut pas être un événement géographique. On peut citer l'exemple de la limite entre la *Francia Occidentalis* et les terres d'empire qui sera développé plus en détail dans un prochain paragraphe. Cette limite fut établie par le traité de Verdun en 843 et ne fut percée qu'en 1346 avec l'annexion du Dauphiné à la Couronne de France. Entre ses deux événements géographiques, on peut construire une période géographique qui se définit comme une « durée historique pendant laquelle un même système spatial se reproduit » (Grataloup, 1996, p. 199). Pour mémoire, on peut signaler l'existence d'une archéogéographie (Chouquer, 2000 ; 2008) qui applique les méthodes de l'analyse spatiale en archéologie.

Tout au long de cette troisième partie, l'approche qui sera menée, sera évidemment géohistorique. La méthode retenue est celle de l'analyse multi-scalaire au sens d'Yves Lacoste et au sens fractal du terme.

11.2. Géohistoire du Nord de la France, approche multi-scalaire

Effectuer une analyse multi-scalaire, au sens d'Yves Lacoste (1976), est un exercice délicat lorsqu'il s'agit d'un contexte géostratégique historique. En opérant quelques simplifications événementielles, ce paragraphe essayera de présenter les grands mouvements spatiaux et temporels de la naissance du royaume de France, la logique de démantèlement de l'Empire carolingien et de construction du royaume de France étant réellement multi-scalaire. Pour ce, les événements historiques présentés ont été choisis dans deux références : l'ouvrage de synthèse de Christian Melchior-Bonnet (1980) et celui de Georges Duby (1997).

11.2.1. Le *Regnum francorum*

Les Francs, peuplade germanique, avaient largement conquis la Gaule entre 488 et 511. À l'époque, à la différence de l'empire romain, le territoire d'un royaume était considéré comme un patrimoine personnel (Harouel *et alii*, 2006). Autrement dit, il devait être partagé entre les fils du roi décédé, mais, rapidement, les Francs mirent au point un système qui permettait de diviser le *Regnum francorum*, tout en conservant son unité. En 558, Clotaire I^{er} (511-561) devint le premier *rex trium francorum*. Cela signifiait que, désormais, le royaume des Francs était officiellement divisé en trois « sous-royaumes » : la Neustrie (au nord de la Loire, à l'ouest de la Bretagne, à l'est de l'Escaut et de la Meuse), l'Austrasie (bassin de la Meuse, de la Moselle et du Bas-Rhin (de l'Alsace actuelle jusqu'à l'embouchure du Rhin) et la Burgondie (de l'est du Massif Central aux Alpes italiennes et suisses, du sud de la Meuse jusqu'à la Durance) qui servirent de base pour les partages à venir. Lorsque le roi décédé laissait plus de trois enfants, on divisait à nouveau un des trois « sous-royaumes ». En règle générale, le partage et ses modalités étaient décidés par le roi avant sa mort. De plus, le *Regnum francorum* n'était jamais très longtemps divisé : l'un des frères arrivait toujours à éliminer les autres pour devenir l'unique roi de l'ensemble du territoire. Il est important de noter que l'Aquitaine (wisigothe), la Provence (ostrogothe) et la Bretagne étaient des entités indépendantes de ce *Regnum francorum*. Pour finir, quel que soit le royaume, le roi découpait son territoire en des circonscriptions administratives appelées *pagus* (ou comté) qu'il confiait à des hommes de confiance : les comtes (Harouel *et alii*, 2006).

Entre 561 et 751, toutes les recompositions territoriales se firent et se défirent autour de ces trois entités. La seule modification importante fut l'intégration de la Provence sous le règne de Dagobert I^{er}, roi de Neustrie - Austrasie - Burgondie (628-632), puis de tous les Francs (632-639). Ce système complexe et déroutant fonctionna jusqu'à Charles I^{er} (768-814). Il permit, malgré tout, l'unité du *Regnum francorum* puisque si l'un des rois des trois royaumes venait à mourir, quelle que soit la cause de la mort, automatiquement, l'un des rois des deux autres royaumes récupérait son territoire, après une guerre entre eux la plupart du temps (Rouche, 1970 ; Lebecq, 1990 ; Le Jan, 1999, Durliat, 2002). C'est une période extrêmement complexe et la cartographie historique est très difficile à réaliser, car les limites sont très approximatives.

11.2.2. L'Empire d'Occident

En 751, le changement de dynastie ne changea rien à la situation. L'Aquitaine fut conquise par Pépin le Bref en 760, repoussant le *Regnum francorum* au-delà des Pyrénées. En 768, il partagea le royaume entre ses deux fils : Carloman et Charles. Le partage fut étrange : la Neustrie, l'Austrasie et l'Aquitaine revinrent à Carloman, ce qui revient à lui donner le contrôle des côtes atlantiques, de la Manche (à l'exception de la Bretagne) et de la mer du Nord. Quant à Charles, il reçut la Burgondie et la Provence, ce qui revient à lui confier les côtes méditerranéennes. D'un point de vue stratégique, la position de Carloman était nettement meilleure que celle de Charles, car la Méditerranée venait d'être conquise par les Arabo-musulmans, empêchant notamment le commerce vers le sud (Pirenne, 1937), alors que Carloman pouvait facilement s'ouvrir vers la Grande-Bretagne et le nord de l'Europe.

Carloman mourut très vite, en 771, ce qui permit à Charles de récupérer la totalité du *Regnum francorum* qu'il réforma profondément. Tout d'abord, il l'étendit vers l'est : il conquiert la Lombardie en 774, la Bavière en 788, la Saxe en 804. Ensuite, il profita de la querelle iconoclaste dans l'Empire romain d'Orient pour reconstituer l'Empire d'Occident en 800, après trois siècles d'absence. Enfin, il simplifia les *pagi* en en créant environ 200 sur l'ensemble de son empire. Leur cartographie est possible. Par exemple, pour la Picardie et le Nord-Pas-de-Calais, Robert Fossier (1968 ; 1974) en a établi la carte (Figure 91).

Toutefois, Charlemagne, en bon Franc, prépara le partage de son empire entre ses fils. Le *Regnum francorum* s'étendant bien au-delà des trois royaumes, il fallait inventer de nouvelles limites (Arrignon et Heuclin, 2008). Finalement, seul un fils survécut à Charles, Louis I^{er} le Débonnaire (814-840). Le problème fut donc reporté à plus tard. Pendant ses 36 ans de règne, Louis I^{er} dut préparer sa succession. La tâche fut difficile : il eut quatre fils dont un d'un second mariage. L'imbroglio juridique était réellement insoluble. Lothaire, Louis et Pépin ne voulurent pas que leur demi-frère Charles devînt roi quel que fût le territoire. Louis I^{er} allait de compromis en déception. Il fut même déposé par son aîné, Lothaire, entre 832 et 835. En 838, Pépin mourut, et en 840, ce fut le tour de son père. Aucun partage n'étant décidé, la guerre éclata entre Lothaire, Charles et Louis. Une sombre période commença. Jamais le *Regnum francorum* n'avait été autant menacé.

La querelle portait sur deux problèmes essentiels (Riché, 1997). Le premier était le traditionnel partage entre les fils du roi ; le second concernait le titre impérial, dont Louis I^{er} avait hérité. S'il pouvait exister plusieurs rois, il ne pouvait exister qu'un empereur de l'Occident. Autrement dit, lequel des trois

frères allait recevoir la dignité impériale, garant de l'unité de l'empire ? En 840, Louis I^{er} avait désigné Lothaire pour lui succéder au titre. Il avait d'ailleurs reçu la couronne et l'épée impériale. Évidemment, Charles et Louis ne furent pas en accord avec cette décision. Ils s'unirent contre leur frère. Le paroxysme de cette lutte fut le serment de Strasbourg, le 14 février 842, qui officialisait leur objectif. En 843, Lothaire dut céder, et le partage de Verdun finit par mettre tout le monde d'accord : Charles (le Chauve) devint roi de la *Francia Occidentalis*, Louis (le Germanique), roi de la *Francia Orientalis* et Lothaire, roi de Lotharingie, royaume tampon entre la *Francia Occidentalis* et la *Francia Orientalis*, et empereur d'Occident. Dans le détail, la Lotharingie était un État qui regroupait l'Italie du Nord et la région entre l'Aar et le Rhin et les territoires entre le Rhône, la Saône, la Meuse et l'Escaut. Ce partage fut aussi fondamental que les trois royaumes précédents, car toute la suite de l'histoire des territoires en Europe occidentale a pour référence ce découpage de manière plus ou moins directe. En effet, la Lotharingie devint un enjeu entre la *Francia Occidentalis* et la *Francia Orientalis*. Les « frontières » de ces dernières restèrent à peu près fixes. Toutefois, elle se fragmenta en cinq entités spatiales : la Basse-Lotharingie, la Haute-Lotharingie, la Basse-Bourgogne, la Haute-Bourgogne et le royaume d'Italie (du Nord). De 888 à 1032, les Basse et Haute Bourgogne formaient un royaume qui fut absorbé par le Saint Empire romain germanique. À l'élection d'Hugues Capet, en 987, la totalité de la Lotharingie était sous domination de la *Francia Orientalis*, et la titulature impériale lui revint définitivement. Sur la Figure 91 est représentée la limite entre la France et l'Empire telle qu'elle fut du X^e siècle jusqu'en 1659, dans le nord de la France, ainsi que les limites approximatives des comtés carolingiens.

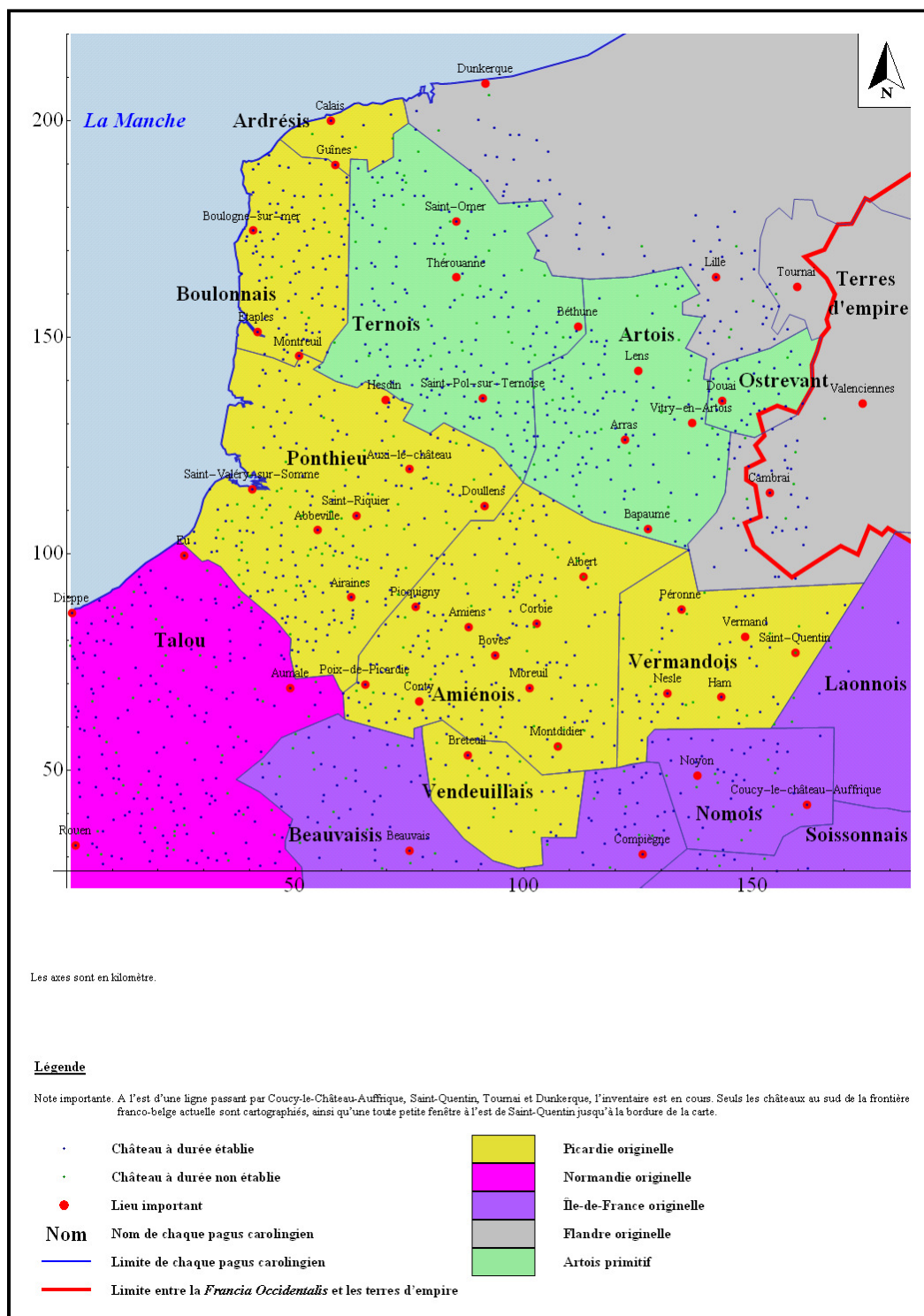


Figure 91. État des limites historiques connues entre 900 et 1100 d'après Robert Fossier (1968)

11.2.3. L'enchâtellement et le début de la construction du royaume de France (IX^e-XI^e siècles)

Jusqu'au traité de Verdun, l'Occident connut une extension vers l'est, accompagnée d'une profonde réorganisation interne. On était passé du petit royaume franc de Clovis au géant que fut l'empire carolingien par un processus d'agrégation sur de vastes espaces, lui-même accompagné d'une réorganisation interne à grande échelle (création de nouveaux comtés). Le processus d'enchâtellement correspond, par contre, à une désagrégation de l'empire, et une réorganisation interne autour des anciens comtés carolingiens. Ce processus fut observé aussi bien en *Francia Occidentalis* qu'en *Francia Orientalis*. Toutefois, dans cette présentation, seul le cas de la *Francia Occidentalis* sera évoqué.

En même temps que les trois frères se combattaient, les invasions normandes commençaient (IX^e siècle). Les rois étant fortement occupés par leur querelle de succession, ils décidèrent de confier la défense de leur territoire à leurs comtes ou marquis (lorsque le comté était à une « frontière » de l'ancien empire de Charlemagne). Il en résulta la construction des forteresses le long des fleuves et des vieilles routes romaines. Les villes restaurèrent leur enceinte. Ainsi, les fonctionnaires de l'Empire (les aristocrates) confondirent de plus en plus leurs charges publiques (*honor*) qu'ils exerçaient avec leurs biens privés (*beneficium*) donnés par le roi pour s'assurer de leur service guerrier (Harouel *et alii*, 2006). Il est important de noter que le *beneficium* n'était pas forcément une terre. Toutefois, cela évoluera vers une terre possédée grâce à un serment de fidélité, terre que l'on appela fief au X^e siècle.

Au IX^e siècle, il existait le serment vassalique : le futur comte ou marquis devait prêter un serment de fidélité au roi. En échange, ce dernier lui confiait temporairement un domaine que le roi devait théoriquement récupérer si le serment était rompu. Avec le démantèlement et l'éclatement de l'empire, le capitulaire de Mersen (847) reproduisit ce schéma localement : un homme pouvait jurer un serment vassalique à un seigneur qui lui-même était fidèle au roi. Ainsi, on comptait entre 600 et 700 comtés à la fin du IX^e siècle. L'empire était donc devenu un système administratif et politique hyperdécentralisé et, dans certains domaines, hyperlocalisé. Seule la personne du roi maintenait la « structure étatique ». En 877, le capitulaire de Quierzy-sur-Oise essaya de mettre de l'ordre dans les relations vassaliques. En effet, il était devenu difficile de révoquer un comte, mais ce texte allait plus loin : il prévoyait qu'en cas de décès d'un comte, son fils lui succéda provisoirement à sa charge. En ces temps troublés, l'aspect temporaire devint rapidement héréditaire.

Pendant la seconde moitié du IX^e siècle, la *Francia Occidentalis* éclata en principautés autonomes. Celles-ci correspondaient à des regroupements de comtés. Le royaume fut alors divisé en sept : six grands fiefs et le duché de France, terre du roi. Les tenants des six grands fiefs avaient le titre de pair de *Francia Occidentalis*. Les pairies furent : (1) le duché d'Aquitaine (ou de Guyenne) ; (2) le duché de Gascogne (ou Wasconie) ; (3) le duché de Normandie ; (4) le comté de Toulouse ; (5) le comté de Flandre ; (6) le comté de Champagne. Chacun de ces fiefs devait à la Couronne une aide militaire. Toutefois, les rois successifs laissèrent peu à peu leurs prérogatives régaliennes aux ducs et aux comtes comme le droit de construire des forteresses, de battre monnaie, *etc.* En 911, le traité de Saint-Clair-sur-Epte confia la Normandie au chef normand Rollon qui en devint duc après avoir juré fidélité au roi de *Francia Occidentalis*, Charles le Simple. En 987, la *Francia Occidentalis* perdit le comté de Barcelone qui « prit son indépendance » pour combattre plus efficacement le califat de Cordoue.

Néanmoins, cette première fragmentation ne suffit pas. La faiblesse de la monarchie due au chassé-croisé entre les Robertiens et les Carolingiens favorisa la création de comtés autonomes au sein même des principautés. Le comté d'Anjou, le comté de Touraine et le comté de Blois se séparèrent du duché de Normandie. Le comté de Toulouse et le comté de Comminges se dissocièrent du duché d'Aquitaine, Mâcon, Nevers, Auxerre, Tonnerre, Troyes et Chalon du duché de Bourgogne. Cela ne suffit toujours pas. Les comtés éclatèrent eux-mêmes. Ainsi, les liens vassaliques descendirent à de très grandes échelles spatiales au sens géographique. Il n'était pas rare qu'un potentat local prît le pouvoir dans un rayon de 20 à 25 kilomètres autour d'un site donné et qu'il légalisât sa situation juridique *a posteriori* par un serment vassalique (Harouel *et alii*, 2006). Comme l'écrivait Pierre Héliot, « tout aventurier avide de domination, assez audacieux pour défier à la fois l'autorité publique et l'ennemi, trouvait le moyen de se bâtir un château » (Héliot, 1965). Toutefois, d'autres auteurs, comme Jean-Pierre Cuvillier (1998), prétendent que ce cas était très rare. Quoi qu'il en soit, ce phénomène de construction fut appelé par Pierre Toubert (1973) *incastellamento* (ou enchâtellement). Un système hiérarchique avec un nombre parfois incroyable d'intermédiaires s'établit entre le roi et ses seigneurs. Ce schéma correspond assez bien à la situation de la Picardie ou à l'Ile-de-France où aucune principauté ne put s'établir. Seuls le duché de Normandie et le comté de Flandre continuèrent à exercer leur pouvoir au sein de cette fragmentation à très grande échelle.

À plus petite échelle, entre 888 et 987, la monarchie devint élective. Les Grands du royaume éli-saient et prêtaient fidélité au roi qui était choisi parmi les Carolingiens, ou faute de mieux parmi les Robertiens. Ainsi, le temps des partages devint révolu. En 987, Hugues Capet (Robertien) fut élu roi de *Francia Occidentalis*, tandis qu'en *Francia Orientalis*, Othon I^{er} fut élu roi en 936 et restaura définitivement l'empire en 962. Désormais, les deux entités étaient bien distinctes. Othon dominait la Lotharingie qui devint « terre d'empire ». Les limites de la *Francia Occidentalis* sont à l'ouest, l'est de la Bretagne ; à l'est, quatre rivières fixent la limite : l'Escaut, la Meuse, la Saône et le Rhône ; au nord, la mer du Nord ; au sud, la Méditerranée et le sud des Pyrénées. A l'intérieur de ces limites, le roi possédait le duché de France qui comprenait : Senlis, Soissons, Compiègne, Chaumont, Orléans, Saint-Riquier, Montreuil, soit environ 7 000 km².

Tandis qu'en *Francia Orientalis*, la monarchie restait élective, en *Francia Occidentalis*, Hugues Capet réussit à transmettre sa couronne à son fils Robert II, élu et sacré roi dès 987. Chacun de ses successeurs fit sacrer son fils de son vivant. Philippe II Auguste fut le dernier de cette pratique. Après lui, non seulement, le terme de France apparut clairement et définitivement dans les sources, mais en plus, sa descendance ne fut plus contestée à la tête du royaume. Le système électif favorisa la transmission de la couronne à l'aîné. La dynastie capétienne fut définitivement installée à la mort de Philippe Auguste en 1223.

11.2.4. De la *Francia Occidentalis* à la France (XI^e-XIII^e siècles)

L'objectif des rois de *Francia Occidentalis* était clair : ils voulaient re-centraliser leur pouvoir et leurs prérogatives. Ils vont le réaliser de différentes manières : par des mariages d'une part, par des guerres locales d'autre part. On observe une véritable politique multiscalaire, car il leur fallait à la fois reconquérir les principautés, mais également les comtés autonomes, ainsi que ce que l'on peut appeler des micro-seigneuries.

L'unité spatiale de base était la châtelainie (Fourquin, 1970). Ce territoire était dirigé par un centre appelé château. Pendant cette période, la structure du bâtiment évolua très rapidement. Au XI^e siècle, la forme la plus observée était la motte castrale avec des structures essentiellement en bois. À partir du XII^e siècle, on construisait des tours dites maîtresses en pierre et le reste de la structure défensive en bois. Au XIII^e siècle, les châteaux en pierre firent massivement leur apparition. Les liens entre les sites castraux et la défense d'un site sont évidents. Toutefois, il existait dès cette période des châteaux qui n'étaient pas des forts. Le château était avant tout un centre de pouvoir : celui du seigneur, si ce dernier possédait une garnison, on pouvait parler d'un château fort. Ainsi, on peut centrer une étude géohistorique autour des châteaux. L'espace qui a été retenu est celui de la Picardie historique (Amiénois, Boulonnais, Calaisis, Ponthieu, Santerre, Thiérarche, Vermandois et Vimeu) (Forriez, 2005) élargie à l'Artois (Forriez, 2007). Il est évident qu'il faut intégrer ces territoires à la construction plus vaste du royaume de France.

La reconquête de la Picardie s'effectua pendant cette période. Elle débuta timidement avec l'acquisition de la seigneurie de Corbie en 1074 par Philippe I^{er} (1052-1108). Il faut noter qu'en 1066, suite à la bataille d'Hastings, Guillaume, duc de Normandie, était devenu roi d'Angleterre, c'est-à-dire plus puissant que le roi de France lui-même. En 1152, Louis VII (1137-1180) divorça d'Aliénor d'Aquitaine qui épousa en seconde noce Henri II Plantagenêt, comte d'Anjou, comte de Blois, comte de Touraine, duc de Normandie, et par son mariage, duc d'Aquitaine. En 1154, il devint roi d'Angleterre et duc de Bretagne. On a pu parler de « l'empire Plantagenêt » qui formait un rectangle du sud de l'Écosse jusqu'aux Pyrénées, avec une discontinuité majeure : la Manche. Rappelons que l'espace picard était coincé entre le duché de Normandie, le duché de France et le comté de Flandre. Elle devint donc un enjeu entre trois protagonistes : le roi de France, le roi d'Angleterre et le comte de Flandre.

Finalement, le roi de France Philippe II Auguste (1180-1223) fut le grand vainqueur. Lorsqu'il monta sur le trône, il possédait : Montreuil (l'unique place forte du Ponthieu), Corbie, Noyon et Beauvais. En 1185, à la suite du traité de Boves, il obtint : le comté d'Amiens et le comté de Montdidier. Il ajouta en 1191-1192 : le comté d'Artois, une partie du comté de Vermandois et la seigneurie d'Hesdin (Figure 92). En même temps, il fit entrer dans la mouvance de la Couronne, car les seigneurs devaient lui prêter fidélité : le comté de Boulogne, le comté de Guînes, le comté de Saint-Pol et le comté du Ponthieu (Figure 92). En 1202, le duché de Normandie, le comté du Maine, le comté d'Anjou, le comté de Touraine, le comté du Poitou, le comté de Saintonge fut reconquis. On ne laissa que la Guyenne aux Anglais. Le 27 juillet 1214, Philippe II battit une coalition financée par le roi d'Angleterre, Jean sans Peur, entre le comte de Flandre, Ferrand de Portugal, et l'empereur, Othon IV de Brunswick, à Bouvines. Le comté de Flandre en fut durablement affaibli. Toutefois, il conserva son autonomie, mais entra définitivement dans la mouvance de la Couronne. D'ailleurs, en 1304, Philippe IV le Bel (1285-1314) intégra dans le royaume, Lille, Douai et Béthune, et en 1305, le comté de Flandre. Les limites au nord furent stabilisées. De plus, en 1285, par son mariage avec Jeanne de Navarre, Philippe IV avait obtenu en dot la Navarre et la Champagne. À la mort de Philippe IV, le domaine du roi recouvre largement le royaume. Cependant, le roi d'Angleterre n'avait pas dit son dernier mot.

En 1254, Éléonore de Castille apporta en dot le comté de Ponthieu au futur roi d'Angleterre, Édouard I^{er} Plantagenêt (1272-1307). De l'immense empire Plantagenêt, il ne resta plus que deux confettis : la Guyenne et le Ponthieu (Figure 92), deux confettis qui furent pourtant suffisant pour s'opposer aux rois de France pendant près d'un siècle.

Enfin, il faut préciser que la (re)conquête des rois de France ne se limita pas à regrouper les différentes principautés territoriales. Le roi imposa son pouvoir au niveau local. Une nouvelle fois, ce fut Philippe II qui lança le mouvement, pour ce, il utilisa deux grands moyens. Tout d'abord, il se munit d'un « service déconcentré » représenté par le prévôt, le bailli ou le sénéchal (qui furent remplacés à l'époque moderne par les gouverneurs et les intendants). À côté du pouvoir comtal, il existe désormais le pouvoir royal. Le deuxième moyen fut octroi d'une myriade de chartes communales qui permettaient aux communes de s'affranchir largement de l'autorité du comte ou du duc dont elles dépendaient. Cela permit, entre autres, de limiter les pouvoirs réels des comtes et des ducs aux territoires ruraux. Ces successeurs menèrent la même politique jusqu'à la fin du XV^e siècle.

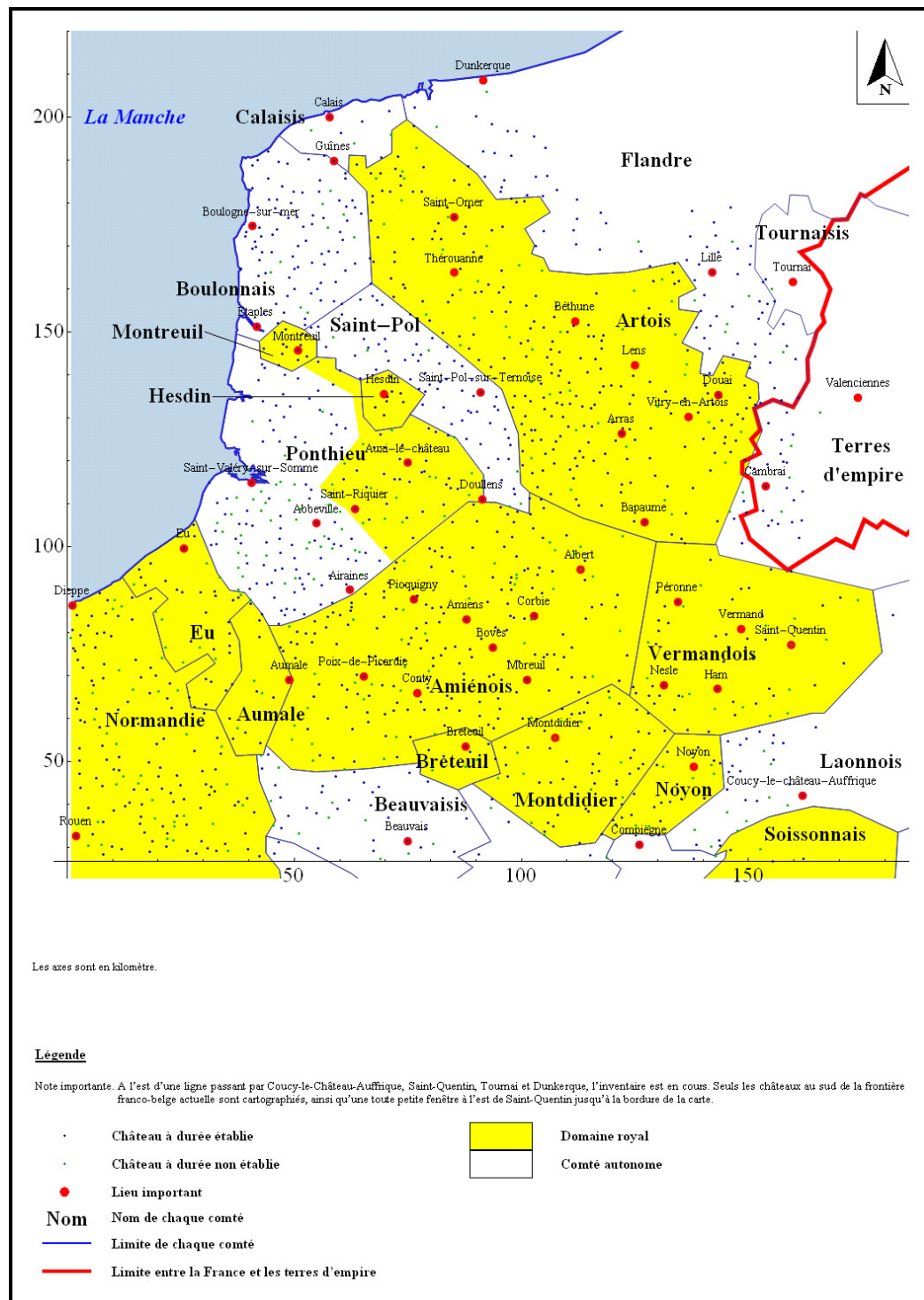


Figure 92. État des limites historiques connues entre 1100 et 1300 d'après Robert Fossier (1968)

11.2.5. Le Royaume de France (XIII^e - XV^e siècles)

Entre 1314 et 1328, les rois de France eurent des problèmes de descendance. Il a fallu improviser des règles de succession. En 1316, Louis X le Hutin mourut. Sa femme était enceinte. Il fut décidé d'attendre la naissance de cet enfant. S'il s'agissait d'un homme, ce serait le futur roi. Ce fut un homme, que l'on prénomma Jean, qui ne vécut que cinq jours du 15 au 20 novembre 1316. Qui pouvait prétendre à la Couronne ? Les juristes se tournèrent vers le frère du roi : Philippe V (1316-1322) qui mourut à son tour sans descendant, mais il restait un frère. Ainsi, Charles IV (1322-1328) monta sur le trône. Ce dernier mourut sans enfant. La logique eût voulu que la sœur survivante, Isabelle de France, héritât de la Couronne, mais elle était l'épouse du roi d'Angleterre, Édouard II (1307-1327), ce qui revenait à confier la Couronne de France, à son ennemi juré que représentait le roi d'Angleterre, Édouard III (1327-1377). Il fut donc décidé de confier la Couronne de France au cousin du roi Philippe VI de Valois (1328-1350), au nom de la loi salique (Clovis) qui interdisait les femmes d'hériter des terres, donc du domaine royal. De plus, Philippe fut choisi, car il possédait un successeur potentiel.

En 1328, tout s'était bien passé. Édouard III rendit hommage à Philippe VI en la cathédrale d'Amiens (1329), proche de son fief du Ponthieu. Cependant, en 1336, Édouard III fit valoir officiellement ses droits à la Couronne de France. Immédiatement, Philippe VI répliqua en lui confisquant le Ponthieu. La guerre commença et tourna rapidement à l'avantage de l'Angleterre. Par exemple, à la suite de la bataille de Crécy (1346), Édouard III prit Calais en 1347, mais la situation n'était pas catastrophique pour le roi de France. D'ailleurs, Philippe VI fit sa première acquisition significative au détriment de l'empire en s'emparant du Dauphiné en 1346. De plus, il acquit définitivement la Champagne, la Brie et Montpellier. Ce ne fut qu'à la bataille de Poitiers (1356) que l'Angleterre écrasa « l'armée française ». Jean II le Bon (1350-1364) y fut fait prisonnier, et par le traité de Brétigny (1360), Édouard III récupéra le Ponthieu (Figure 93), le duché d'Aquitaine en entier et conquit le Calais (Figure 93).

En 1364, Charles V le Sage (1364-1380) devint roi à la place de son père, mort dans sa prison de Londres. Il créa rapidement une véritable « armée française » de métier à la tête de laquelle il plaça Du Guesclin. Rapidement, le Ponthieu fut repris (en 1369). À sa mort, Charles V avait laissé aux Anglais : Calais, Bordeaux, Cherbourg, Brest et Bayonne. La guerre dite de Cent ans en serait sans doute restée là. Malheureusement, le sort voulut que Charles VI le Bien-Aimé (1380-1422) devînt fou au cours de son long règne favorisant les intrigues de la part des Grands, et particulièrement du roi d'Angleterre et du duc du Bourgogne.

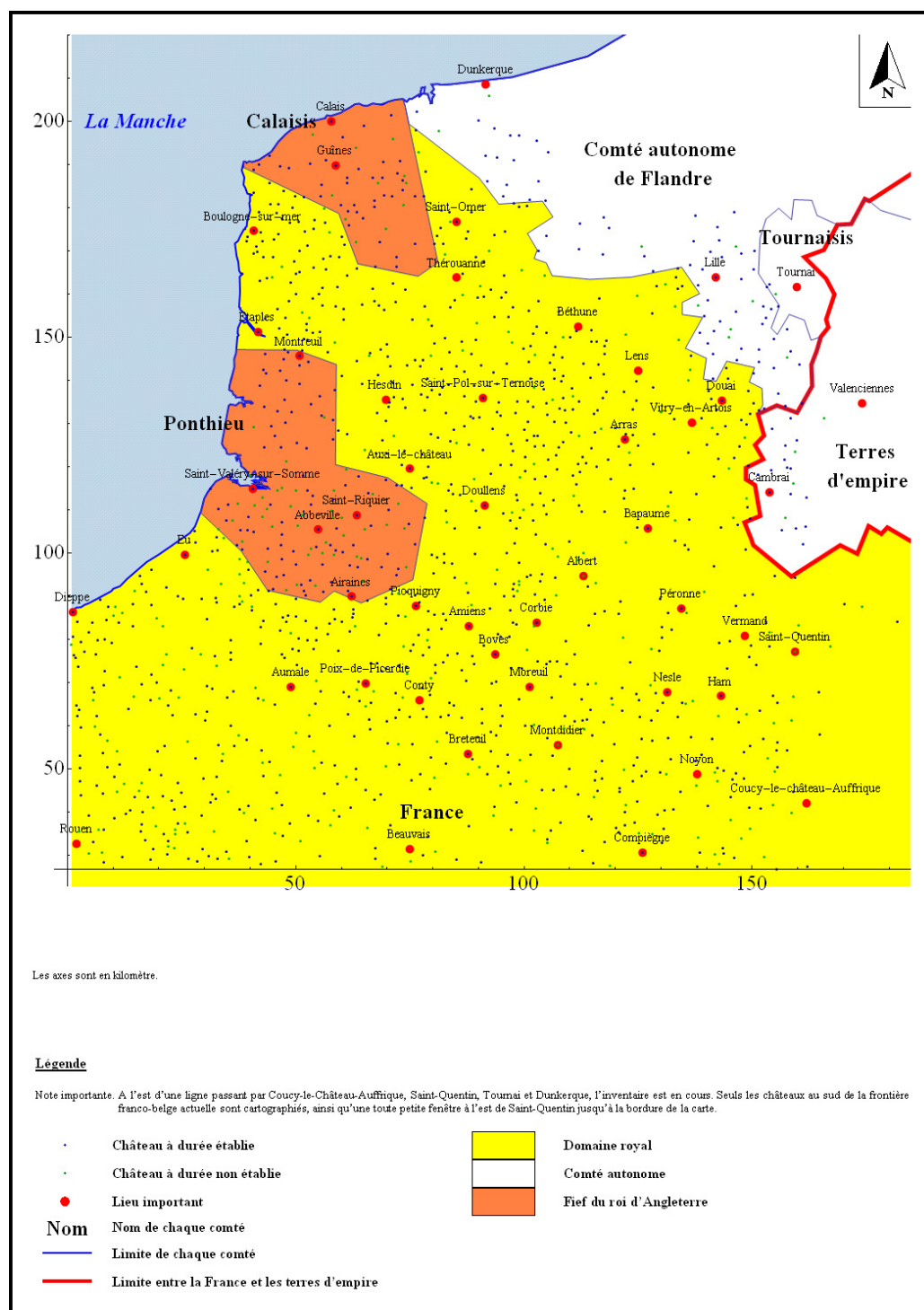


Figure 93. État des limites historiques connues entre 1300 et 1400 d'après Jean Kerheve (1998)

En 1415, l'armée française fut défaite à Azincourt. Le traité de Troyes (1420) divisa le royaume de France en deux : du nord de la Loire à la Picardie, on avait les territoires du roi d'Angleterre, Henri V (1413-1422) ; au sud de la Loire, le royaume de France de Charles VI, puis Charles VII (1422-1461). Ce traité reconnaissait comme unique héritier du royaume de France, Henri V à la mort de Charles VI. Les rois d'Angleterre devinrent rois de France, titre qu'ils conservèrent jusqu'en 1802 (paix d'Amiens). Entre 1417 et 1430, les Anglais réinvestirent le Ponthieu ; le Calaisis étant resté anglais (Figure 94).

Parallèlement, les Bourguignons profitèrent de la faiblesse de Charles VI et de leur position stratégique entre le royaume de France et l'empire pour agrandir leur territoire. Tout commença en 1369 lorsque le duc de Bourgogne, Philippe le Hardi (1364-1404), épousa Marguerite de Flandre qui lui apporta en dot l'Artois, la Flandre, le comté de Saint-Pol, le comté de Montreuil et le comté d'Hesdin. Il possédait déjà le duché de Bourgogne (France) et le comté de Bourgogne (empire) et il avait donné en apanage à ses fils le comté de Nevers et celui de Rethel. On considère la paix de Tournai (1385) comme l'acte de naissance de l'État bourguignon (Schnerb, 1999).

En 1428, Jeanne d'Arc rencontra Charles VII à Chinon. Elle le convainquit de se faire sacrer roi de France à Reims. Les hostilités anglo-françaises reprirent. Alors que Philippe le Bon (1419-1467) avait pris le parti des Anglais en 1420. Il se rangea rapidement au côté de Charles VII et l'aida à reconquérir son royaume. En 1435, le traité d'Arras donna les villes de la Somme et le Ponthieu à Philippe le Bon (Figure 94) qu'il unifia sous le nom de Picardie. Les Bourguignons possédaient alors toute la partie nord du royaume de France, à laquelle il fallait ajouter : les possessions de Philippe le Hardi ainsi que le duché de Luxembourg (empire), Limbourg (empire), le comté de Hollande (empire), le comté de Namur (empire), le comté du Hainaut (empire) et le comté de Boulogne (France). Les Bourguignons étaient en train de reconstruire, de manière consciente ou inconsciente, la Lotharingie historique qui avait disparu pendant cinq siècles.

Parallèlement, en 1449, la France reprit la Normandie. Les Anglais ne possédaient plus que Calais dès 1453. Louis XI (1467-1483) poursuivit l'œuvre de son père en gagnant sur l'empire : la Provence et en récupérant le Maine en 1481. Il dut surtout combattre la puissance bourguignonne. Louis XI racheta les villes de la Somme à Philippe le Bon en 1463, mais il les lui rendit en 1465 par le traité de Conflans à cause du fils de Philippe, Charles. Les Bourguignons devinrent une véritable menace avec Charles le Téméraire (1467-1477). En 1472, ce dernier envahit le royaume par le sud de la Somme. Il fut stoppé par Jeanne Hachette à Beauvais. Toutefois, il conquiert le comté d'Eu. En janvier 1477, il mourut lors du siège de Nancy. Immédiatement, Louis XI récupéra définitivement le duché de Bourgogne et provisoirement le comté de Bourgogne (Franche-Comté), perdu par Charles VIII (1483-1498). En 1482, lors de la paix d'Arras, il récupéra de manière définitive pour la France, la Picardie et le Boulonnais. L'Artois entra un temps dans la mouvance française, perdu par Charles VIII. Toutefois, Charles VIII épousa Anne de Bretagne, ce qui permit d'intégrer le duché dans le royaume de France. La mort prématurée de Charles VIII obligea son oncle et successeur, Louis XII, d'épouser Anne de Bretagne, faisant entrer définitivement la Bretagne dans le royaume de France. Désormais, le royaume est pratiquement un espace continu toutes les principautés, à l'exception du comté de Flandres, furent intégrées. Ils ne restent que quelques enclaves comme Calais ou le comtat Venaissin. Il peut s'ouvrir à la « reconquête de la Lotharingie ».

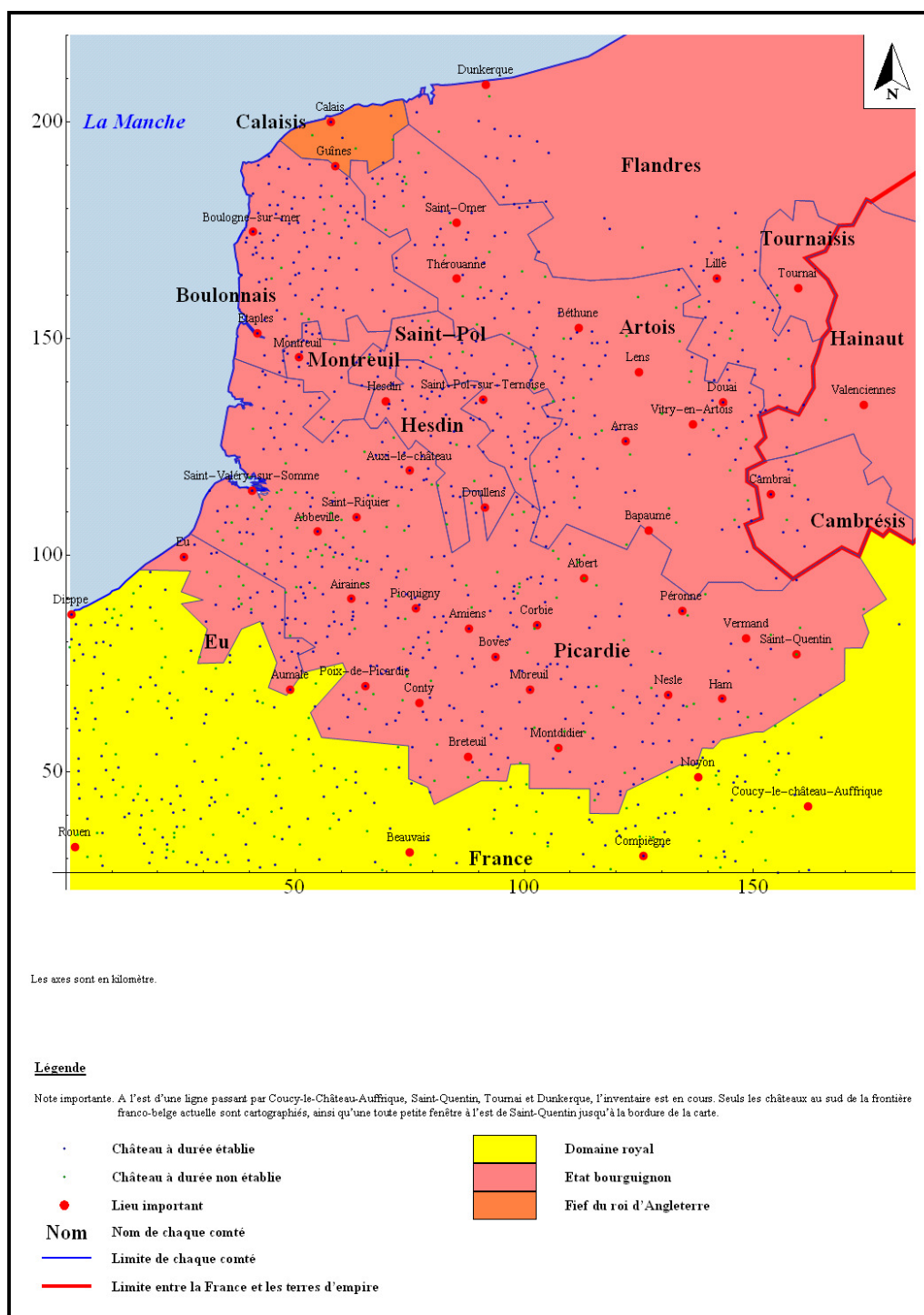


Figure 94. État des limites historiques connues entre 1400 et 1500 d'après Jean Kerheve (1998)

À l'aube du XVI^e siècle, la Picardie et le Boulonnais furent profondément ancrés dans le royaume de France. La menace anglaise n'existait plus. Désormais, il fallait fixer la limite entre l'empire et la France. Il faut noter que les châteaux avaient changé de fonction au cours de la fin du Moyen Âge, l'apparition des premiers canons au XV^e siècle rendit inutile les forts dans les campagnes (Contamine, 1980). Ce qui fait qu'à l'aube du XVI^e siècle, les châteaux pouvaient être encore des lieux de pouvoirs, mais difficilement des forts. Leur architecture en sera profondément modifiée (Mesqui, 1997; Babelon, 1989).

11.2.6. Le Royaume de France (XV^e- XVII^e siècles)

La frontière au nord fut fixée en deux temps. D'abord, en 1558, Henri II (1547-1559) reprit Calais aux Anglais (Figure 95). Le 3 avril 1559, la paix du Cateau-Cambrésis agrandit le territoire français des évêchés de Toul, de Metz et de Verdun. La lutte contre l'empire avait commencé. Le deuxième temps fut la Guerre de Trente ans (1618-1648) et les campagnes de Louis XIV. En 1648, les traités de Westphalie donnèrent à la France l'Alsace actuelle. La paix des Pyrénées en 1659 entre la France et l'Espagne intégra définitivement l'Artois (à l'exception de Saint-Omer et Aire-sur-la-Lys), ainsi que quelques territoires du Luxembourg et du Hainaut, Montmédy, Thionville et le Roussillon. En 1668, le traité d'Aix-la-Chapelle donna la Flandre du Sud qui fixa la frontière franco-belge actuelle. En 1678, au traité de Nimègue, la France acquit définitivement la Franche-Comté, le Cambrésis, le Valenciennois et Maubeuge.

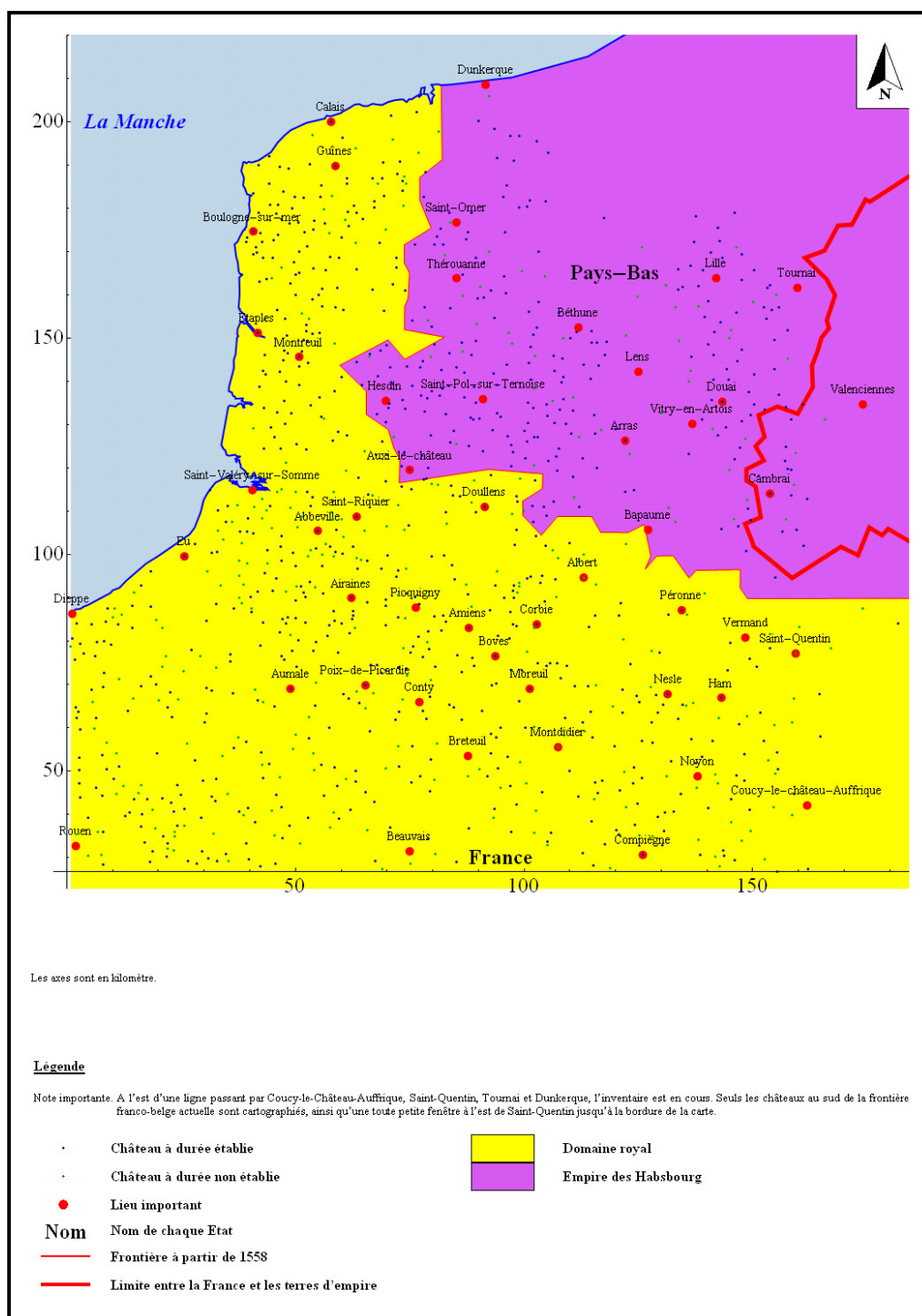


Figure 95. État des limites historiques connues entre 1500 et 1700 d'après Georges Duby (1987)

11.2.7. Du Royaume de France à la France républicaine (XVIII^e siècle à nos jours)

À partir du XVIII^e siècle, la frontière au nord et au sud de la France était fixée. Au sud, les Pyrénées marquaient la frontière entre la France et l'Espagne. Au nord, la frontière fut tracée à la suite de nombreux compromis (Figure 96). Elle fut définitivement fixée lors de la création de la Belgique en 1830, état tampon entre les Pays-Bas, les terres d'empire et la France (Nordman, 1977). Il restait à trancher la frontière de l'est. En 1766, Louis XV annexa la Lorraine, et, en 1768, acheta la Corse aux Génois. Un *statu quo* semblait avoir été trouvé. Dans le sud-est, le Comtat Venaissin fut annexé en 1791, au détriment du pape. Enfin, la frontière franco-italienne fut acquise en 1860 par l'annexion de la Savoie et du comté de Nice par la France. De plus, l'unité italienne a repoussée au-delà de la Suisse, de la Lombardie et de la Vénétie les terres d'empire. Par contre, pour fixer la frontière de la Lorraine actuelle à l'Alsace actuelle, il fallut trois guerres extrêmement sanglantes entre la France et l'Allemagne en 1870-1871, 1914-1918 et 1939-1945.

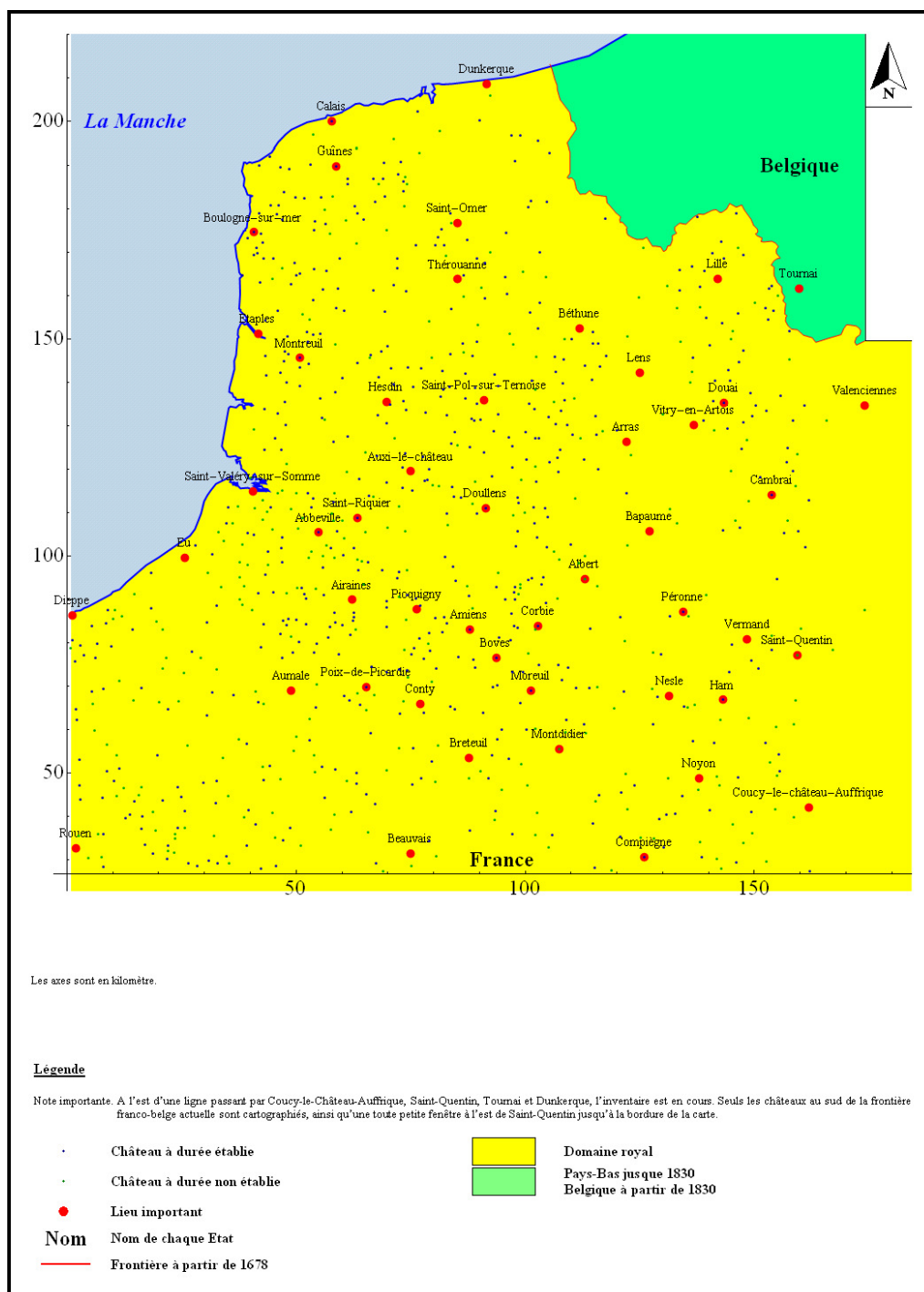


Figure 96. État des limites historiques connues entre 1700 à nos jours

11.2.8. Limites et frontières en géohistoire

Ce paragraphe est une application du chapitre 3. Les concepts de limite et de discontinuité y ont été définis. Avant de revenir sur l'interprétation des données chronologiques précédentes, il faut revenir sur la définition polysémique d'une frontière entre plusieurs territoires à travers l'exemple de la Picardie historique, l'Artois et la Flandre.

Au XXI^e siècle, en droit international public, une frontière correspond à la limite de la souveraineté entre un Etat et ses voisins. Géométriquement, cette définition est caractérisée par le tracé d'une courbe en coordonnées curvilignes. Cette approche linéaire de la frontière est très récente ; elle va de pair avec l'avancée qu'a connue la cartographie au XVIII^e siècle. C'est d'ailleurs la définition retenue par Frédéric Ratzel (1897) et Paul Vidal de la Blache (1917). Elle se retrouve au cœur de la première école de géographie historique (Ciattoni, 2005). L'approche de l'objet « frontière » était alors essentiellement temporelle. Elle répondait à la question : « comment en est-on arrivé là ? ». La frontière était alors analysée comme une véritable limite, un finistère. Au-delà de la frontière se trouvait un ailleurs, ce qui marque bien la différence. Géographiquement, la frontière engendre donc une identité particulière : un français n'est pas un allemand, par exemple. Il s'agit donc aussi d'une discontinuité essentielle (Renard, 2002).

À partir de là, la définition géographique de la frontière correspond à une approche spatiale qui apporta un renouveau non négligeable à l'intérêt scientifique de l'objet des années 1970 à nos jours (Medina-Nicolas, 2004). La grande avancée fut l'adoption d'une définition multi-scalaire au sens d'Yves Lacoste (1976) d'une part, mais également, par la (re)découverte des travaux mathématiques de Lewis Fry Richardson (1961) sur les frontières interétatiques montrant qu'elles correspondaient à des objets fractals (Mandelbrot, 1975 ; 1977 ; 1982), d'autre part. La définition du concept au sens géographique de frontière peut se résumer en trois notions : souveraineté, limite et discontinuité, objet multi-scalaire.

Par ailleurs, l'approche multi-scalaire s'est beaucoup développée, tant il est vrai que le concept au sens de ligne de séparation peut être applicable à différentes échelles géographiques (Renard, 2002). Toutefois, l'étude des frontières dans l'espace des échelles au sens fractal du terme a été très peu étudiée, et généralement, les études correspondent à une estimation de la dimension fractale. Quoi qu'il en soit, l'utilisation du concept frontière en géohistoire doit être systématiquement démontré pour éviter les anachronismes ou les interprétations idéologiques, fréquentes avant les années 1970.

11.2.8.1. La limite entre la *Francia Occidentalis* et la Lotharingie

La limite entre la *Francia Occidentalis* et la Lotharingie fut fixée en 843, mais il ne peut s'agir d'une frontière au sens géographique du terme. Certes, la notion de limite territoriale entre deux royaumes existait depuis longtemps, mais la notion de souveraineté et la notion d'identité propre aux deux ensembles que cette limite séparait, ne pouvaient se justifier, d'une part parce que le concept juridique de souveraineté n'avait pas encore été inventé, et d'autre part, parce que le tracé n'était qu'un compromis. En effet, il était coutumier chez les Francs de partitionner et de réunir au bout de quelques années les territoires dissociés. Par exemple, Charles III le Simple reconquit la partie nord de la Lotharingie entre 911 et 923.

Toutefois, cette limite s'installa dans la durée, et à partir de 987, les choses étaient différentes. Hugues Capet et ses successeurs renoncèrent à la partie centrale de l'ancien empire de Charlemagne. Le système féodal était avancé. De plus, il faut préciser que le critère essentiel qui servit à la construction des États-nations au XIX^e siècle, la langue nationale, n'existait pas. Ce qui pouvait créer une identité particulière était le serment vassalique. Cependant, les habitants des seigneuries frontalières ne devaient vraisemblablement pas savoir s'ils dépendaient du roi des Francs (puis de France) ou de l'empereur germanique. Par contre, il est probable qu'ils devaient savoir de quel seigneur et de quelle paroisse ils dépendaient, voire de quel comté, ne serait-ce que pour payer leurs impôts. Dans ce cadre, il ne manquait plus que la souveraineté que le roi acquit progressivement au cours du XII^e siècle.

Si on s'intéresse aux petites seigneuries ou aux comtés, celles-ci pouvaient correspondre à de véritables discontinuités, tout dépend du groupe social que l'on étudie. Pour les seigneurs ou les comtes, cette limite était fondamentale, tandis que, pour leur population, la limite majeure est celle de leur village. On a ainsi une véritable imbrication spatiale en fonction du rang de l'individu. De ce point de vue, cette imbrication est le support de la hiérarchie féodale ; elle correspond bien à une analyse multi-scalaire au sens d'Yves Lacoste (1976).

Cependant, s'il est clair que la limite entre la *Francia Occidentalis* et la Lotharingie est fondamentale, car elle est le support de la politique intérieure des Capétiens, elle ne semble être qu'une discontinuité que pour le roi, ses princes et leurs cours respectives. D'ailleurs, la Flandre avait, à plusieurs reprises, joué sur cette limite pour conserver son autonomie. En 1071, par exemple, elle devint réellement une entité autonome. Elle ne dépendait ni de l'empire, ni de la *Francia Occidentalis*. Il fallut attendre la bataille de Bouvines (1214), pour la faire de nouveau rentrer dans la mouvance française. De plus, il faut préciser que le comté était coupé par la limite : neuf dixièmes de la Flandre était en *Francia Occidentalis* contre un dixième en Lotharingie. Cependant, les autres princes territoriaux s'en servirent peu.

Entre 1066 et 1453, la limite essentielle était curieusement celle de la Manche. En effet, depuis 1066, l'Angleterre était devenue « un morceau de *Francia Occidentalis* », puisque son roi devait prêter le serment vassalique au roi des Francs (puis de France). En 1154, par exemple, le royaume d'Angleterre possédait les trois quarts du territoire de son suzerain. Les Capétiens eurent fort à faire pour repousser les terres anglaises sur leur île. Cependant, la discontinuité entre les deux royaumes n'était réellement ressentie que par les Grands. Dans ce cas, on retrouve une expression multi-scalaire de la discontinuité territoriale, tout comme la limite avec les terres d'empire.

Au XIV^e siècle, l'idée de souveraineté était bien ancrée : « le roi de France est souverain en son royaume ». L'idée de frontière est désormais possible, mais sans la notion « d'Etat » qui n'apparut qu'aux XVI^e - XVII^e siècles. Les frontières du royaume furent fixées : les côtes de la Manche et de l'Atlantique, les Pyrénées du sud (le comté de Barcelone) s'étant tourné vers l'Aragon, et la limite entre la France et les terres d'empire. Il faut ajouter que la première (re)conquête des terres lotharingiennes commença dès 1346 avec le Dauphiné.

Toutefois, ce ne fut qu'au XV^e siècle que la limite entre la France et les terres d'empire devint essentielle. En effet, les Ducs de Bourgogne, fort de leurs immenses possessions territoriales, de part et d'autre de la frontière, essayèrent de refonder autour d'elle une sorte de « nouvelle Lotharingie » (Schnerb, 1999). Ils furent donc parmi les premiers à essayer de créer une entité spatiale originale en se servant de l'identité particulière des territoires frontaliers. La mort prématurée de Charles le Téméraire mit fin à ce projet.

Entre le XVI^e et le XX^e siècle, la construction de la frontière entre la France et les terres d'empire correspond de plus en plus à la définition géographique moderne du concept de « frontière ». En effet, elle devint un enjeu essentiel entre ces deux entités, et ce, à toutes les échelles.

11.2.8.2. Les subdivisions administratives

Les subdivisions administratives présentées au cours de cette partie doivent être comprises comme étant approximatives. On connaît relativement mal les limites des *pagi* carolingiens et des comtés et seigneuries (Feuchière, 1954). En effet, dans la plupart des cas, on peut connaître une liste de possessions entrant dans tel ou tel fief, mais les limites réelles demeurent floues. Le problème fut formulé par Lucien Febvre : « étant donné une certaine région en France (il est bien entendu, d'ailleurs, que le problème se pose également hors de France), les diverses circonscriptions territoriales qui s'y sont succédé ont-elles entretenu des rapports les unes avec les autres, et quels rapports ? Y a-t-il, par exemple, des rapports autres que des rapports de succession chronologique, y a-t-il des rapports de filiations entre le *pagus* mérovingien et, en deçà, le *pagus* gallo-romain, au-delà les circonscriptions carolingiennes, puis les seigneuries, puis les châtelainies et les bailliages, et ainsi de suite jusqu'aux actuelles circonscriptions, cantons, arrondissements, etc. ? » (Febvre, 1947). De plus, beaucoup de limites sont anachroniques. Ainsi, Lucien Febvre souligne que « en réalité, ces admirables pointillés, doublés de traits de couleurs, qui donnent aux cartes de *pagi* tant d'apparente précision, ne sont que trompe-l'œil. Elles reproduisent des limites de circonscription beaucoup plus récentes que les *pagi*, et c'est par un évident anachronisme qu'on les projette telles quelles dans ce passé qu'aucun document précis ne vient éclairer dans le détail » (Febvre, 1947). Ainsi, les Figures 91, 92, 93, 94, et 95 présentent donc sous forme de tracé linéaire des limites qui, en réalité, sont incertaines. Seule la Figure 96 sur laquelle est représentée le tracé de la frontière franco-belge actuelle possède une limite précise.

Autrement dit, il est hors de question d'étudier l'évolution de la fractalité des limites de tel ou tel comté. Il faut utiliser un autre indicateur, peu sensible à la mouvance de celles-ci. Celui qui a été retenu est évidemment la répartition des châteaux, expression du pouvoir local jusqu'au début du XX^e siècle.

Dans cette partie, la périodisation géographique a été réalisée en fonction des acquisitions et des pertes territoriales des rois de *Francia Occidentalis* (puis de France) dans la zone étude choisie. De 987 à 1191, la plupart des territoires sont dans l'orbite du Royaume, mais conservent une certaine autonomie. De 1191 à 1558, l'existence des fiefs anglais (Ponthieu 1258-1336 - Ponthieu et Calais 1347-1429 - Calais 1429-1558) perturbe l'intégration de la Picardie et de l'Artois dans le Royaume de France. D'ailleurs, en 1558, seule la Picardie entra définitivement dans le Royaume. Deux autres périodes sont notables : 1558-1678 et 1678 à nos jours. Toutefois, cette périodisation géographique des territoires ne correspond pas exactement à celle des châteaux.

11.2.8.3. Note sur le trait de côte

Le trait de côte tracé sur l'ensemble des cartes (Figure 91, Figure 92, Figure 93, Figure 94, Figure 95 et Figure 96) est le trait actuel. Il est à noter qu'il a fortement évolué au cours de la période. Ainsi, le triangle Calais, Saint-Omer et Dunkerque était formé d'un ensemble d'îles. Ainsi, Bergues (rendue célèbre par le film de Dany Boon) ou Saint-Omer étaient des ports et des places fortes hautement stratégiques (Figure 97). Pendant l'optimum médiéval, le retrait des eaux marines et l'assèchement des marais aboutirent au trait de côte actuel entre le XI^e et le XIII^e siècle. On remarque également un recul du trait de côte entre Boulogne-sur-Mer et Saint-Valéry-sur-Somme.

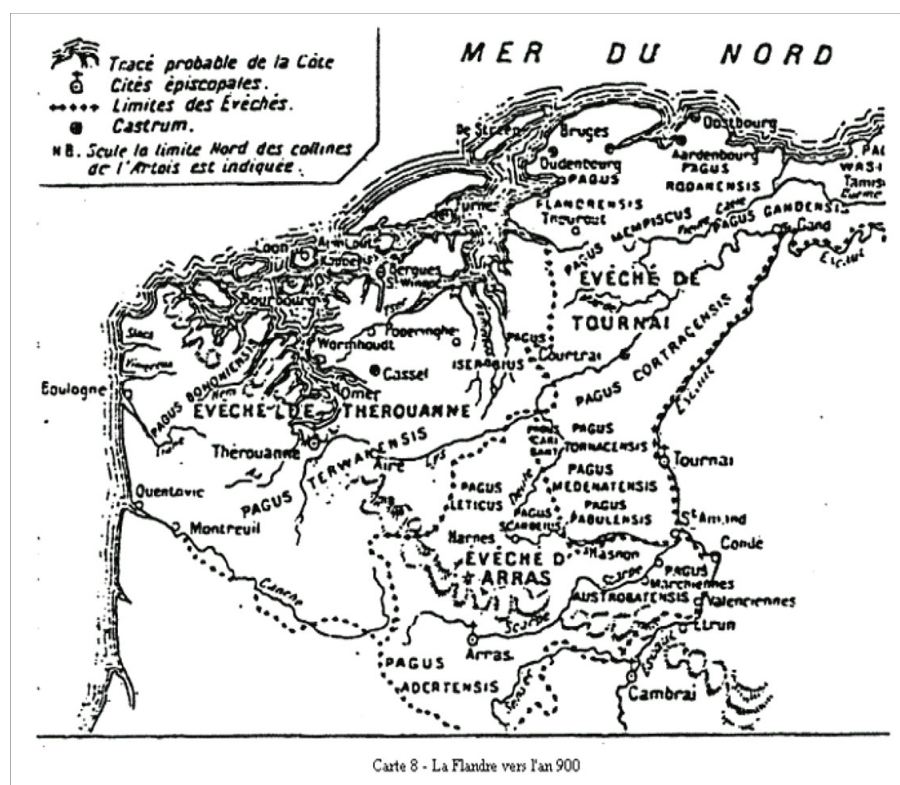


Figure 97. Carte représentant la Flandre vers l'an 900

Cette carte est extraite de la plaquette « L'ancienne Flandre de la préhistoire à nos jours » de Jean-Marie Regnault, président de la section lilloise de la Fédération française de l'union touristique *Les amis de la nature* [http://utan.lille.free.fr/Flandre_Historique.pdf]. Cette représentation n'est donc qu'indicative.

11.3. Choix des limites temporelles

Le prochain chapitre aura pour objectif de quantifier l'articulation multi-échelle dans l'espace picard et artésien à partir de la fenêtre présentée tout au long de la partie précédente. Il faut préciser les périodes géographiques de la répartition des châteaux d'après les informations historiques présentées précédemment. L'information sur les châteaux étant très lacunaire, il faut préférer une analyse séculaire à une analyse annuelle. Pour construire la première période, le plus simple est de considérer que les cadres géographiques carolingiens perdurent jusqu'au XII^e siècle. La première période va donc de 900 et 1100. Ce découpage est fortement discutable dans la mesure où, sur cette carte, les limites de la seigneurie de Corbie ne sont pas tracées. Toutefois, cette dernière n'eut qu'une cinquantaine d'années d'existence, en tant que territoire original.

La seconde période va de 1100 et 1300. Elle correspond à l'intégration des petites seigneuries picardes dans le royaume de France. La troisième période va de 1300 à 1400. Elle correspond à l'intégration du Ponthieu et du Calais dans le royaume d'Angleterre. La quatrième période va de 1400 à 1500. Elle correspond à la construction de l'État bourguignon dans l'espace picard et artésien. La cinquième période va de 1500 à 1700. Elle correspond à l'intégration définitive de la Picardie historique (Amiénois, Ponthieu, Boulonnais, Calais) dans le royaume. La sixième période va de 1700 à nos jours. Elle correspond à la construction de la frontière franco-belge moderne.

Dans chacune des limites connues pour chacune de ces périodes, une dimension fractale sera calculée pour essayer de mesurer la cohérence territoriale de ces différentes entités, mais avant, une analyse générale atemporelle de la répartition des châteaux circonscrite à l'espace français actuel du nord-ouest de la France sera menée dans le but d'avoir une base de comparaison. En effet, l'information à petite échelle sur la répartition des châteaux pour la France est inaccessible pour une raison simple : les cartographies des sites castraux sont rares, très ponctuelles et très partielles. Si l'on prend l'intégralité de l'information sur la fenêtre spatiale et atemporelle, on construit une dimension fractale de référence qui, en principe, devrait être indépassable, puisque l'on considère l'ensemble des châteaux quelle que soit la période de construction. Il ne peut pas y en avoir plus, sauf méconnaissance historique de certains complexes aujourd'hui totalement disparus.

12

La réflexion sur l'analyse spatio-temporelle à partir du cas bovois

L'avantage de la base de données « Catiau », malgré toutes ses imperfections, est qu'elle permet de mener une analyse diachronique sur le long terme. Dans ce chapitre, seul le cas de Boves (80), village proche d'Amiens (80), sera traité.

12.1. Le temps et la loi d'évolution de Laurent Nottale (2000)

Les données historiques et/ou archéologiques étant incertaines, la connaissance de la date de construction, ou de destruction, d'une motte, ou d'un château, peut varier de l'année près au siècle près. Il est donc plus simple de cartographier le nuage des mottes et châteaux que d'établir la répartition temporelle. Pour y remédier, ce temps historique peut être modélisé par l'intermédiaire de la loi chronologique log-périodique d'évolution de Laurent Nottale (*et alii*, 2000 ; 2002), à savoir :

$$T_n = T_C + (T_0 - T_C)g^{-n} \text{ où } g = k^{\frac{1}{D}}$$

avec k entier si le nombre d'embranchements (choix potentiels à chaque bifurcation du système) reste constant à chaque étape et si D est une dimension fractale valant 2 (Mandelbrot, 1977) qui relie le rapport d'échelle au nombre d'embranchements, et T_0 l'origine de l'évolution considérée déterminée par un événement arbitrairement choisi à $n = 0$.

Il s'agit d'une loi phénoménologique puisqu'elle est restreinte à des phénomènes particuliers. Avant d'appliquer l'équation, il faut caler les données avec trois dates. Ce calage consiste à calculer g et T_C à partir des premières dates. Il faut préciser que

$$T_{n+1} = \frac{T_C(g-1) + T_n}{g} \text{ et } T_{n-1} = T_C + g(T_n - T_C)$$

Autrement dit, la série chronologique est déterminée par l'origine spatio-temporelle que l'on a choisie. On calcule ensuite g et T_C entre n et $n+1$ de la manière suivante :

$$T_C = \frac{gT_{n+1} - T_n}{g-1} = \frac{T_{n+1}^2 - T_n T_{n+2}}{2T_{n+1} - T_n - T_{n+2}}$$

$$g = \frac{T_{n+1} - T_n}{T_{n+2} - T_{n+1}} = \frac{T_n - T_C}{T_{n+1} - T_C}$$

Ce type d'équation n'est pas exceptionnel en soi. Elle porte le nom de convergence géométrique. Ce point présente la particularité d'être super stable. Il faut toutefois insister sur le fait que le cœur de cette loi est le rapport g . Celui-ci est un rapport d'intervalles constant qui caractérise une invariance d'échelle.

Il faut également préciser que les lois log-périodiques sont des lois périodiques dans un espace logarithmique. Elles peuvent correspondre à des accélérations, à des décélérations ou à des lois périodiques normales (dans le cas où $g = 1$).

Dans la pratique, il faut ajuster numériquement g et T_C par une méthode d'estimation statistique comme celle des moindres carrés. On peut utiliser aussi comme estimateur statistique la variable t de Student dans un tirage de Monte-Carlo (Figure 99).

12.1.1. L'archétype temporel de Boves

Aujourd'hui, l'exemple de Boves sert toujours d'archétype. Le site archéologique de Boves se situe à huit kilomètres au sud-est d'Amiens. Il est essentiellement d'époque médiévale et il fait l'objet d'une étude très approfondie depuis treize ans (Racinet, 1996-2009). C'est un complexe castral constitué d'une motte, d'un château et de bâtiments d'habitation et/ou ecclésiastiques (Racinet et Drouin, 2002 ; Racinet et Schwerdroffer, 2004).

C'est bien sûr grâce à tous les travaux existant sur ce site que cette étude a pu être possible et réalisée. Ainsi, dix « dates remarquables » ont été retenues pour construire le modèle. Les quatre premières ont été choisies en fonction des données archéologiques. 920 et 960 correspondent aux deux premières structures en bois construites sur la motte ; on peut estimer la barre d'erreur à plus ou moins 25 ans. Vers 1025, les occupants ont mis en place une structure mi-pierre, mi-bois ; la barre d'erreur est également de plus ou moins 25 ans. Vers 1140, ils commencent à bâtir le premier château à proprement dit, avec une barre d'erreur de plus ou moins 20 ans. Par l'étude d'Olivier Leblanc (2003), on sait que la motte est ensuite occupée de manière continue. Le château connaît alors plusieurs transformations et reconstructions.

Les six dernières dates sont obtenues à partir de sources historiques déjà exploitées. Entre 1360 et 1380, les ducs de Lorraine reconstruisent le château. Vers 1604, ce dernier château fut détruit, ce qui déboucha sur une occupation de moins en moins intensive. Du XIX^e au XXI^e siècle, le site fut réactivé en 1870, lors de la guerre franco-allemande puis en 1914-1918, lors de la première guerre mondiale et enfin en 1939-1945, lors de la seconde guerre mondiale. À partir de 1997 débutèrent les fouilles archéologiques. Une simplification a été réalisée afin de résumer les quatre dernières dates entre la fin du XIX^e siècle et le XX^e siècle en une seule. En effet, leur connaissance précise n'est due qu'à la proximité temporelle que nous avons par rapport à elles. Aussi, ces quatre dates ont été « résumées » par la date 1945 qui est symbolique de la fin des guerres franco-allemandes et du début de la construction européenne. De plus, la dernière trace « en dur » (un bloc de béton armé) laissée sur le chantier date de cette époque.

n	Date réelle	$g(n, n + 1, n + 2)$	$T_C(0, n)$	$T_C(0, n)$	$\ln(T_n - T_C)$
BIFURCATION					
0	920 ± 25				1,32
1	960 ± 25	0,62 ± 0,88	856,00	856,00	1,32
2	1025 ± 25	0,57 ± 0,46	870,71	875,50	1,78
3	1140 ± 20	0,52 ± 0,19	883,34	899,05	2,10
4	1360 ± 1	0,90 ± 0,90	62,47	-876,67	2,66
BIFURCATION					
5	1604 ± 1	0,72 ± 0,01	762,08	746,23	2,85
6	1945 ± 1				3,02
BIFURCATION ?					

Figure 98. Les dates calendaires observées et premières estimations de g et T_C

La Figure 98 donne une première estimation de g et deux estimations de T_C . Elle montre une décélération (Cash *et alii*, 2002). Toutefois, les barres d'erreurs ont été sans doute surestimées dans ce cas.

Après plusieurs tests manuels, on trouve une valeur g comprise entre 0,56 (de n_0 à n_4) et 0,68 (de n_5 à n_6). La différence des valeurs s'explique sans doute par la présence d'une bifurcation entre n_4 et n_5 (Figure 98). Laurent Nottale a confirmé ces résultats en effectuant un tirage de type Monte Carlo afin d'ajuster g et T_c en utilisant l'estimateur statistique de la variable t de Student (fig. 30). On constate que pour $g \approx 0,56938$ on observe un pic de la variable t de Student avec un $T_c \approx 870$ pour les cinq premières dates de la série. Il n'y a qu'une chance sur 50 000 d'obtenir ces résultats au hasard.

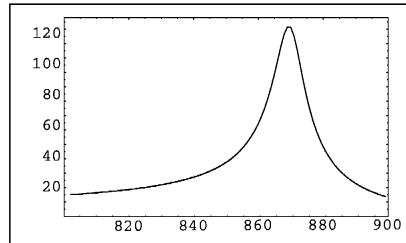


Figure 99. L'ajustement de g et de T_c par un tirage Monte-Carlo (communication personnelle de Laurent Nottale)

La valeur de T_c est donc voisine de 870. Cette valeur n'est pas aberrante, ni pour l'historien, ni pour le géographe, puisqu'il s'agit du moment où l'empire carolingien se désagrège.

La fonction de bifurcation $f(x)$ varie comme la fonction $(|T - T_c|)^m$ où m est le nombre de bifurcations (Figure 100). Le problème est que dans le cas de Boves m n'est pas constant, d'où la nécessité de diviser la courbe en au moins deux parties : dans la première, $m = 3$, dans la seconde $m = 2$. La rupture de pente de la courbe peut être interprétée, aussi comme une bifurcation.

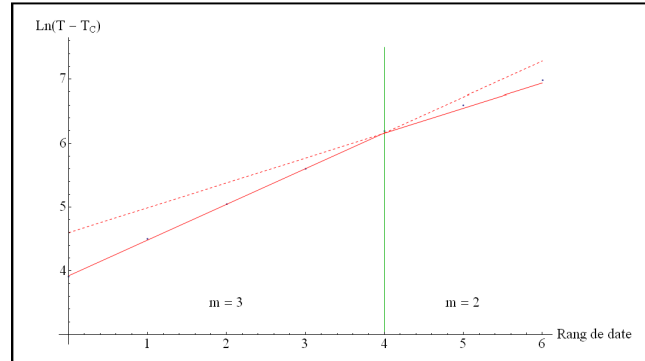


Figure 100. La relation entre le rang et le $\ln(T_n - T_c)$

La Figure 101 présente les dates théoriques obtenues à partir des valeurs de g et de T_c choisies, réinjectées dans l'équation de l'évolution.

n	Date théorique	g optimisé	$\ln(T_n - T_C)$
BIFURCATION			
0	920		1,70
1	959	0,56	1,95
2	1028	0,56	2,20
3	1150	0,56	2,45
4	1366	0,56	2,70
BIFURCATION			
5	1600	0,68	2,86
6	1944	0,68	3,03
BIFURCATION ?			

Figure 101. Les dates théoriques obtenues par l'équation de l'évolution

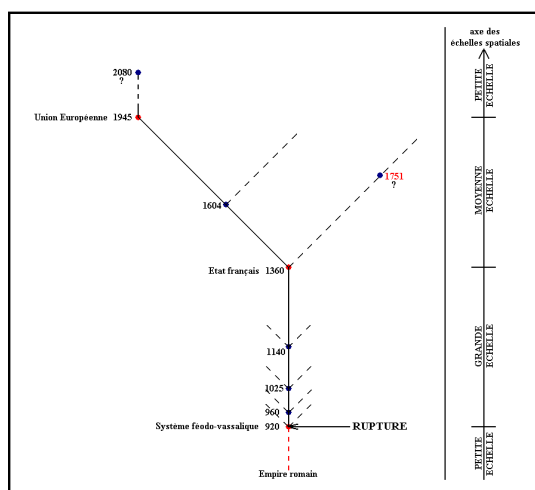
On constate ainsi qu'après chaque bifurcation supposée, le nombre d'embranchements, c'est-à-dire en fait l'ampleur du choix, diminue. Il passe de trois à deux. Puis, si on prend comme date suivante 2080 ± 30 dans le cadre d'une étude du rythme économique, crise - non crise, dans les sociétés occidentales (Nottale *et alii*, 2000), il passe de deux à un. Ce qui, en soi, pour une occupation d'un site archéologique, c'est-à-dire un site qui a subi une « extinction », est très logique.

De plus, d'un point de vue purement mathématique, on remarque que si $D = 2$ alors :

$$\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 = \left(\frac{0,68}{0,56}\right)^2 \approx 1,47 \approx \frac{3}{2}$$

ce qui correspond bien à l'hypothèse des trois embranchements qui sont portés au nombre de deux après la bifurcation temporelle.

La Figure 102 montre le nombre de choix d'évolutions possibles. Au début, il y a une rupture entre l'empire carolingien et le système féodal, marquée par une désagrégation spatiale. De 920 à 1360, il y a, à chaque « moment historique » trois branches possibles donc trois futurs potentiels dont seulement un se réalisera. Cela étant, le système ne semble avoir réellement bifurqué qu'à partir du moment où le nombre de choix possibles s'est réduit à deux (en 1360). La bifurcation peut s'expliquer par l'intégration définitive, à une échelle plus petite, du site de Boves dans l'Etat français en construction.

Figure 102. L'arbre de l'évolution spatio-temporelle du site de Boves de la fin de l'empire carolingien au XXI^e siècle

Si l'évolution s'était poursuivie autrement (absence d'État français par exemple), l'étape suivante de construction aurait eu lieu, sur la motte, vers 1751 (?). Quelle forme cette césure aurait-elle pu prendre ? Quelle nouvelle structure territoriale aurait pu, là, prendre naissance ? Nous ne le savons pas mais certains *scenarii* pourraient être échafaudés.

Rappelons qu'après 1748, année du traité d'Aix-la-Chapelle, et la constitution de la Prusse et de l'Autriche « la possibilité d'une hégémonie française sur l'Europe disparaît » (Duby, 1971, t.3, p. 246). La France devra ensuite ferrailer d'abord pendant la Révolution, puis entre 1869 et 1870, puis entre 1914 et 1918 puis enfin entre 1939 et 1945 pour assurer son existence.

La seconde bifurcation a lieu en 1945, si on prend comme $T_c = 2080 \pm 30$, et si on considère comme recevables les résultats de Laurent Nottale *et alii* (2000). Là, il n'y a plus qu'un choix possible. L'évolution du site n'a plus qu'une possibilité, qu'une branche. Tout comme les états antérieurs, cela peut s'expliquer par l'intégration européenne. Il ne présente plus aucun intérêt quels que soient les niveaux considérés, sauf au niveau scientifique. À partir de là, il n'est pas impossible de penser que le site de Boves restera dans son état actuel : c'est-à-dire à l'abandon jusqu'à la prochaine rupture (2080 ?) qui peut être lui redonnera un intérêt stratégique.

12.1.2. Bilan et perspective

Pour finir, il faut préciser que, pour l'ensemble des séries temporelles, trois cas sont possibles (lorsqu'il existe au moins trois dates connues) : (1) l'accélération ; (2) la décélération ; (3) l'oscillation non amortie. À la vue des données déjà recueillies, les trois possibilités semblent exister. Toutefois, la qualité des données temporelles étant ce qu'elle est, elle ne permet pas la réalisation d'une chronologie aussi précise que celle du château de Boves. Les dates sont incertaines ; beaucoup de dates ont une barre d'erreur de 200 ans. Aussi mener une analyse temporelle généralisée aux 1 412 autres sites semble fastidieux par rapport à la qualité des données. Seule l'analyse spatiale donne des résultats exploitables.

12.2. L'espace

Cela étant, l'approche de Laurent Nottale demeure avant tout temporelle. Aussi, faut-il la compléter par une analyse spatiale (Nottale, 1993 ; Nottale *et alii*, 2000, p. 350-353). L'analyse radiale a été retenue pour la réaliser en première approche.

12.2.1. La méthode de l'analyse radiale

Afin de mener à bien cette réflexion, il faut partir d'une première approximation en supposant que le nombre de châteaux recensés dans la fenêtre étude n'a pas varié au cours du temps, ce qui implique que la distribution se serait cristallisée entre le X^e et le XIII^e siècle, ce qui est historiquement très discutable, comme ce sera montré dans le chapitre 14.

La méthode est assez simple (Martin, 1997 ; 2003b). On calcule une succession de densités de châteaux en fonction de la surface des anneaux formés par des cercles dont le centre est un château localisé.

On reporte ensuite les valeurs sur un graphique avec en abscisse le rayon maximal de l'anneau et en ordonnée le rapport : $\frac{\text{nombre de châteaux}}{\text{surface de l'anneau}}$, c'est-à-dire la densité de châteaux dans un anneau. Cependant, cette méthode présente des effets de bords non négligeables, car les anneaux ne sont jamais complets et leur surface croît en fonction de la distance au centre. De plus, il dépasse rapidement les frontières de la fenêtre d'étude. Autrement dit, certains anneaux ne sont jamais complets ! Cela peut engendrer une diminution virtuelle de la densité. Ainsi, les premiers résultats obtenus en 2005 (Forriez, 2005 ; Forriez et Martin, 2008, Martin et Forriez, 2008) sont complètement biaisés. La Figure 103 illustre le problème : à partir du cinquième anneau, les sites connus ne couvrent pas toute la surface de l'anneau. Il faut noter qu'il est spécifique à l'analyse radiale : si on avait choisi des carrés, comme dans une analyse fractale par comptage de boîtes carrées, il n'y aurait aucun effet de bord.

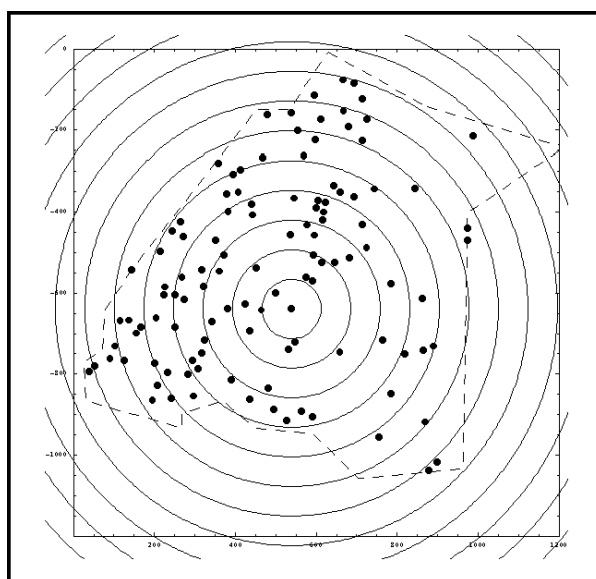


Figure 103. Exemple d'analyse radiale avec pour centre le château de Boves (communication personnelle de Laurent Nottale)

Réalisée sous *Mathematica* 4 par Laurent Nottale (juin 2006) avec l'ancien nuage de points (Forriez, 2005)

Ainsi, une méthode de correction de ces effets de bord a été mise au point. C'est ce que Laurent Nottale a appelé « méthode de la baignoire » (juin 2006). Pour l'illustrer, l'utilisation de la représentation cartographique de l'ensemble de la base « catiau » apparaît très intéressante (Figure 104). La méthode se décompose en trois étapes :

1. encadrer le nuage de points (Figure 105). Dans ce cas, les frontières sud et est sont purement virtuelles ; elles sont dues au choix de la fenêtre territoriale. Il faut noter qu'un petit rajout a été effectué à l'est pour prendre en compte la totalité des sites correspondant aux limites de la Picardie des XIV^e-XV^e siècle. Au nord, les sites belges n'ont pas pu être pris en compte, car les bases de données et les dictionnaires des châteaux sont franco-français. La frontière franco-belge crée une limite artificielle. Enfin, à l'ouest, la Manche crée une limite naturelle dont le trait de côte a été ici très grossièrement tracé ;
2. créer une distribution aléatoire de points dans cet encadrement ;
3. effectuer deux analyses radiales avec pour centre l'un des sites de la distribution analysée : l'une avec la distribution observée, l'autre avec la distribution aléatoire dans chaque anneau le rapport entre le nombre de points de la distribution aléatoire et le nombre de points de la distribution observée varie comme celui entre la densité aléatoire et la densité observée. On obtient ainsi une densité relative dont la variation permet de juger si la densité réelle, qui demeure inconnue, varie en fonction de la distance au centre ou reste constante.

Démonstration.

Soit un anneau dont la surface S_T est connue. Toutefois, la distribution des points est concentrée sur une surface inconnue S_R dans cet anneau.

Soit $\rho_R = \frac{N_R}{S_R}$ correspondant à la densité réelle du nombre de points sur la surface S_R .

Cependant, on ne peut estimer que $\rho_{obs} = \frac{N_R}{S_T}$ puisque S_R est inconnue. En effet, si l'anneau était complet, on aurait $\rho_C = \frac{N_C}{S_T}$.

Le remplissage de l'anneau correspond alors à :

$$\begin{aligned} \frac{S_R}{S_T} &= \frac{\frac{N_R}{S_R}}{\frac{N_C}{S_T}} = \frac{\rho_C}{\rho_R} \times \frac{N_R}{N_C} \\ \Rightarrow \frac{\frac{N_R}{S_R} S_R}{S_T} &= \rho_C \frac{N_R}{N_C} \\ \Rightarrow \frac{N_R}{S_T} &= \rho_C \frac{N_R}{N_C} \\ \Rightarrow \rho_R &= \rho_C \frac{N_R}{N_C} \end{aligned}$$

La densité observée est proportionnelle à la densité réelle. Toutefois, cette densité réelle reste inconnue. On crée alors une densité aléatoire de référence $\rho_A = \frac{N_A}{S_T}$ proportionnelle à la densité réelle.

$$\rho_C \propto \rho_{obs} \frac{N_A}{N_R}$$

Dans le cas de la Figure 105, la table de référence comporte, au total, 7 263 lieux aléatoires.

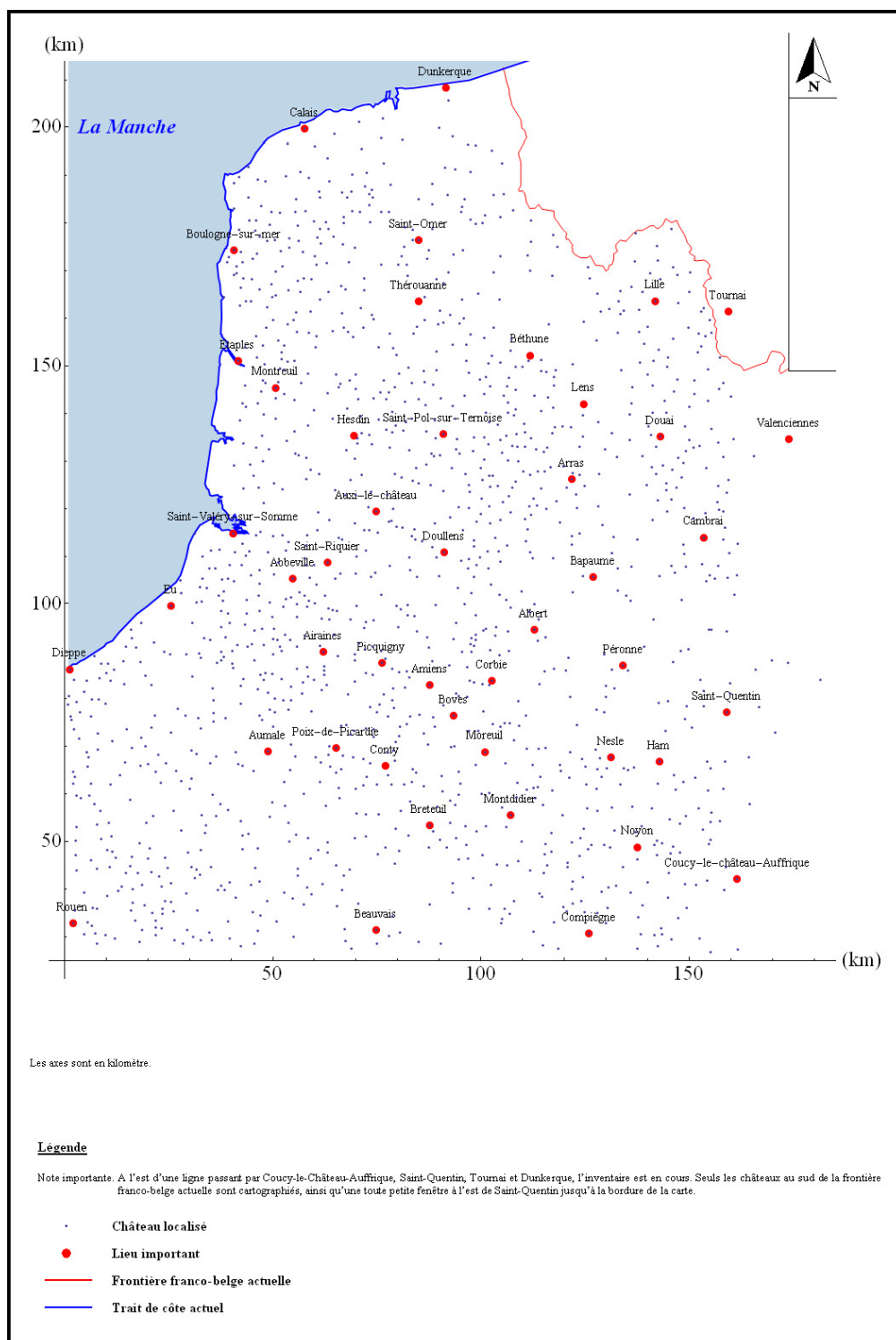


Figure 104. Nuage de points des châteaux connus

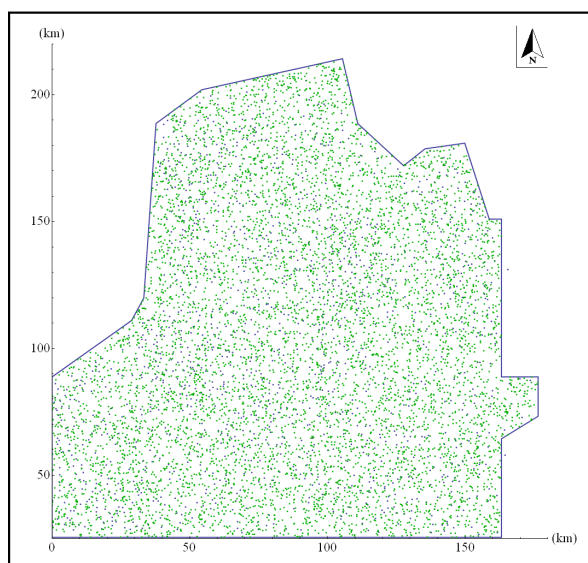


Figure 105. Encadrement du nuage de points

Point vert = point aléatoire ; point rouge : site dans un hameau ; point bleu : site dans une commune centre

12.2.2. Exemple de la répartition des châteaux autour de Boves

Étant donné qu'il existe 1 413 sites identifiés et 3 738 communes centres et hameaux, il est nécessaire de présenter davantage la méthode que l'ensemble des résultats. L'exemple choisi est bien évidemment l'étude de la répartition des châteaux autour du site de Boves.

Pour cela, on applique la méthode décrite précédemment. Quel que soit l'intervalle entre les anneaux choisi, la distribution entre le rayon maximal de l'anneau et le nombre de châteaux connu dans l'anneau semble correspondre à une gaussienne centrée autour de 75 km, si l'on excepte les cas des intervalles 100 km et 130 km où les anneaux sont trop grands pour être centré sur cette valeur (Figure 106). La densité de châteaux par anneaux croît rapidement du premier anneau vers un certain anneau, puis décroît beaucoup moins rapidement vers le dernier anneau (Figure 106). De même, on observe des résultats analogues pour les lieux aléatoires (Figure 107). Par contre, le rapport entre le nombre de lieux aléatoires par anneaux et le nombre de châteaux par anneaux est constant d'un intervalle à l'autre (Figure 108). Autrement dit, la densité autour du château de Boves est constante. L'espace étudié est donc isotrope en ce point.

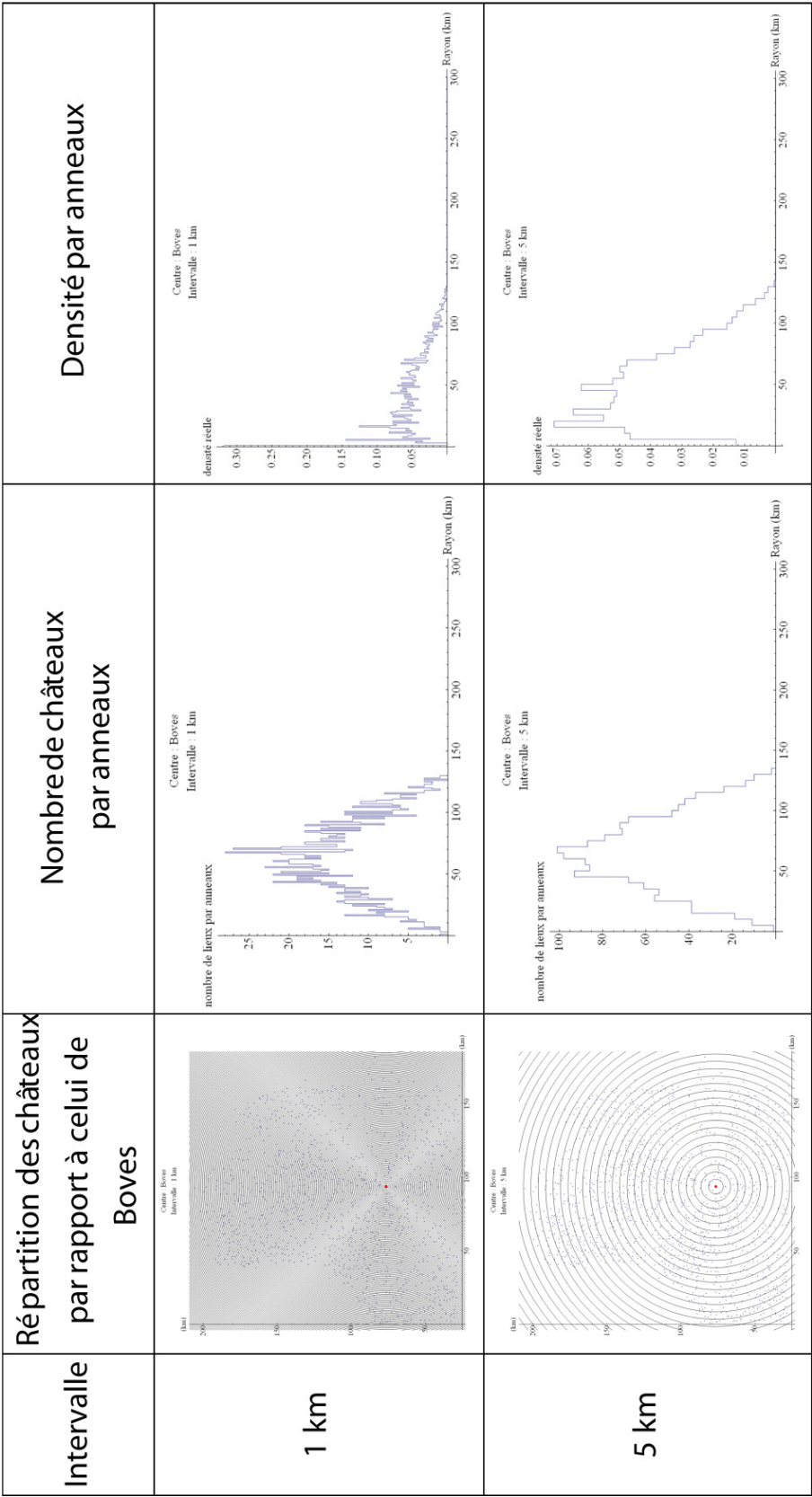


Figure 106-1. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

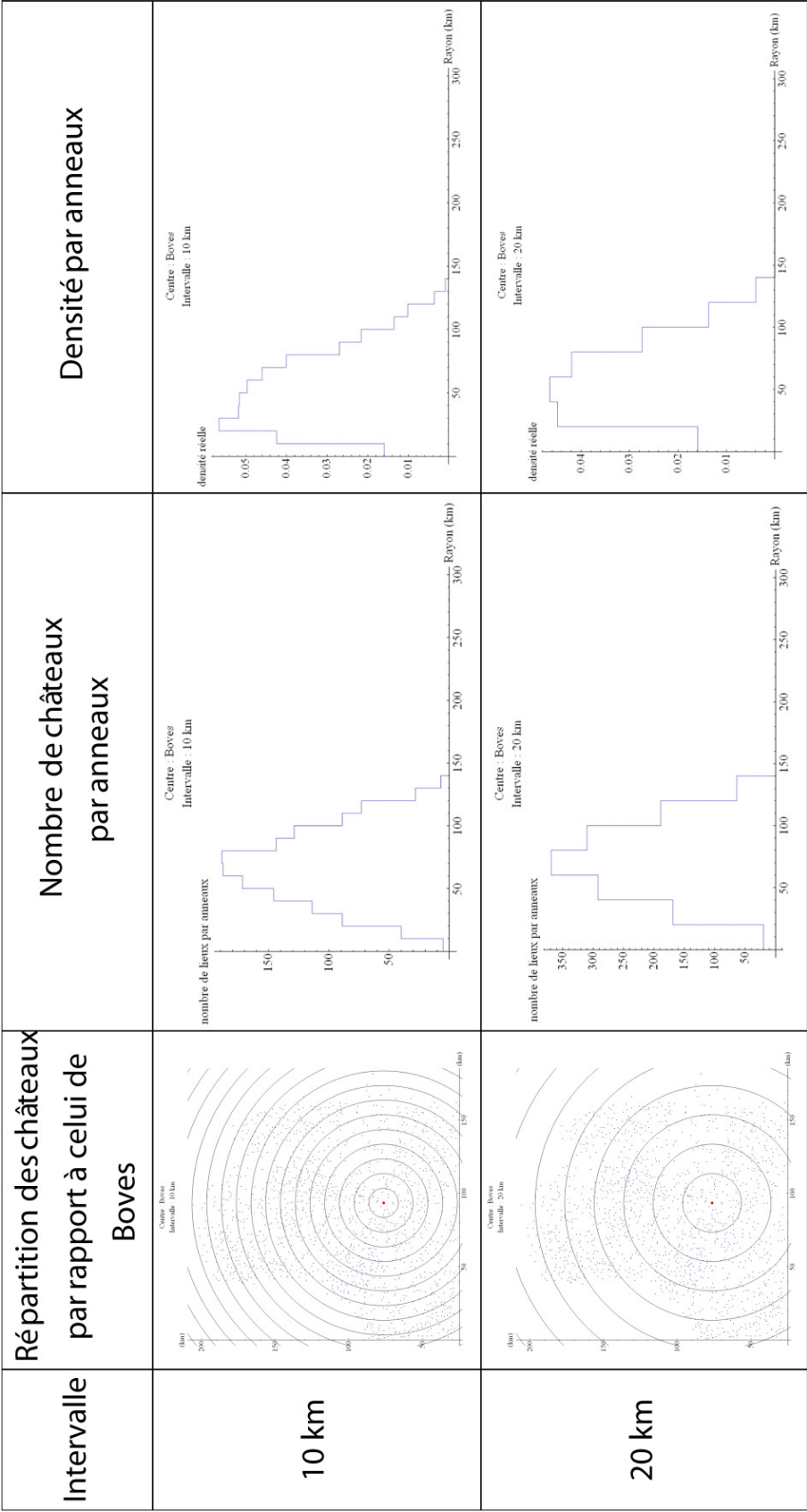


Figure 106-2. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

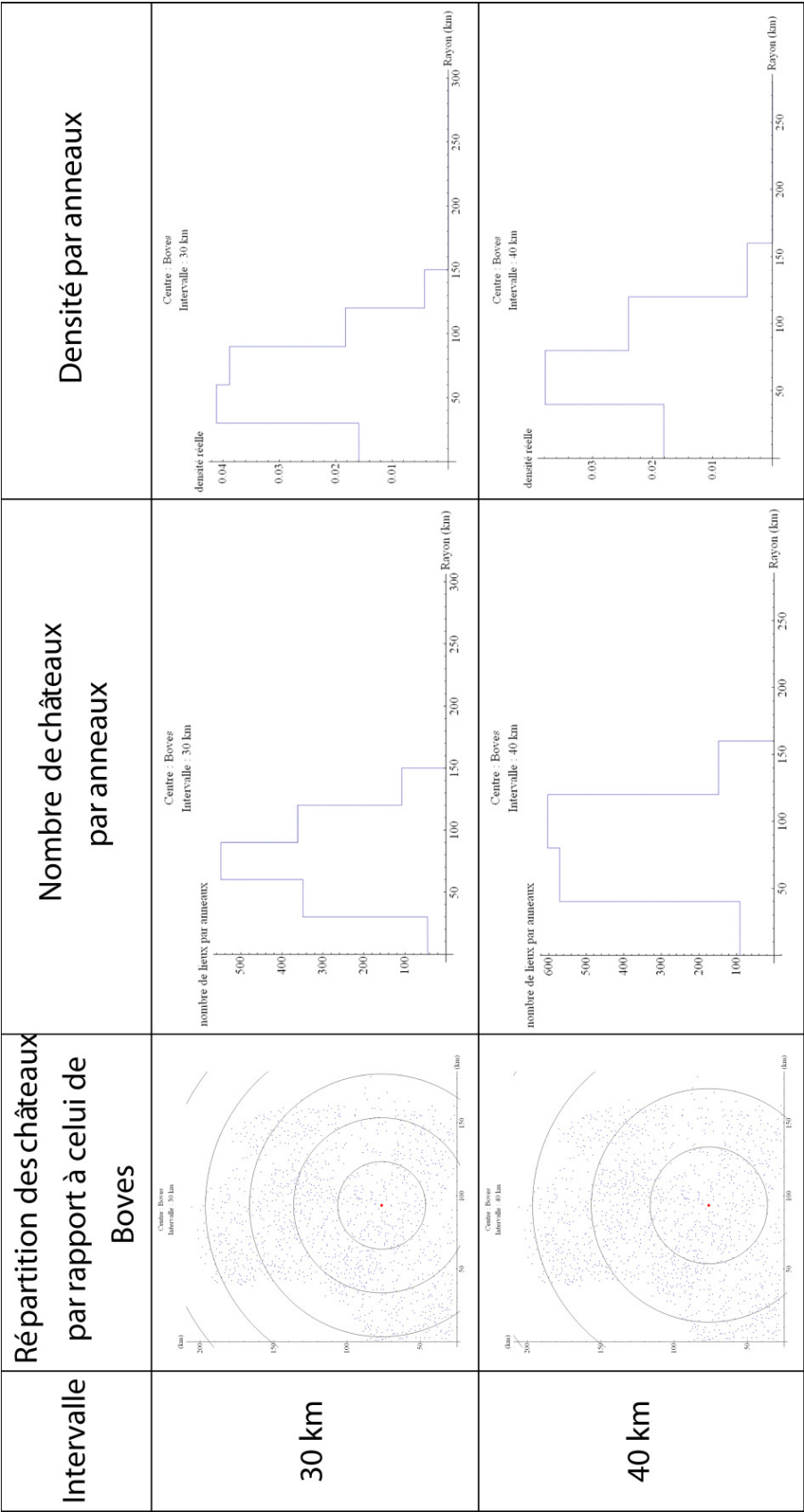


Figure 106-3. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

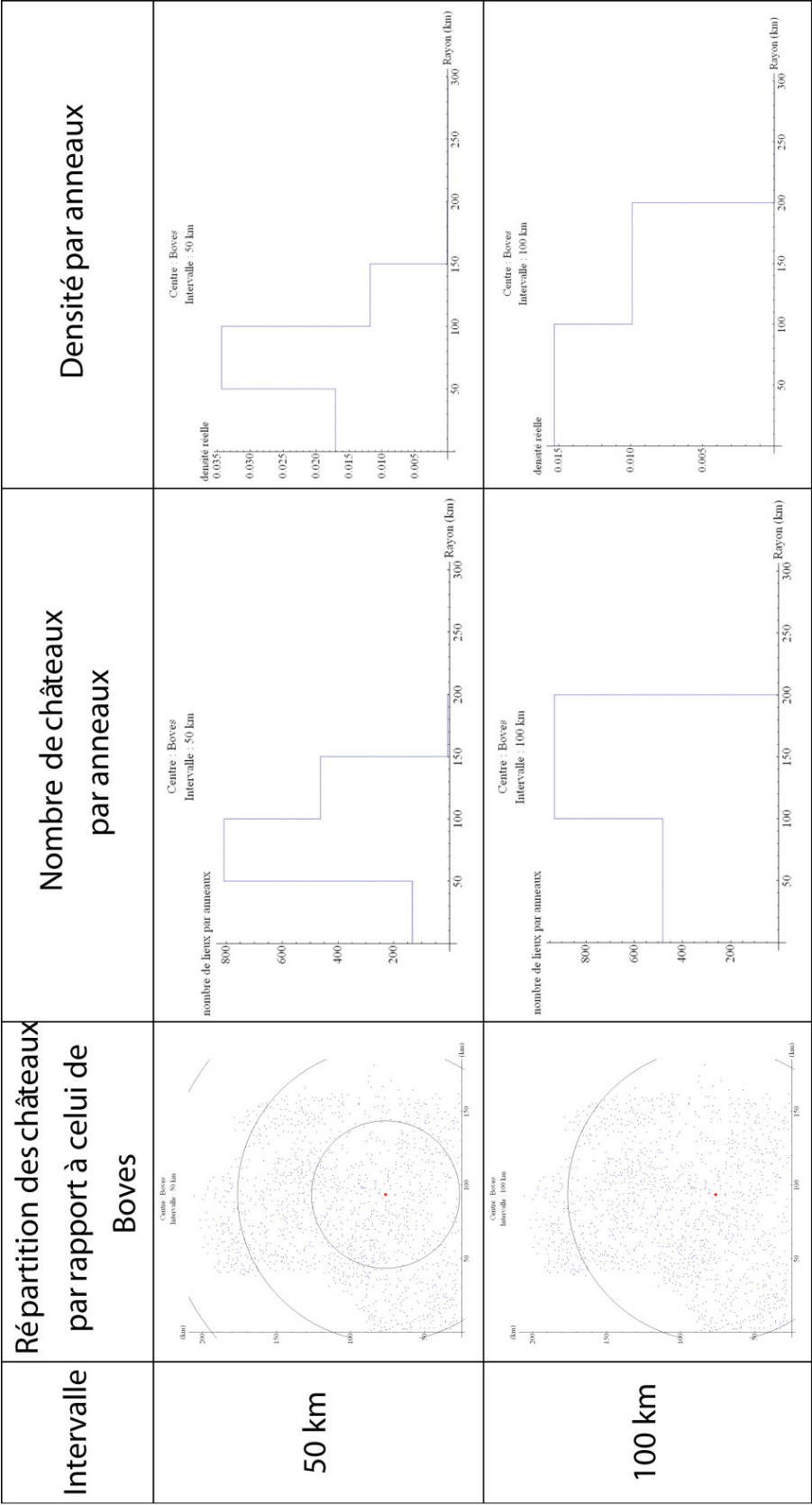


Figure 106-4. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

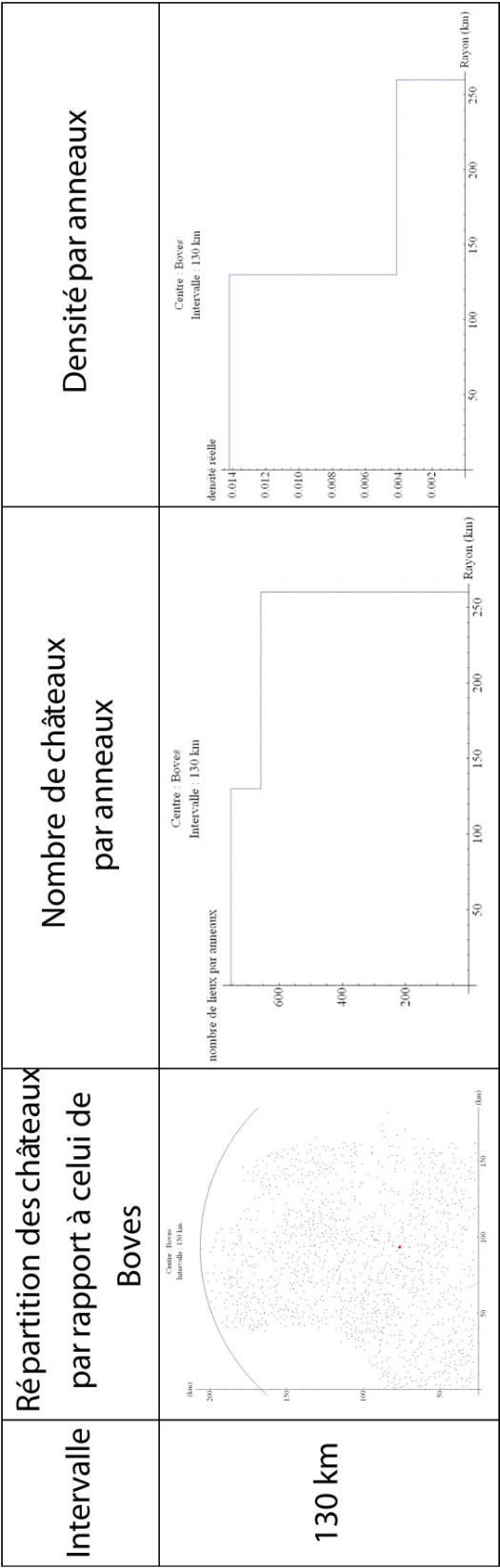


Figure 106-5. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves

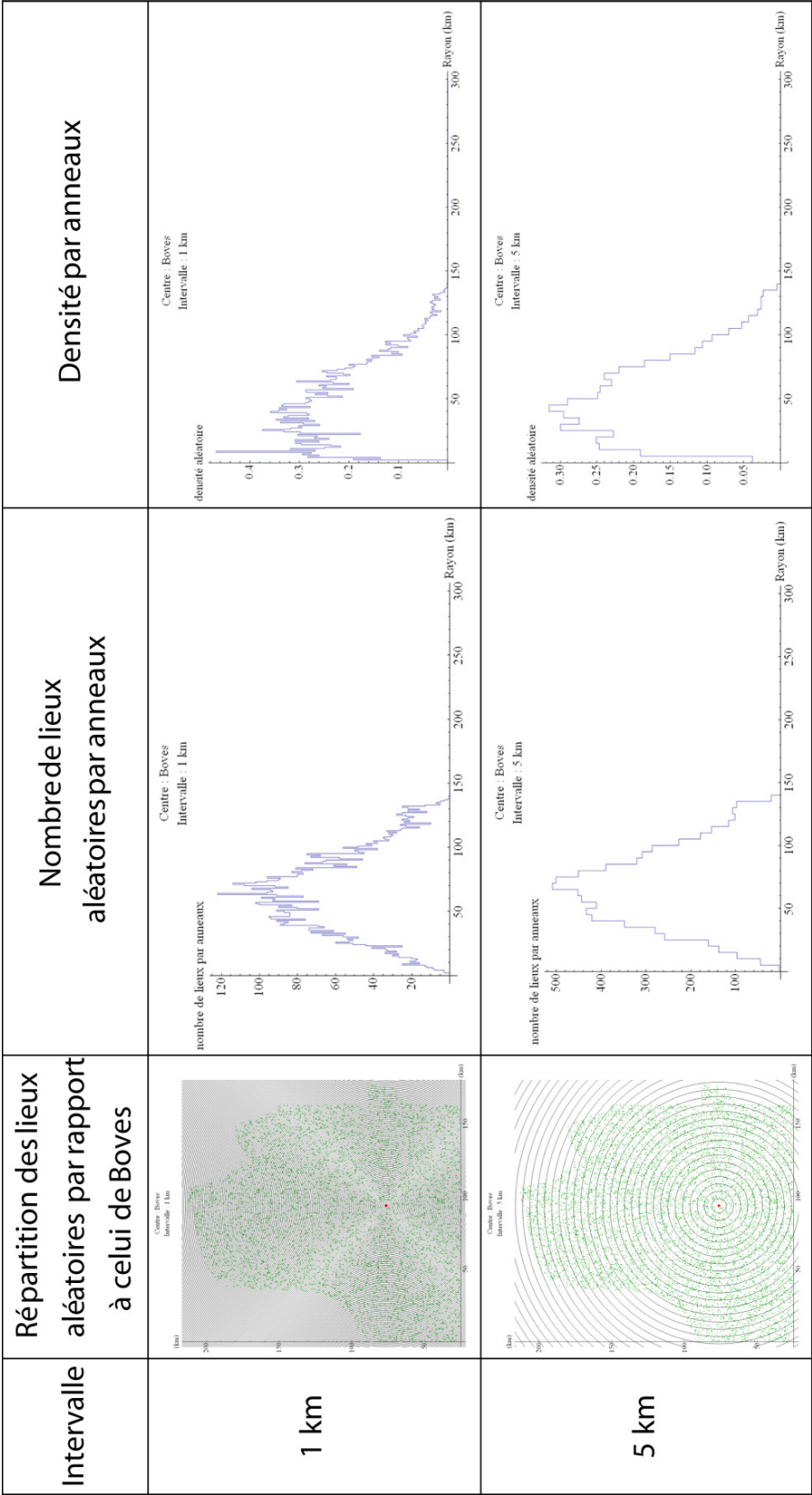


Figure 107-1. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

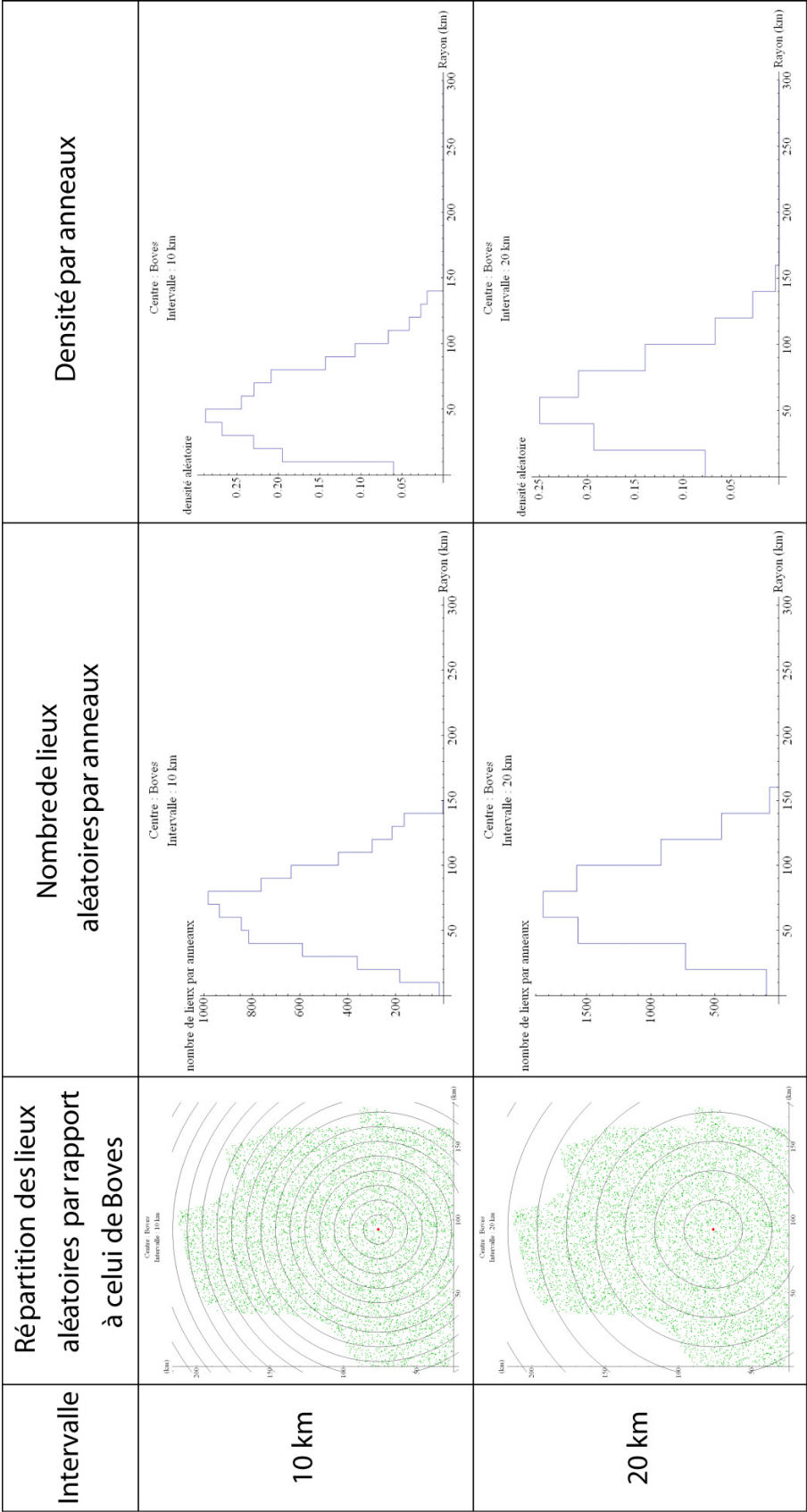


Figure 107-2. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

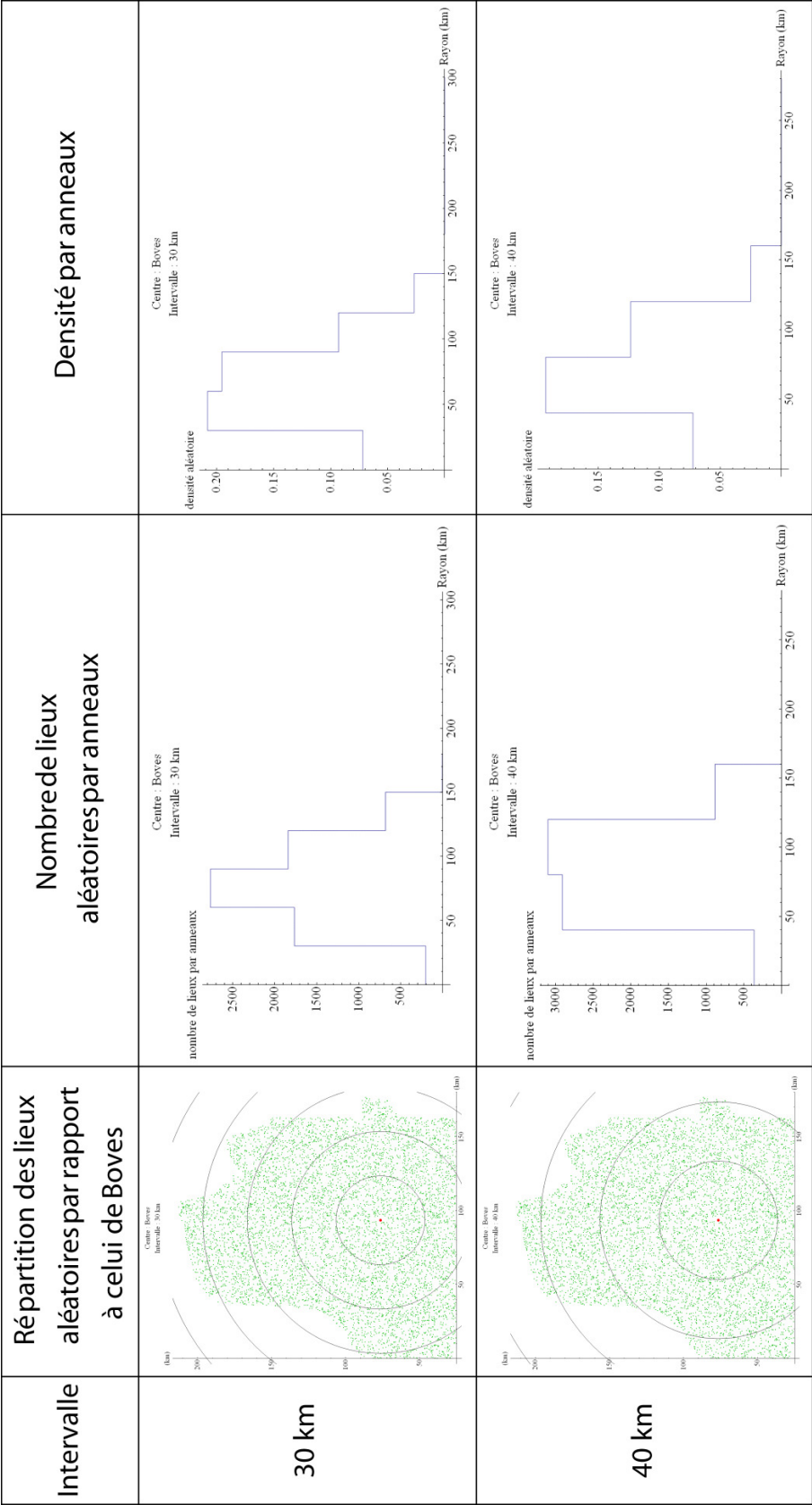


Figure 107-3. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

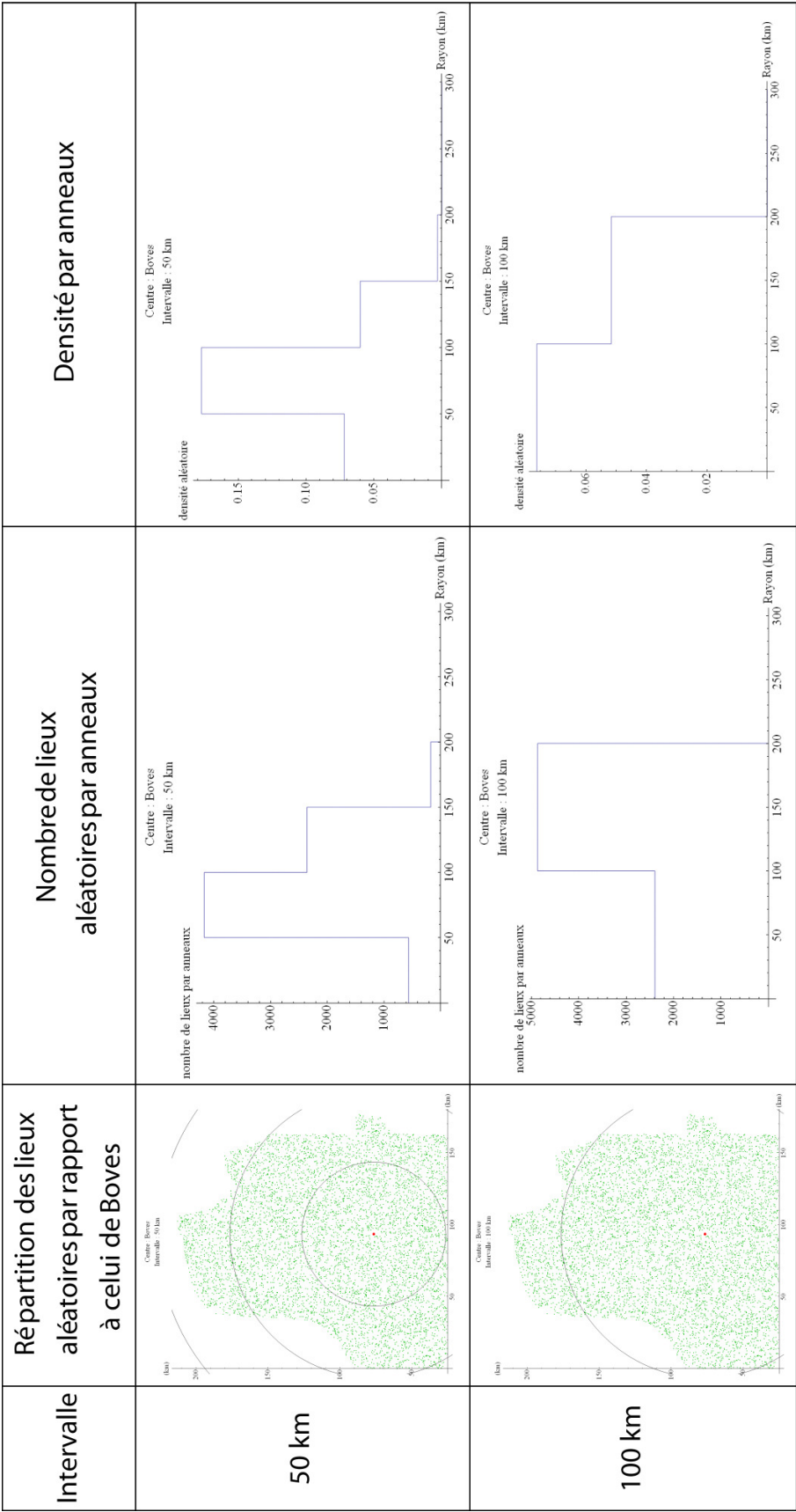


Figure 107-4. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

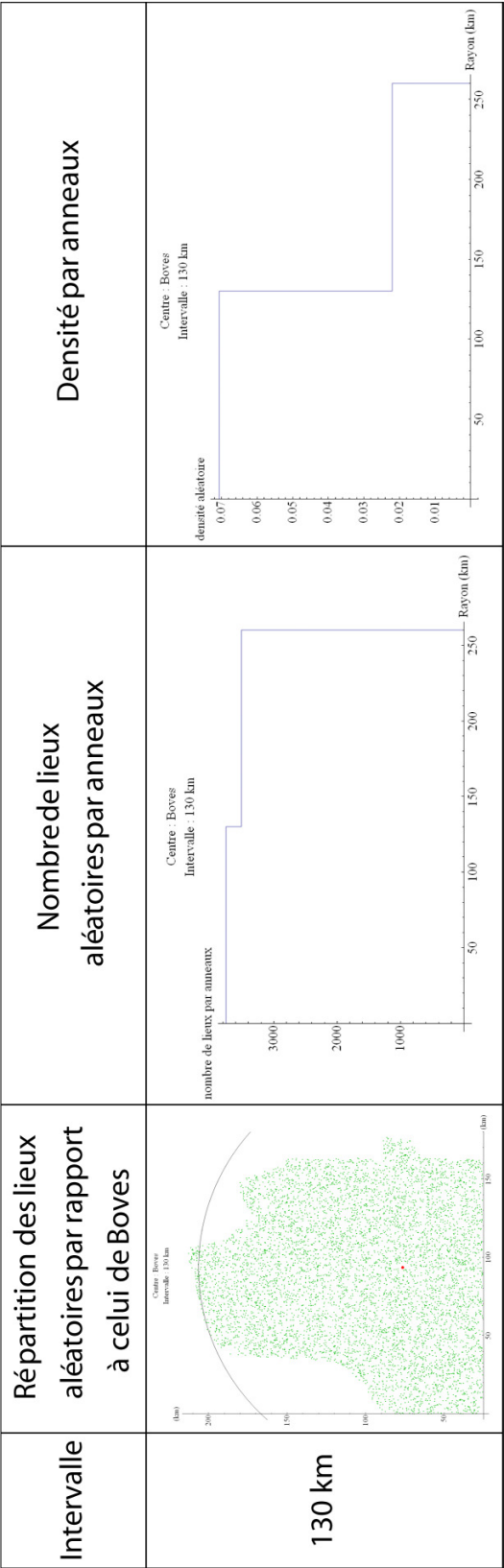


Figure 107-5. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves

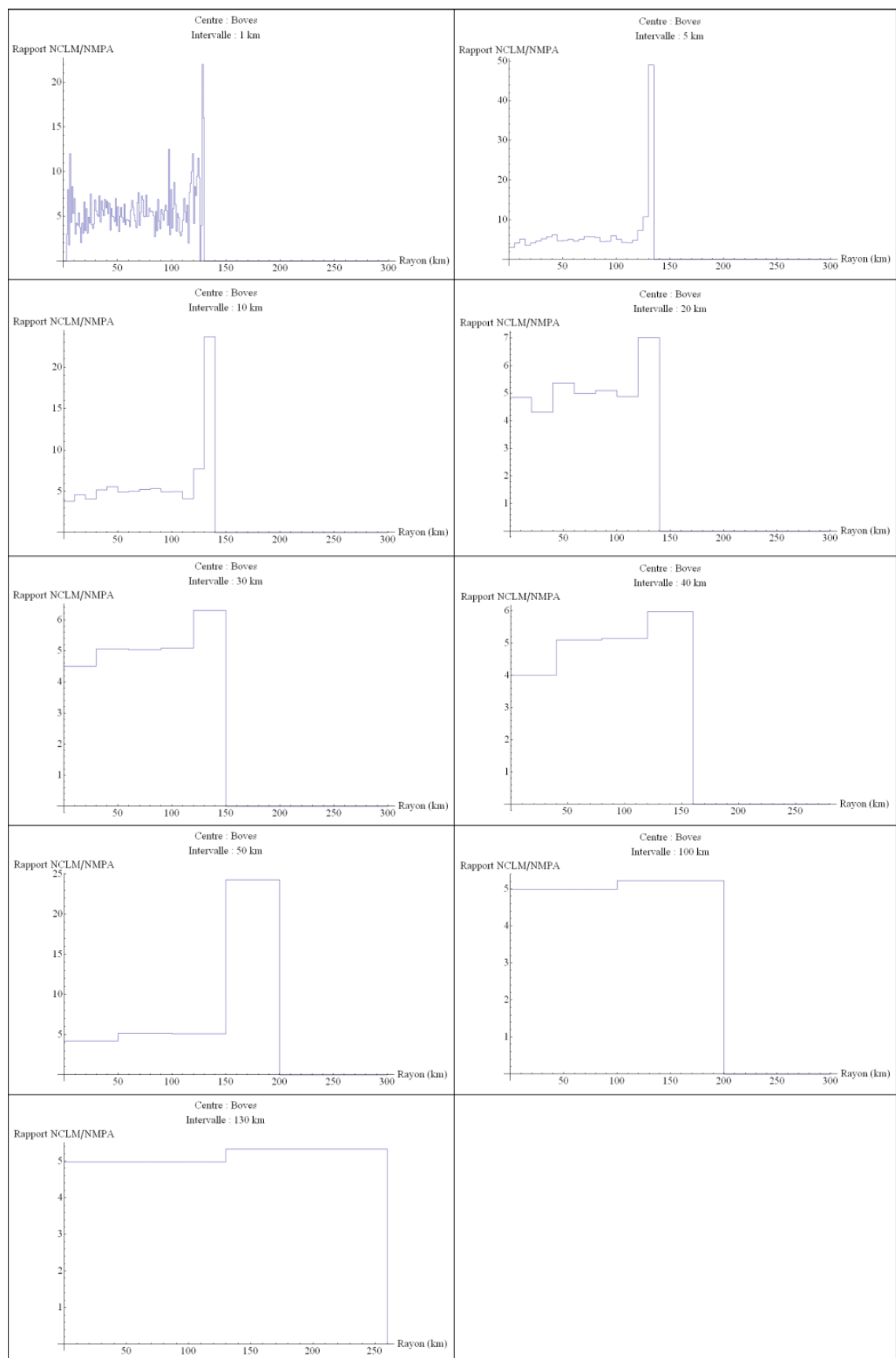


Figure 108. Variation du rapport entre le nombre de lieux aléatoires et le nombre de châteaux dans chaque anneau

12.2.3. Analyse radiale moyenne de la répartition de tous les châteaux

La question qui va être abordée dans ce paragraphe est la suivante. Le cas du château de Boves est-il valable en tout point représentant un château ? La réponse à cette interrogation est affirmative. D'après la Figure 109, la distribution entre le rayon maximal de l'anneau et le nombre moyen de châteaux (ou de lieux aléatoires) ressemble une fois à une gaussienne centrée autour de 75 km. De plus, le rapport entre le nombre moyen de lieux aléatoires et le nombre moyen de châteaux est constant en moyenne en tout point ainsi que dans chaque intervalle. Autrement dit, la densité est constante autour de chaque château. Ces résultats seront confirmés dans le chapitre suivant. L'espace étudié est donc, en moyenne, isotrope.

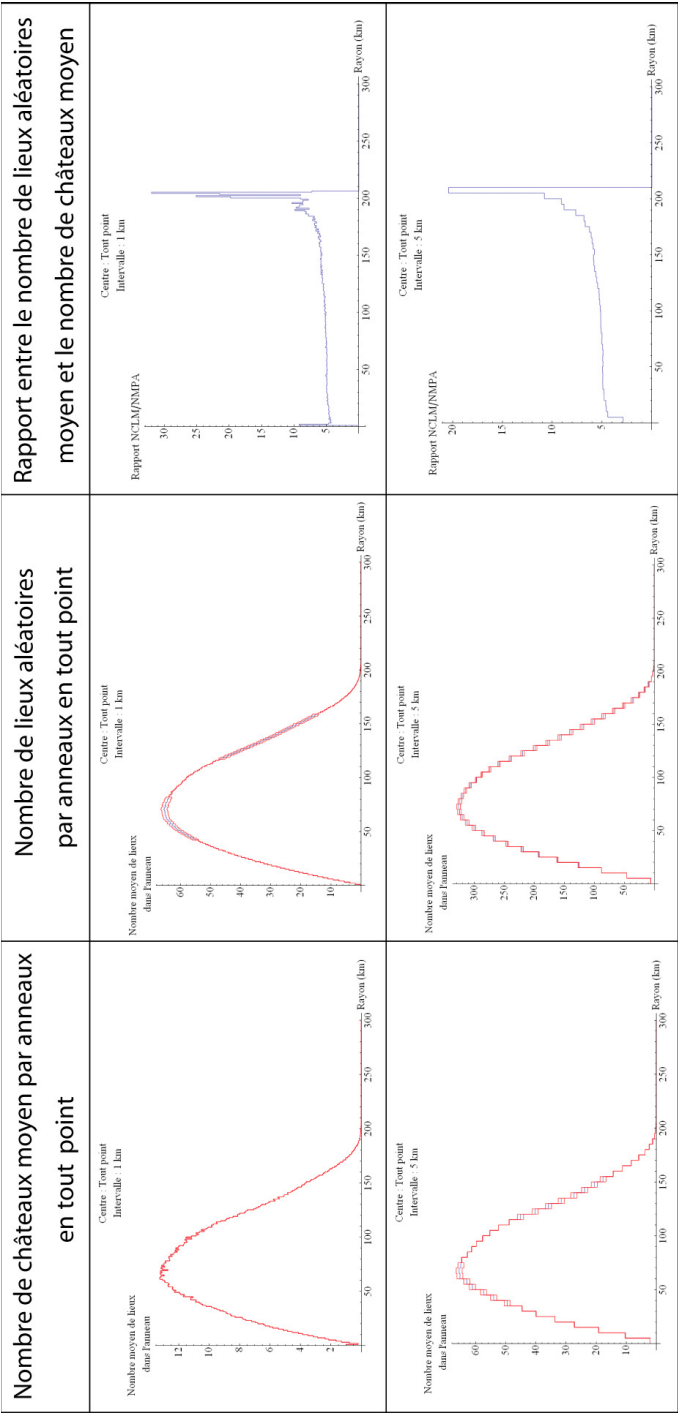


Figure 109-1. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

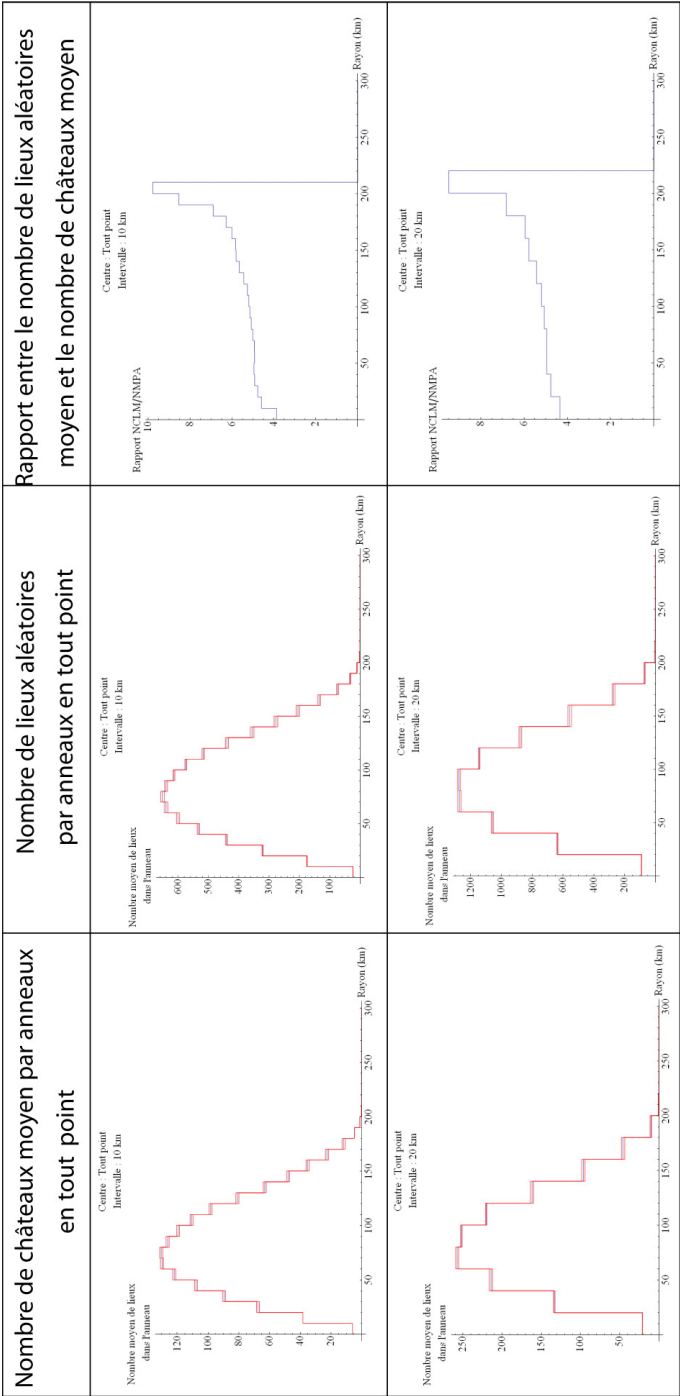


Figure 109-2. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

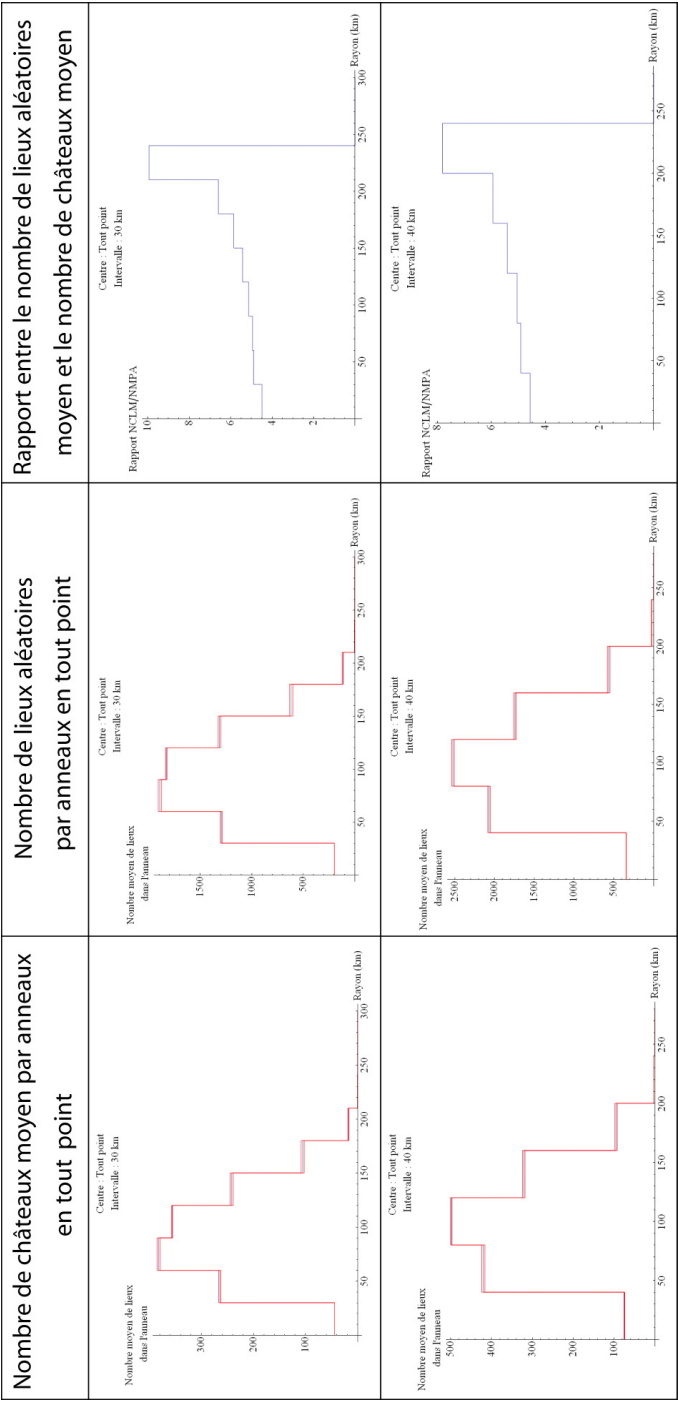


Figure 109-3. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

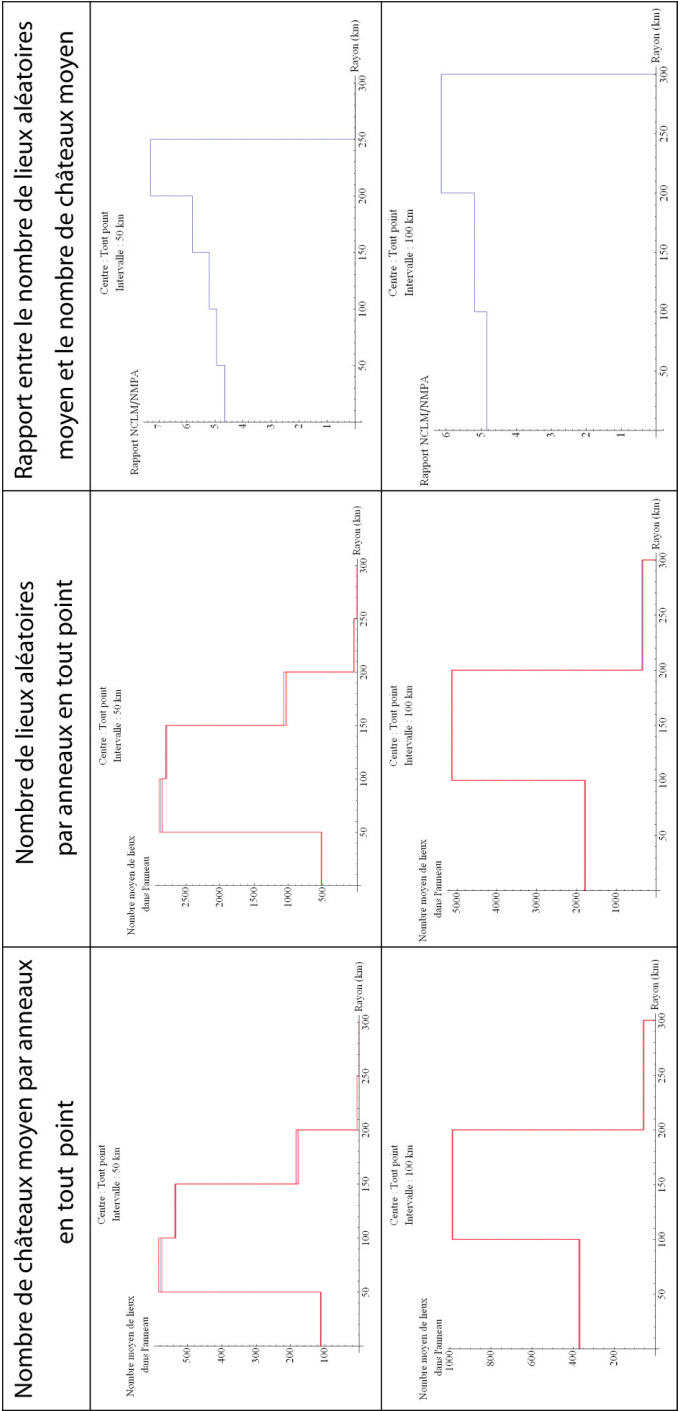


Figure 109-4. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

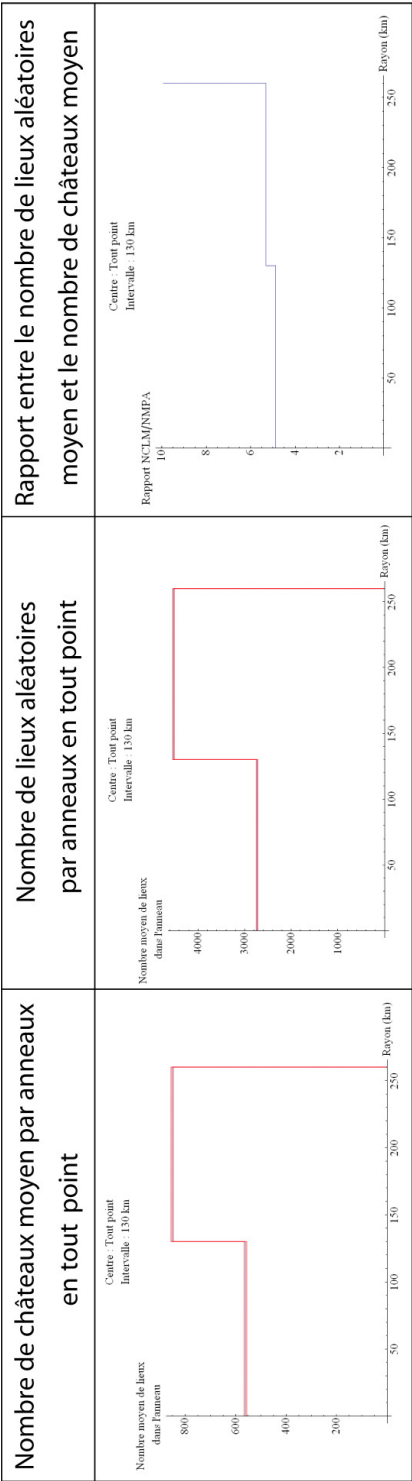


Figure 109-5. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu

L'analyse temporelle n'est pas généralisable, car les données temporelles de la base *Catiau* sont trop hétéroclites. Aussi, le cas du château de Boves est remarquable, mais il est unique. Ainsi, l'exploitation des données spatiales semble plus pertinente. En effet, l'analyse radiale en tout point et à des intervalles différents montre que la densité moyenne est constante. Elle demeure cependant insuffisante pour conclure sur la nature fractale de la répartition des châteaux. Ainsi, une analyse fractale que l'on appellera « généralisée » doit être menée pour répondre à cette interrogation.

13

L'analyse fractale généralisée

La répartition des châteaux connus dans le nord de la France présente une structure clairement fractale. Son étude peut se réaliser *via* un calcul de dimension fractale de boîtes carrées classique, et ainsi dégager une organisation globale en échelle de ce territoire. Le problème est que cette méthode « a-spatialise » l'information géographique de base. Cependant, on sait que la dimension fractale dépend du nombre de points, aussi, si l'on peut pré-découper l'espace concerné par un maillage carré, puis dans chacun de ces carrés calculer une dimension fractale de boîtes carrées locale, on pourra observer des variations spatiales de cette dimension fractale liée à des éléments structurants de l'espace géographique. La méthode consiste donc à désagréger l'information géographique jusqu'à une certaine grande échelle, puis à en agréger de nouveau les rapports scalaires locaux en un champ unitaire.

13.1. Nuage de points et dimension fractale

Lorsque l'on effectue une mesure sur un nuage de points (ici les mottes et les châteaux), la dimension fractale peut varier de 0 à 2. Afin de les comparer, on effectue le calcul sur le nuage de points des communes et des hameaux (Figure 110.a.) et sur celui des châteaux (Figure 110.b.). Ces deux graphiques montrent une courbure qui apparaît dans les graphiques bi logarithmiques. Cette courbure est la manifestation d'une transition fractal - non fractal sur les grandes échelles géographiques. Toutefois, il ne faut pas oublier qu'il existe également une transition au niveau des petites échelles géographiques (filtrée ici par la méthode de calcul).

Pour les communes, la transition aux grandes échelles a lieu entre $\ln(\varepsilon) = 0$ (soit $\varepsilon = 1$ km) et $\ln(\varepsilon) = 1,0$ (soit $\varepsilon = 2,7$ km). La même pour les châteaux est observée entre $\ln(\varepsilon) = 0$ (soit $\varepsilon = 1$ km) et $\ln(\varepsilon) = 1,3$ (soit $\varepsilon = 3,7$ km). Cela signifie que le nombre de carrés de taille 1 (204 km) et celui de taille 0,5 (102 km) s'emboîte parfaitement. À partir de celui de taille 0,25 (51 km), leur nombre n'est plus celui de la grille. Autrement dit, une différenciation commence à s'opérer. La fractalité devient apparente.

Pour les communes et pour les châteaux, la transition aux petites échelles s'établit à $\ln(\varepsilon) = 5,5$ (soit $\varepsilon = 244,7$ km). Il s'agit d'une échelle de coupure virtuelle puisqu'elle est liée à l'étendue de l'objet analysé. À l'opposé, la transition fractal - non fractal observée aux grandes échelles est essentielle puisqu'en deçà de cette échelle (2,7 km pour les communes et 3,7 km pour les châteaux), il n'y a plus d'informations et le nuage de points devient non fractal. En effet, en allant vers les très grandes échelles, il n'y a plus de structuration fractale puisque le carré sera soit vide ($N(\varepsilon) = 0$) ou soit avec une valeur et une seule ($N(\varepsilon) = 1$). Autrement dit, l'échelle de coupure aux grandes échelles est liée à la nature même de l'information géographique.

Une nouvelle fois, on peut rappeler que ce modèle de transition fractal - non fractal s'obtient comme solution d'une équation différentielle du premier ordre $\frac{d \ln N}{d \ln \varepsilon} = a + bN$ (Nottale, 1993), et s'exprime par la loi d'échelle suivante (valable uniquement pour les nuages de points) :

$$N(\varepsilon) = N_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^D \right]$$

où $N(\varepsilon)$ est le nombre de carré de côté ε ; N_0 est le carré de taille maximale ; ε_0 représente la taille de la plus petite boîte et ε est le côté de la boîte de mesure qui varie ici de 2^0 à 2^8 (c'est-à-dire entre 1 et 256 km) et D est la dimension fractale c'est-à-dire la pente entre les deux échelles de coupure identifiées précédemment. Elle correspond à ce que Philippe Martin avait appelé la dimension fractale asymptotique (Martin, 2006b ; Martin, 2006c ; Martin, 2006d ; Martin 2008c ; Martin, 2009). Ici, la dimension fractale des communes vaut $1,701 \pm 0,004$ et celle des châteaux $1,644 \pm 0,004$. De ce résultat, on peut conclure que la structuration de l'espace géographique des villes et villages du nord de la France est étroitement liée à la répartition des châteaux. Toutefois, elle ne dit rien sur la répartition locale des dimensions fractales. Il faut donc construire une méthode permettant de répondre à ce problème.

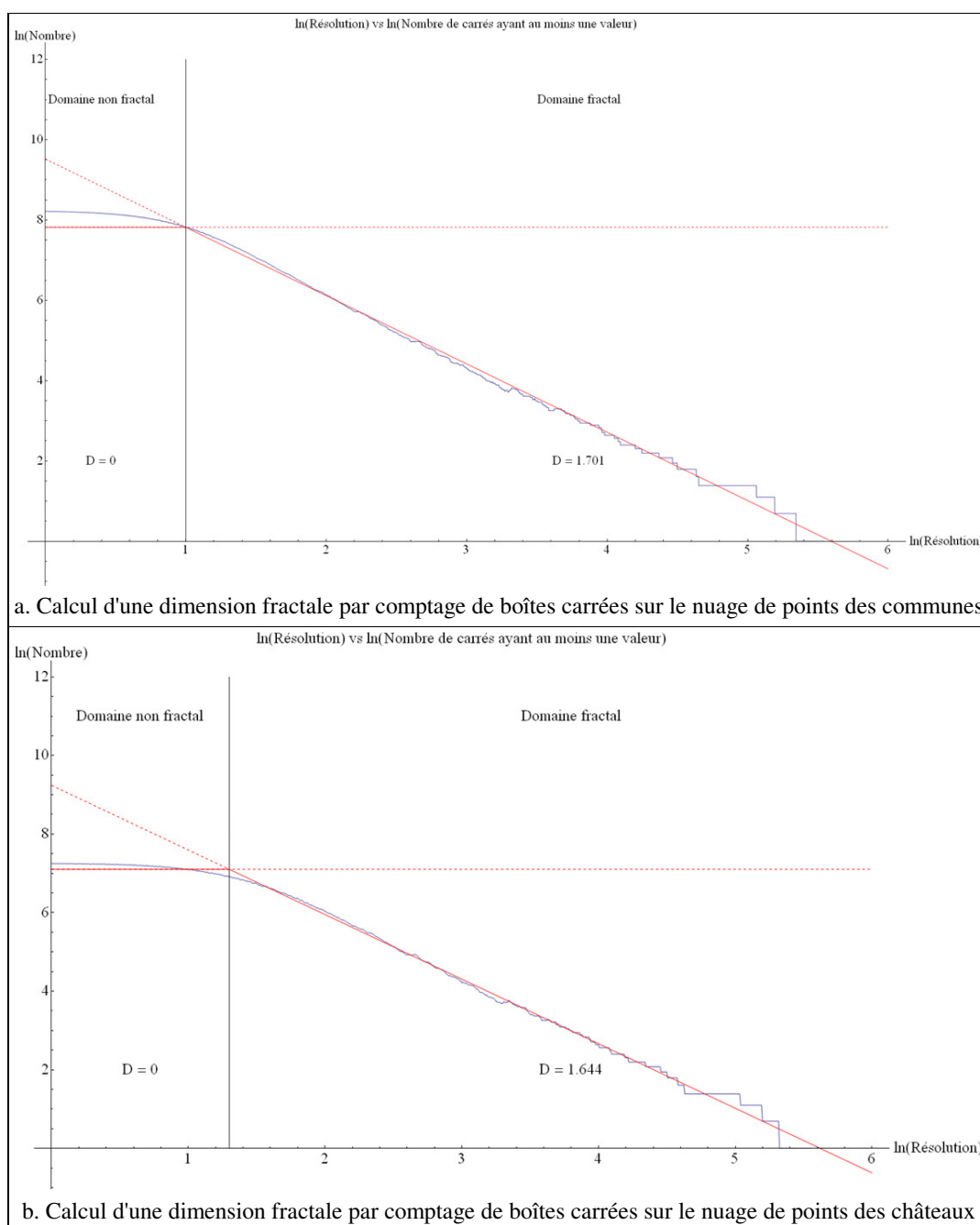


Figure 110. Transitions fractal - non fractal observées dans le cas de la répartition des communes centres et hameaux en dépendant et de la répartition des châteaux dans l'espace géohistorique étudié

13.2. Le champ des rapports scalaires

On appellera **champ des rapports scalaires** (Al Khalifeh, 2008) la représentation tridimensionnelle des coordonnées géographiques (représentée par une maille de résolution) et de la dimension fractale associée à chacun de ces carrés (Figure 113).

L'analyse consiste à tronquer le calcul de la dimension de boîtes et à observer le comportement de la dimension fractale dans une boîte particulière. Pour ce faire, huit grilles dyadiques (Figure 111) ont été créées. Chacune d'elles représente les carrés où il y a des points. Ici, l'analyse a été réalisée sur les châteaux. À chacune d'elles, on associe le nombre de châteaux contenu dans la maille (Figure 112) et la dimension fractale locale.

On retrouve évidemment les résultats avec la dimension fractale de boîtes globale. Les deux premières images (Figure 111, Figure 112, Figure 113 et Figure 114) correspondent à la zone du graphique de la Figure 110.b. entre $\ln(1)$ et $\ln(\text{échelle de coupure maximale})$, c'est-à-dire où la dimension fractale atteint son maximum de 1,7. Les images n°3-4-5-6 correspondent à la zone du graphique de la Figure 110.b. entre $\ln(\text{échelle de coupure maximale})$ et $\ln(\text{échelle de coupure minimale})$. Les images n°7-8 correspondent à la zone du graphique de la Figure 110.b. au-delà de $\ln(\text{échelle de coupure minimale})$, c'est-à-dire la zone où localement la dimension fractale est égale à 0. D'ailleurs, la grille n°8 (Figure 111) ressemble beaucoup à la répartition originelle des châteaux.

Toutefois, ce type de graphique permet de mieux comprendre la répartition spatiale des données, car on retrouve les vides et les pleins dont la cause est le manque d'information, et permet d'en établir le « poids » réel dans la dimension fractale des lieux du nuage de points. En fait, la répartition de la dimension fractale des châteaux est très homogène sur l'ensemble des différentes grilles, en termes d'effectifs (Figure 112) et en termes de dimension fractale (Figure 114).

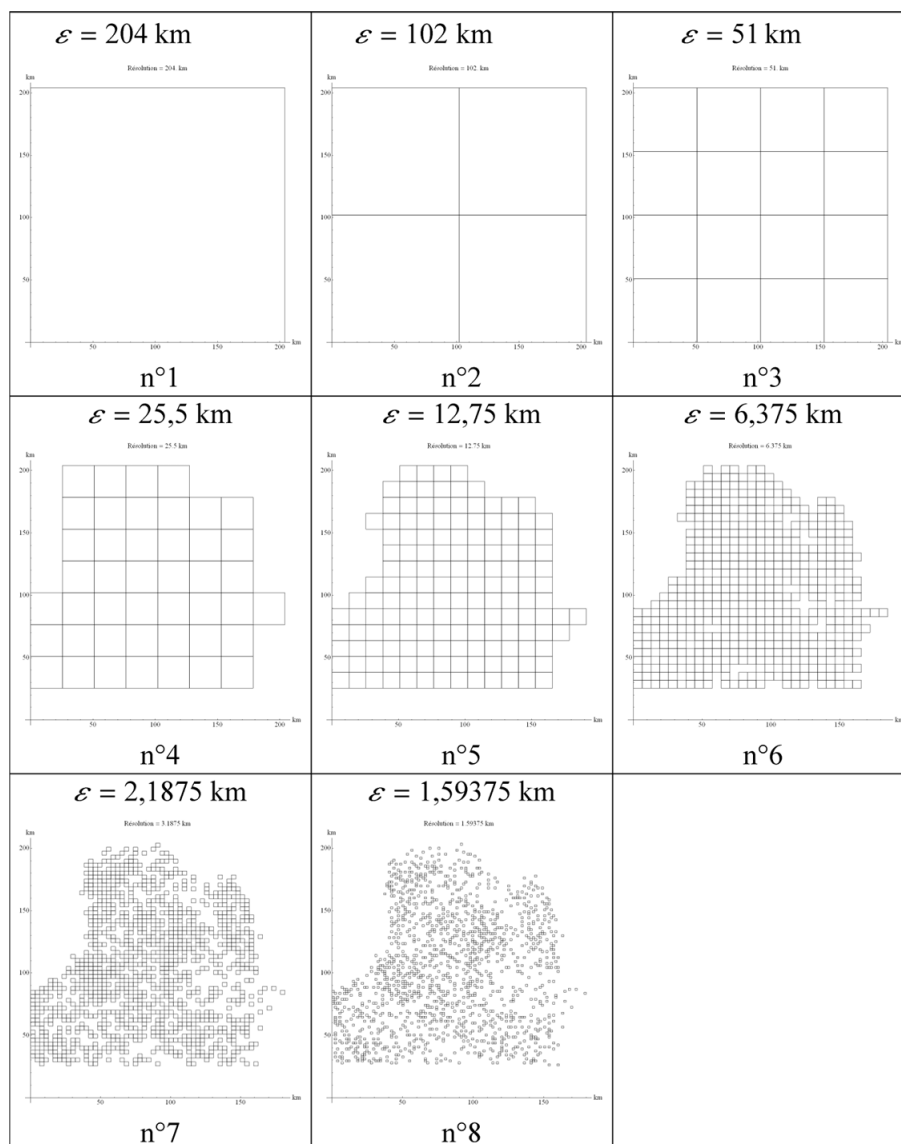


Figure 111. Représentation des grilles carrées de résolution ε (en km) contenant au moins un château pour une résolution donnée

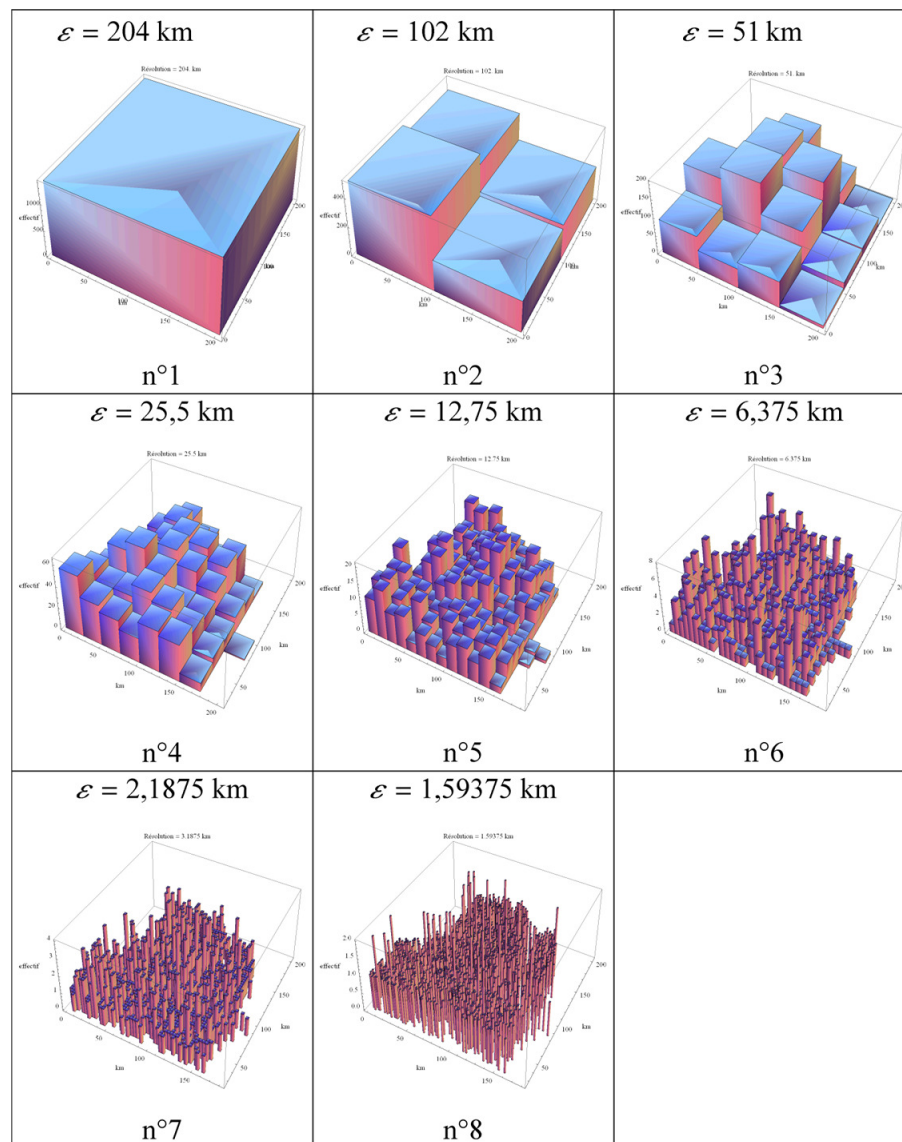


Figure 112. Représentation tridimensionnelle des carrés de résolution ε (en km) et du nombre de châteaux dans chaque carré

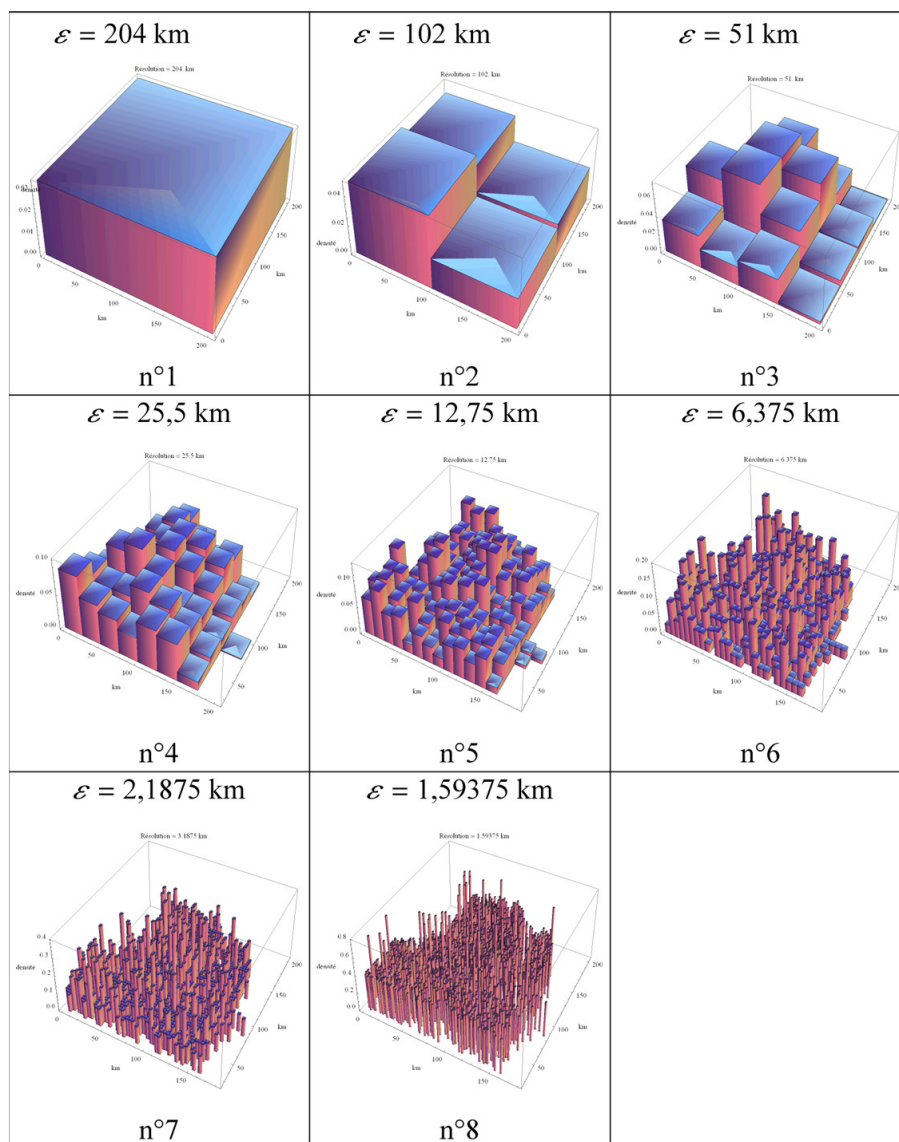


Figure 113. Représentation tridimensionnelle des carrés de résolution ε (en km) et de leurs densités respectives

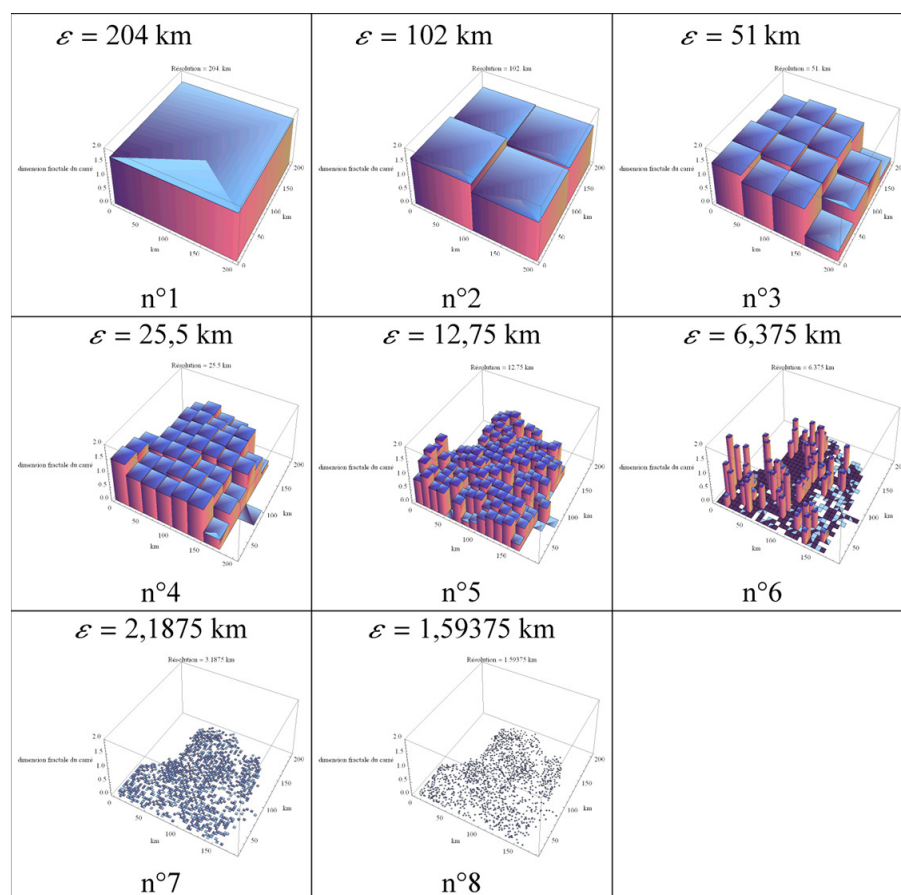


Figure 114. Représentation tridimensionnelle des carrés de résolution ε (en km) et de leurs dimensions fractales respectives

13.3. Châteaux et centres urbains

La Figure 114-6 est particulièrement intéressante, car la plupart des pics de dimensions fractales « locales » correspondent à la localisation des principaux centres urbains actuels (Figure 115). On peut prétendre alors qu'il s'agit d'une méthode générale permettant l'identification des centres dans un espace géographique : il suffit de choisir une résolution suffisamment proche de l'échelle de coupure identifiée grâce à la Figure 110-b pour les faire apparaître clairement. Seuls sept centres urbains n'apparaissent pas. Dans le cas de Beauvais, Compiègne, Rouen et Saint-Quentin, il semble que cela soit dû à leur position en bordure de la fenêtre d'analyse. Pour Calais et Dunkerque, un autre effet de bord joue : celui du trait de côte. Afin, pour Cambrai, cela s'explique sans doute par le fait que la maille est trop fine pour faire apparaître le pic de dimension. Ces cas particuliers expliqués, on peut conclure que la localisation des centres urbains dépend de celle de châteaux. Autrement dit, la position des villes dépend du réseau inter-urbain sous-jacent (Martin, 2004).

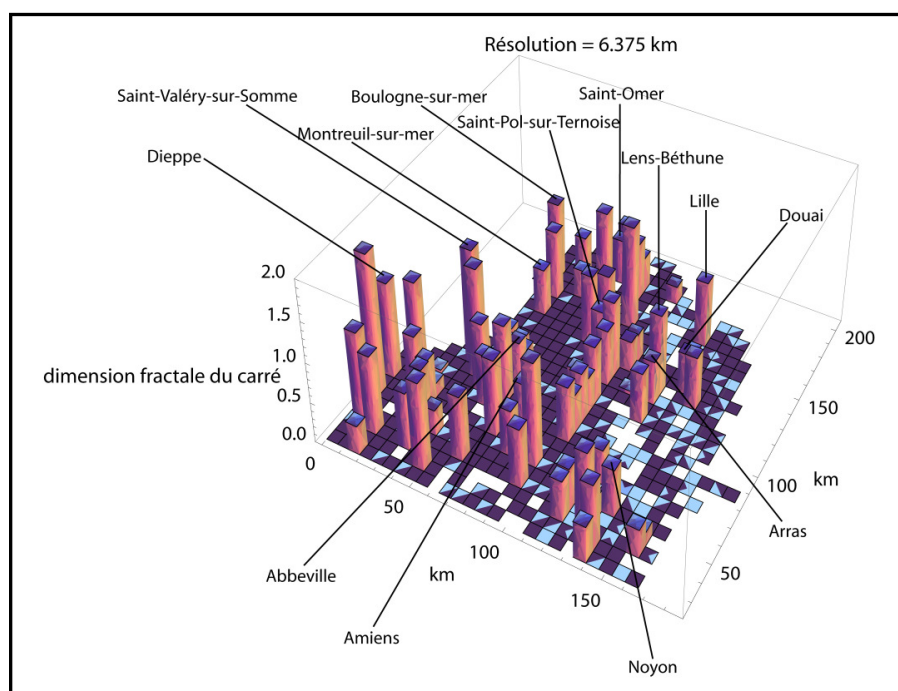


Figure 115. Localisation des centres urbains de l'espace géohistorique étudié par l'intermédiaire des pics de dimensions fractales « locales » avec une maille de 6,375 km

13.4. Statistique des dimensions fractales locales

Il est possible alors d'estimer de manière statistique des dimensions fractales locales en fonction de la résolution (Figure 116 et Figure 117). On constate que l'on soit dans le cas des châteaux (Figure 116), ou dans celui des communes et des hameaux (Figure 117), une diminution de la valeur de la dimension fractale en fonction de la résolution, mais aussi une augmentation de l'écart-type. Ainsi, si l'on compare ces résultats avec ceux obtenus avec l'analyse fractale d'Avignon, on constate que la Figure 118 et de la Figure 119 correspondent aux résultats de la Figure 79. La valeur de la dimension fractale moyenne permet de percevoir une « dynamique d'échelles », c'est-à-dire une dégradation de la dimension fractale en fonction du logarithme de la résolution, tout comme dans le cas de la Figure 79.

Résolution	Nombre de cases	Dimension fractale moyenne	Écart-type	Erreur quadratique sur la moyenne
204	1	1,660	—	0,004
102	4	1,468	0,116	0,058
51	16	1,125	0,384	0,096
25,5	44	1,028	0,286	0,043
12,75	151	0,740	0,308	0,025
6,375	521	0,097	0,273	0,012
3,1875	1 111	0	—	—
1,59375	1 371	0	—	—

Figure 116. Résultats numériques de l'analyse fractale locale des châteaux ($N_T = 1\,413$)

Résolution	Nombre de cases	Dimension fractale moyenne	Écart-type	Erreur quadratique sur la moyenne
210	1	1,690	—	0,004
105	4	1,505	0,113	0,057
52,5	16	1,205	0,503	0,126
26,25	43	1,187	0,364	0,056
13,125	157	0,964	0,381	0,030
6,5625	569	0,594	0,503	0,021
3,28125	1 935	0	—	—
1,64063	3 434	0	—	—

Figure 117. Résultats numériques de l'analyse fractale locale des communes centres et des hameaux ($N_T = 3\,738$)

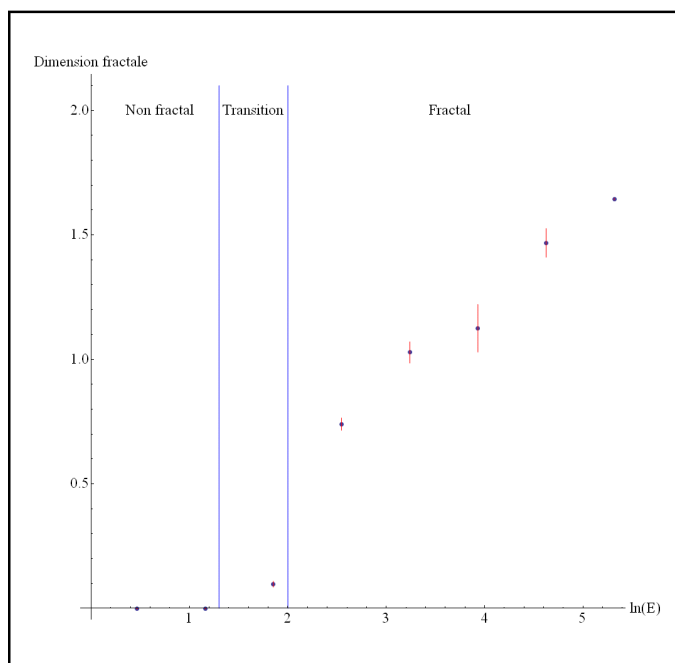


Figure 118. Modèle fractal - non fractal et dimension fractale « locale » par grille appliquée aux résultats de la distribution des châteaux

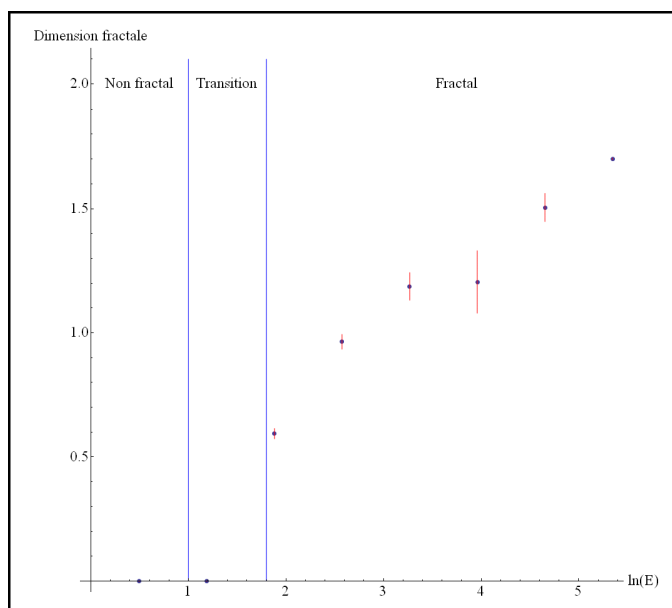


Figure 119. Modèle fractal - non fractal et dimension fractale « locale » par grille appliquée aux résultats de la distribution des communes centres et hameaux en dépendant

Ce chapitre a une nouvelle fois montré que la dimension fractale « globale » était différente des dimensions fractales « locales ». Le concept de « dynamique d'échelle » est clairement au cœur de l'analyse des résultats des dimensions fractales « locales », tant de la répartition des communes et des hameaux en dépendant, que dans une sous-structure de cet ensemble que représente la répartition des châteaux. De plus, l'étude de la répartition de la dimension fractale « locale » à la limite d'une échelle de coupure permet de proposer une méthode qui identifie de manière objective les centres géographiques d'une structure spatiale d'origine anthropique.

Néanmoins, le maillage choisi est complètement arbitraire. Il ne correspond pas à des territoires au sens géographique du terme. Aussi, le chapitre suivant essaiera de proposer une approche territoriale *via* une dimension fractale « locale » qui, pour ne pas être confondue avec les précédentes, sera appelée « dimension fractale territoriale ».

14

L'étude multi-échelle d'un espace-temps

Une étude géohistorique offre la possibilité d'analyser l'évolution d'un phénomène spatial au cours du temps. La répartition des châteaux n'échappe pas à cette règle. D'après les résultats précédents, il est possible de périodiser l'espace géohistorique picard et artésien en six périodes géographiques, périodes au cours desquelles non seulement le nombre de châteaux diminue, mais en plus, les territoires qui les enveloppent, se transforment. Pour essayer de comprendre l'organisation spatiale de cette transformation, on peut une nouvelle fois utiliser la répartition des châteaux comme indicateur. En effet, il est possible de calculer une « dimension fractale territoriale ». Elle correspond à une dimension fractale par comptage de boîtes carrées du nuage de lieux représentant la répartition des châteaux dans un territoire donné. Pour cela, il faut une référence statistique puisque tous les châteaux ne sont pas datés.

14.1. Caractéristiques de la population statistique de référence

Le nuage de points représentant la répartition atemporelle des châteaux sur l'ensemble de la zone d'étude possède une dimension fractale valant $1,644 \pm 0,004$. On compte 1 130 châteaux sur 1 413 dont la durée est établie, soit 80% de la population totale. Cela signifie que dans un territoire donné représentant un sous-échantillon de la population totale, il faut, pour que le résultat soit significatif, une sous-population possédant environ 20% de châteaux dont la durée est non établie.

La Figure 120 présente le calcul des dimensions fractales globales de manière « a-territoriale », c'est-à-dire qu'aucune découpe administrative n'a été appliquée. L'ensemble des châteaux est donc pris en compte pour une période géographique donnée. On constate une stabilité de la dimension fractale autour de 1,6. À l'opposé, le nombre total de châteaux sur l'ensemble de l'espace considéré diminue au cours des siècles, ce qui a pour conséquence l'augmentation de l'échelle de coupure aux grandes échelles. Autrement dit, la distance moyenne entre les châteaux s'accroît. Enfin, la Figure 120 montre une forte diminution des châteaux à durée déterminée, contrairement à ce que l'on aurait pu penser *a priori*.

Période géographique	Nombre total de châteaux	Pourcentage de châteaux à durée établie dans l'échantillon	Pourcentage de châteaux à durée non établie dans l'échantillon	Échelle de coupure minimale (km)	Échelle de coupure maximale (km)	Estimation de la dimension fractale territoriale
900–1100	1 413	80	20	4	245	$1,644 \pm 0,004$
1100–1300	1 407	80	20	4	245	$1,652 \pm 0,005$
1300–1400	1 351	79	21	4	245	$1,649 \pm 0,005$
1400–1500	1 109	74	26	5	245	$1,631 \pm 0,005$
1500–1700	1 062	73	27	5	245	$1,627 \pm 0,005$
1700–1900	826	66	34	6	245	$1,622 \pm 0,005$

Figure 120. Dimension fractale territoriale globale de chacune des périodes géographiques

14.2. Étude diachronique multi-échelle de la répartition territoriale des châteaux

À partir des données de la Figure 120, Il est désormais possible de mener une étude diachronique multi-échelle sur la répartition territoriale des châteaux. L'objectif de cette analyse est d'essayer de comprendre l'évolution de l'organisation scalaire et territoriale au cours de l'histoire d'un espace.

14.2.1. Présentation des résultats

À partir des données géohistoriques développées dans le chapitre 11, il est possible de développer une approche complémentaire aux résultats apportés par le chapitre 13. Les Figures 121, 122, 123 et 124 présentent les résultats obtenus pour les quatre premières périodes géographiques, résultats auxquels il faut ajouter ceux des deux dernières périodes présentés dans la Figure 125. Une nouvelle fois, on constate que la dimension fractale territoriale locale est différente de la dimension fractale territoriale globale (Figure 120) et que la valeur de la dimension fractale ne dépend pas du nombre de châteaux appartenant à tel ou tel territoire. Si l'on prend le cas du Boulonnais et de l'Amiénois dans la Figure 122, on remarque que pour une dimension fractale similaire, il existe un facteur deux entre le nombre de châteaux du Boulonnais et celui de l'Amiénois. Par contre, les résolutions minimale et maximale sont spécifiques à chaque territoire. La dimension fractale en dépend explicitement. En effet, il semblerait que plus un territoire s'aggrave au cours du temps, plus sa dimension fractale est élevée.

Territoire	Nombre de châteaux	Pourcentage de châteaux à durée établie dans l'échantillon	Pourcentage de châteaux à durée non établie dans l'échantillon	Échelle de coupure minimale (km)	Échelle de coupure maximale (km)	Estimation de la dimension fractale territoriale
Amiénois	186	82	18	4	67	1,345 ± 0,008
Vermandois	56	79	21	4	67	1,138 ± 0,014
Nomois	43	72	28	4	33	1,241 ± 0,016
Vendeuillais	33	70	30	4	33	1,157 ± 0,013
Ponthieu et Vimeu	227	74	26	4	134	1,282 ± 0,006
Ternois	170	85	15	4	67	1,343 ± 0,007
Boulonnais	99	92	8	3	33	1,343 ± 0,010
Ostrevant	26	96	4	3	33	1,089 ± 0,012
Artois	119	85	15	4	67	1,259 ± 0,010
Ardrésis	8	63	37	5	16	0,887 ± 0,042

Figure 121. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 900 - vers 1100

Territoire	Nombre de châteaux	Pourcentage de châteaux à durée établie dans l'échantillon	Pourcentage de châteaux à durée non établie dans l'échantillon	Échelle de coupure minimale (km)	Échelle de coupure maximale (km)	Estimation de la dimension fractale territoriale
Amiénois	224	81	19	4	134	1,325 ± 0,008
Breteuil	10	70	30	4	8	1,068 ± 0,102
Montdidier	60	78	22	3	67	1,050 ± 0,011
Vermandois	60	73	27	4	33	1,048 ± 0,016
Noyon	23	74	26	4	33	1,054 ± 0,018
Montreuil	12	100	0	2	16	0,894 ± 0,026
Hesdin	8	100	0	2	8	0,775 ± 0,039
Saint-Pol	70	90	10	4	67	1,110 ± 0,011
Ponthieu	180	69	31	4	67	1,295 ± 0,008
Aumale	14	79	21	3	16	0,643 ± 0,018
Eu	40	73	27	4	33	1,093 ± 0,010
Artois	255	84	16	4	134	1,257 ± 0,008
Boulonnais	92	90	10	3	33	1,321 ± 0,010
Calais	8	100	0	5	16	0,913 ± 0,049

Figure 122. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 1100 - vers 1300

Territoire	Nombre de châteaux	Pourcentage de châteaux à durée établie dans l'échantillon	Pourcentage de châteaux à durée non établie dans l'échantillon	Échelle de coupure minimale (km)	Échelle de coupure maximale (km)	Estimation de la dimension fractale territoriale
France	1 062	80	20	5	245	$1,605 \pm 0,005$
Calaisis	52	79	21	4	67	$1,055 \pm 0,014$
Ponthieu	133	68	32	3	67	$1,252 \pm 0,010$

Figure 123. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 1300 - vers 1400

Territoire	Nombre de châteaux	Pourcentage de châteaux à durée établie dans l'échantillon	Pourcentage de châteaux à durée non établie dans l'échantillon	Échelle de coupure minimale (km)	Échelle de coupure maximale (km)	Estimation de la dimension fractale territoriale
Picardie	369	71	29	4	134	$1,353 \pm 0,004$
Boulonnais	91	90	10	3	67	$1,164 \pm 0,010$
Eu	30	77	23	4	33	$0,971 \pm 0,012$
Saint-Pol	51	86	14	4	67	$1,119 \pm 0,013$
Hesdin	35	89	11	3	33	$1,042 \pm 0,012$
Montreuil	18	89	11	2	16	$0,770 \pm 0,017$
Artois	148	74	16	4	134	$1,151 \pm 0,008$
Calaisis	7	57	43	5	16	$0,780 \pm 0,049$

Figure 124. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 1400 - vers 1500

Période géographique	Nombre de châteaux	Pourcentage de châteaux à durée établie dans l'échantillon	Pourcentage de châteaux à durée non établie dans l'échantillon	Échelle de coupure minimale (km)	Échelle de coupure maximale (km)	Estimation de la dimension fractale territoriale
1500–1700	773	71	29	5	245	$1,556 \pm 0,005$
1700–1900	823	66	34	6	245	$1,622 \pm 0,005$

Figure 125. Dimension fractale territoriale aux deux dernières périodes géographiques sur le territoire de la France

Pour conclure, on peut établir une dimension fractale territoriale moyenne en fonction de la période considérée. La Figure 126 établit les résultats obtenus qui semblent confirmer l'idée que plus un territoire est agrégé, plus la dimension fractale est élevée, et, *a contrario*, plus un territoire est désagrégé, plus la dimension fractale est faible. On peut faire correspondre les variations de la dimension fractale territoriale locale moyenne aux différents événements historiques présentés dans le chapitre 11. La période 900-1100 correspond à l'émergence du système féodal : les territoires sont, certes, des reliquats de l'empire carolingien, mais restent cohérents. La période 1100-1300 correspond à ce que l'on appelle l'émiettement féodal et à la reprise en main des Capétiens de leur royaume. La période 1300-1400 marque le paroxysme de cette politique territoriale, tandis que, au contraire, la période 1400-1500 correspond à une désagrégation due à l'État bourguignon. Puis, les périodes 1500-1700 et 1700-1900 matérialisent le retour d'un État royal, puis républicain, fort.

Période géographique	Nombre de territoires	Dimension fractale territoriale locale moyenne	Écart-type	Erreur quadratique à la moyenne
900–1100	10	1,208	0,145	0,046
1100–1300	14	1,060	0,204	0,054
1300–1400	3	1,304	0,279	0,161
1400–1500	8	1,044	0,199	0,070
1500–1700	1	1,556*	0,139*	0,005*
1700–1900	1	1,622*	0,143*	0,005*

Figure 126. Dimension fractale territoriale locale moyenne

* Ces valeurs numériques sont directement calculées sur la répartition des châteaux aux périodes considérées.

14.2.2. Cartographie des résultats

Les Figures 127, 128, 129, 130, 131 et 132 montrent, à légende constante, les représentations cartographiques des résultats précédents. Une nouvelle fois, on perçoit bien que, plus un territoire est cohérent, plus sa dimension fractale est élevée, sa cohérence étant donnée d'une part, par sa taille (échelle de coupure maximale), ou d'autre part, l'efficacité du contrôle territorial sous-jacent à la répartition des châteaux donnée par la distance moyenne entre les sites (échelle de coupure minimale).

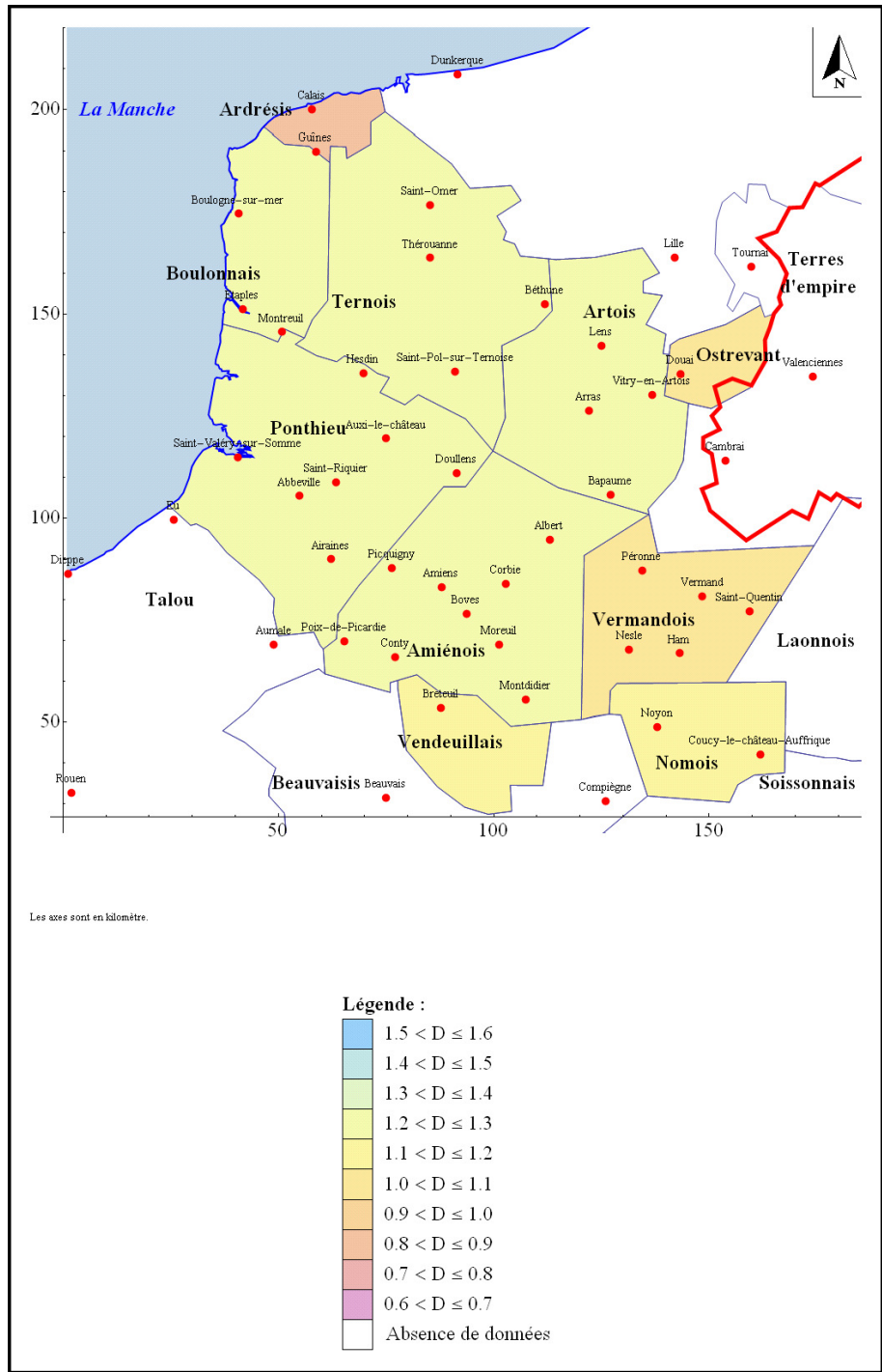


Figure 127. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 900-1100

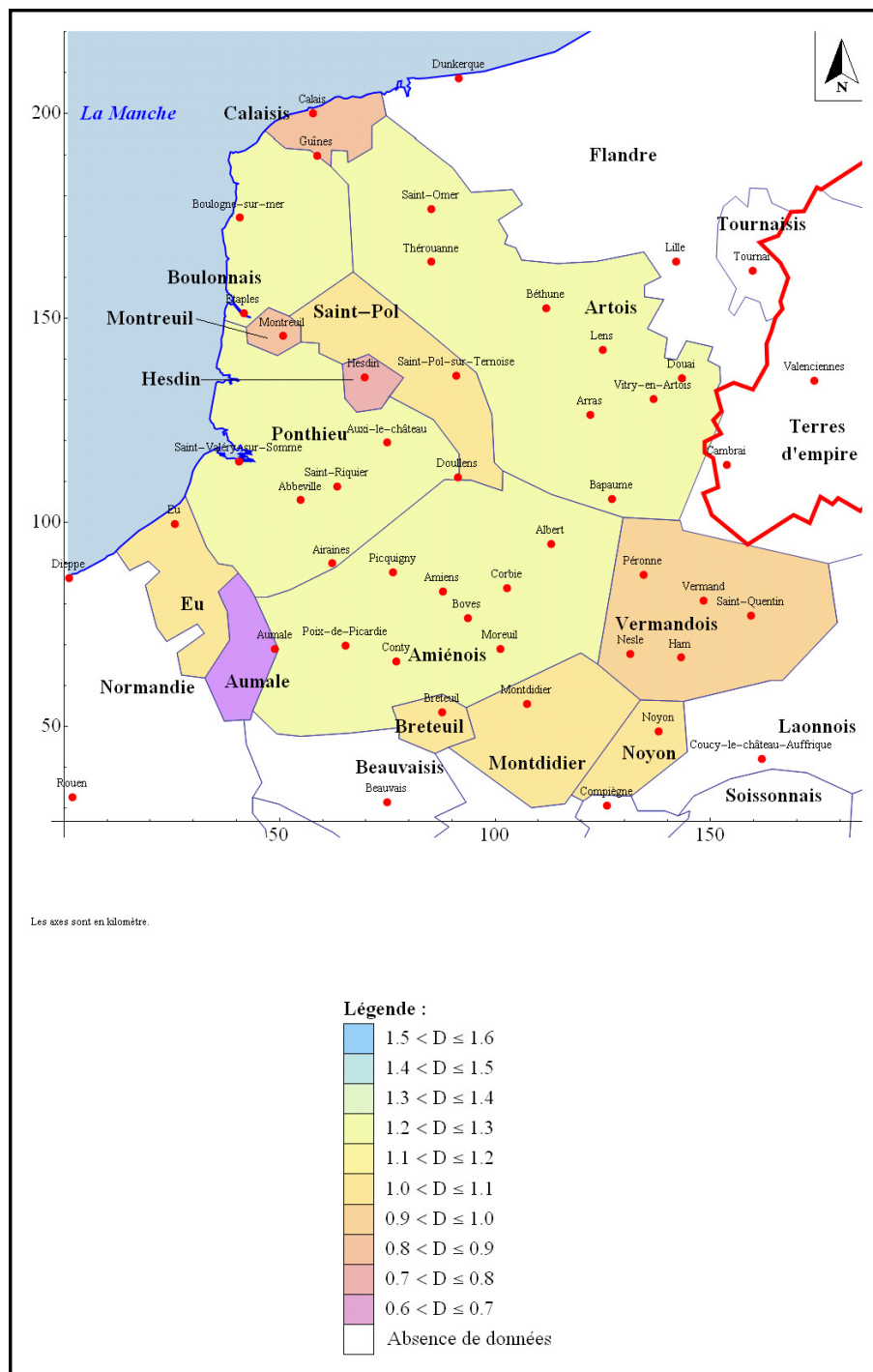


Figure 128. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1100-1300

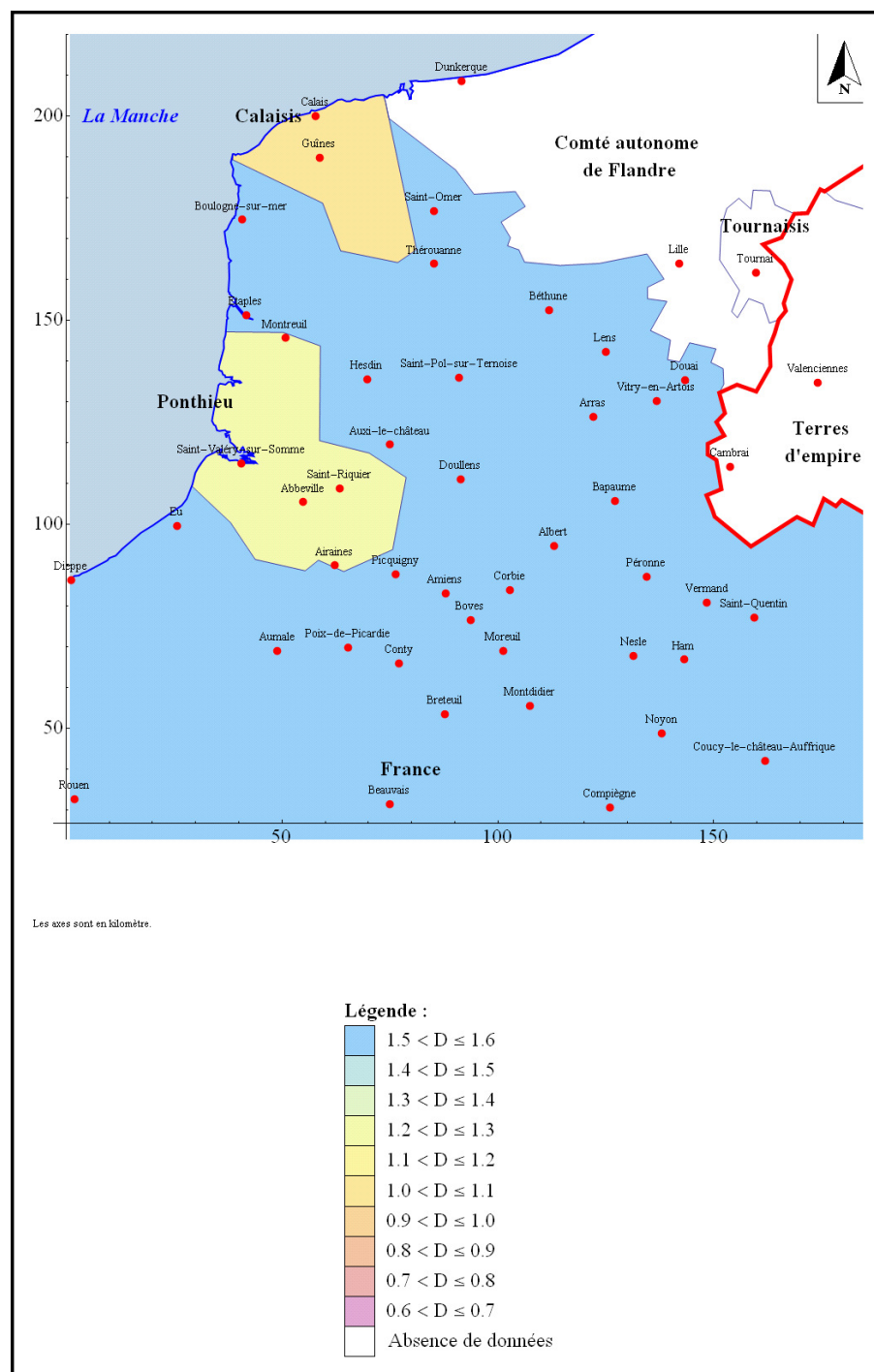


Figure 129. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1300-1400

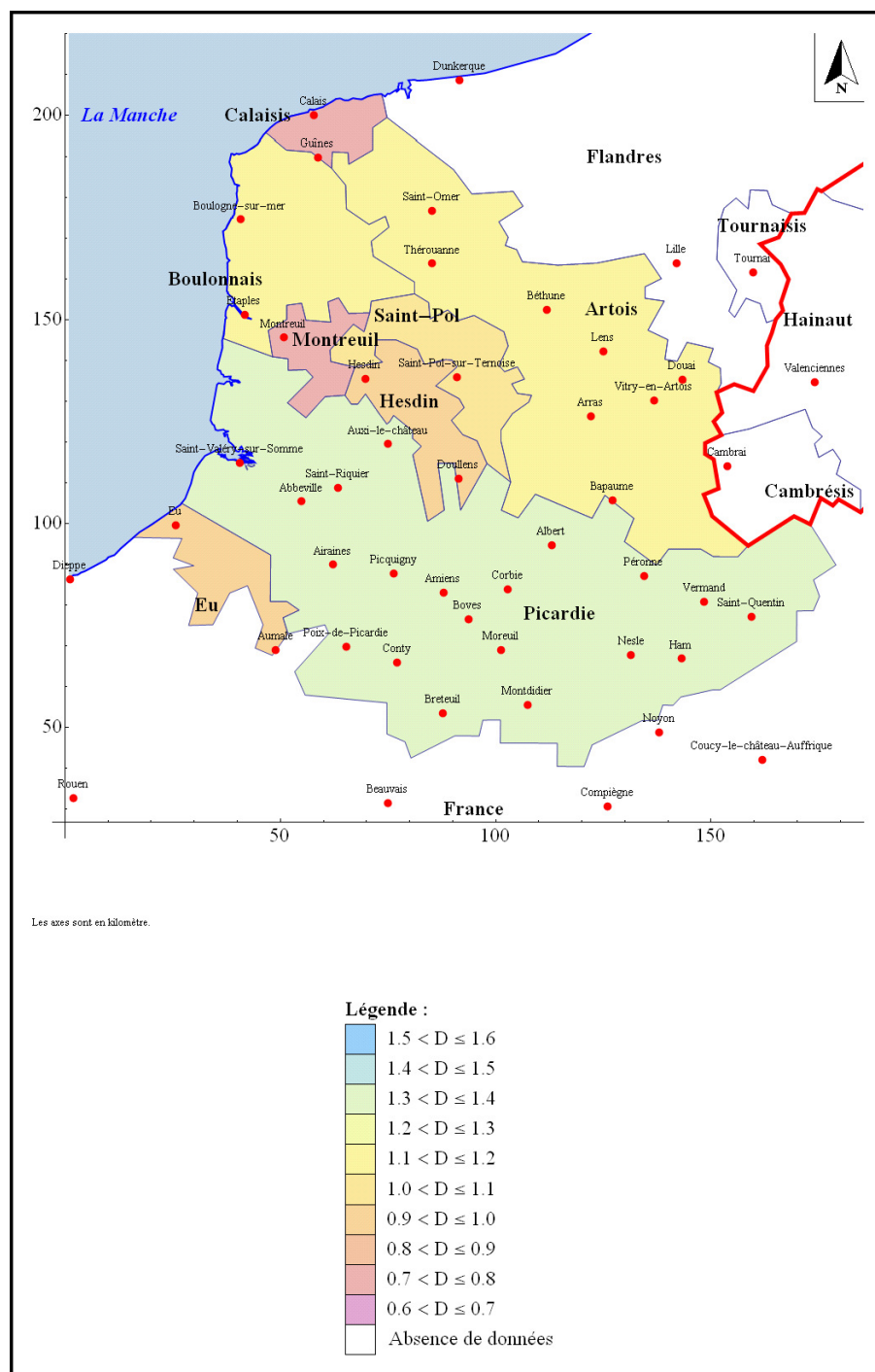


Figure 130. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1400-1500

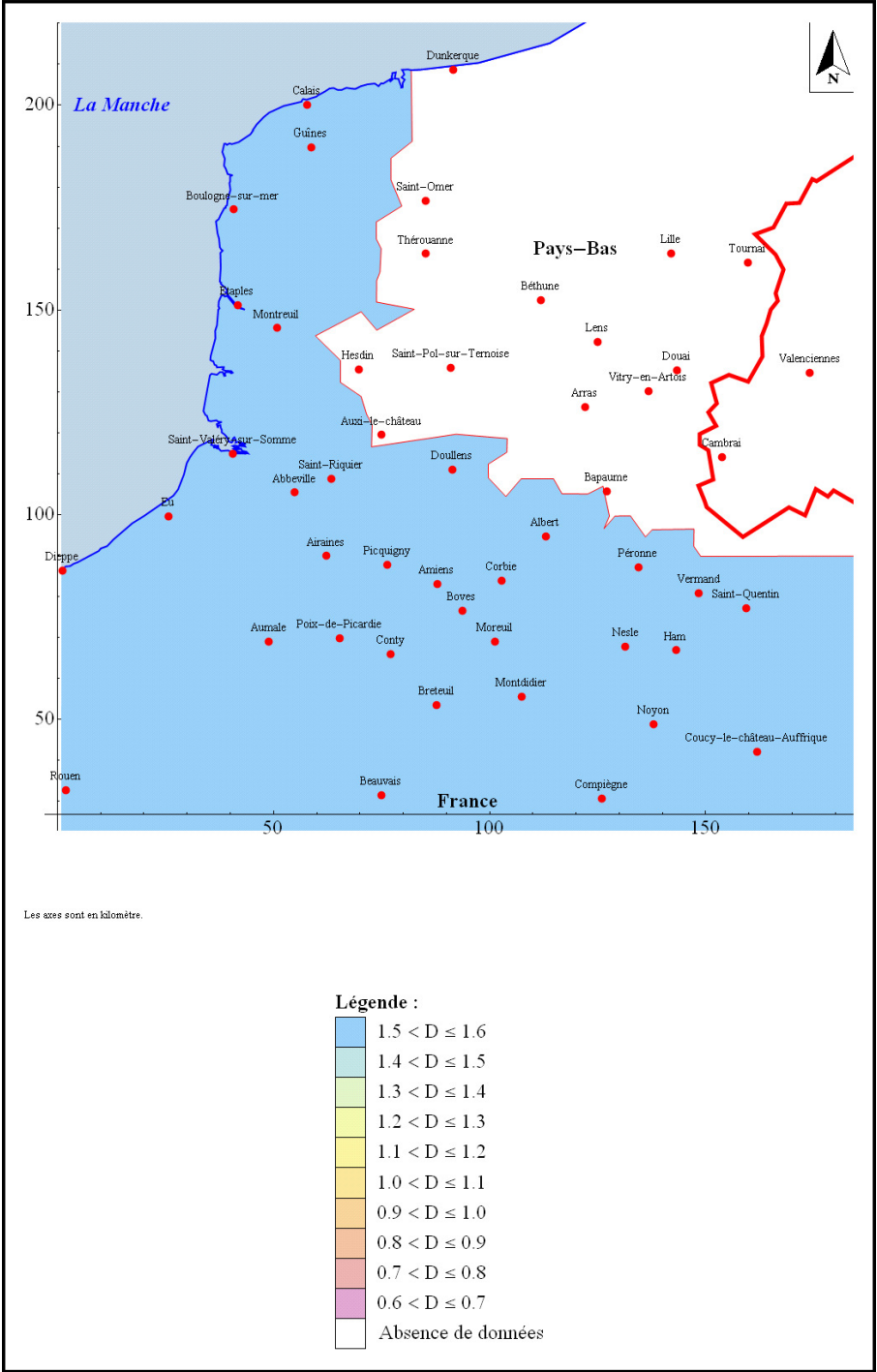


Figure 131. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1500-1700

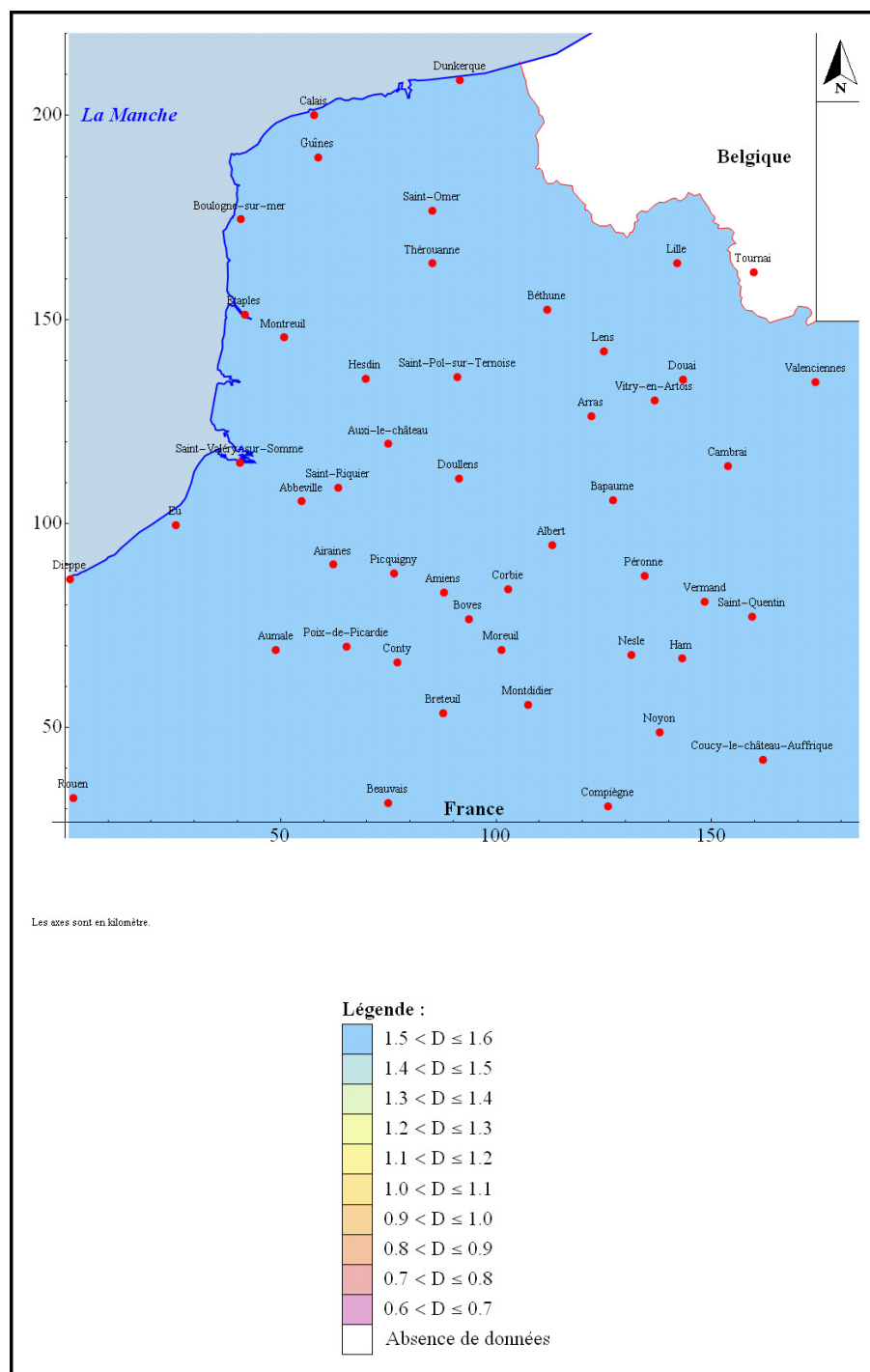


Figure 132. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1700 à nos jours

L'étude de la dimension fractale territoriale complète et conclut les analyses des chapitres 11 et 13. Il fournit des informations sur le rôle du maillage administratif et politique au sein d'un espace géohistorique marqué par des conquêtes et des reconquêtes territoriales. Ainsi, une véritable étude scalo-spatio-temporelle a pu être proposée. S'il est vrai que les données de la base *Catiau* peuvent poser un certain nombre de problèmes du point de vue de la fiabilité des informations temporelles, et parfois, des localisations dans l'espace, elle a tout de même permis de construire une méthode générique pour l'étude d'un espace en géographie, méthode qui sera reprise dans la partie suivante.

Partie 4. Étude multi-échelle de la répartition de l'établissement humain sur Terre

15

Géographie du peuplement et analyse multi-échelle

Il serait impensable d'achever la rédaction de cette thèse sans utiliser l'échelle maximale de la géographie, à savoir l'échelle de la Terre elle-même (Maby, 2003), et quel sujet s'y prête le mieux si ce n'est celui de la répartition de la population de notre planète. L'objectif de cette ultime analyse est double. Tout d'abord, il s'agit d'utiliser sur un seul objet géographique l'ensemble des méthodes qui a été proposé tout au long de cette thèse. Ensuite, cette réflexion permettra d'introduire la conclusion générale.

L'étude de la répartition de la population sur Terre est aussi ancienne que la géographie elle-même. Toutefois, il semble qu'aucune mesure de dimension fractale de cette répartition n'a été envisagée jusqu'à présent.

Le site *Tageo* (<http://www.tageo.com>) permet d'obtenir des données à l'échelle nationale de la répartition de la population dans tous les États, reconnus par l'ONU. On peut donc envisager deux pistes : d'une part, l'étude des lois rang - population urbaine à l'échelle nationale, mais aussi à l'échelle continentale et à l'échelle mondiale ; d'autre part, l'étude multi-scalaire de la répartition spatiale de la population à l'échelle nationale, continentale et mondiale.

Avant de commencer ces analyses, il est bon, d'une part, de rappeler les différents liens existants entre la géographie et la population, et, d'autre part, de présenter les principaux travaux unissant géographie du peuplement (qui sera spécifiquement étudiée ici) et analyse spatiale.

15.1. Géographie et populations

La population est « l'ensemble des habitants d'un territoire donné » (Thumerelle, 1996, p. 51) ou « l'ensemble [des] individus disposant d'une structure et d'une dynamique internes propres » (Thumerelle, 1996, p. 51). Autrement dit, « une population n'existe que comme ensemble. Les caractéristiques d'une population sont exclusivement des caractéristiques collectives » (Noin et Thumerelle, 1993, p. 19). La population est donc un objet pluridisciplinaire, par définition, à petite échelle. Il existe de nombreuses disciplines qui construisent cet objet d'étude : la démographie, l'écologie, la biologie, l'histoire, la géographie, *etc.* (Noin et Thumerelle, 1993). Dans le champ de la géographie, l'étude de la répartition de la population a toujours été un domaine particulier. En effet, c'est par l'intermédiaire de cette entrée que Paul Vidal de la Blache (1922) avait choisi de construire la géographie humaine. Il s'agissait évidemment de répondre à une question non triviale : « Où sont les Hommes sur la Terre ? ». Pour Paul Vidal de la Blache, l'objet d'étude principal est ce qu'il appelle les « établissements humains ». Il en distingue deux : les établissements temporaires et les établissements sédentaires. Il est bien entendu que seuls les établissements sédentaires sont facilement cartographiables. De plus, il propose d'opposer le regroupement humain à l'isolement humain. Les regroupements sont deux types : les villes qui accueillent des habitats agglomérés et concentrés, et les villages qui se définissent par des habitats agglomérés et déconcentrés. Aujourd'hui, les liens entre géographie et population s'articulent à travers deux grandes sous-disciplines (Thumerelle, 1996) : la géographie de la population (la plus étudiée) qui s'occupe des processus et des dynamiques spatiaux contemporains (états actuel et futur de la population), et la géographie du peuplement qui établit les structures spatiales (états passé et actuel de la population), ainsi que leurs causes.

La géographie de la population a fortement évolué depuis un siècle. Cette transformation est marquée par trois grandes étapes (Noin et Thumerelle, 1993). Tout d'abord, de la fin du XIX^e siècle aux années 1950, il s'agissait d'étudier le rapport entre les Hommes et leur milieu physique, milieu expliquant leur répartition. Ensuite, à partir des années 1950, elle s'est rapprochée de la démographie, science du dénombrement de la population humaine. Ce rapprochement se décline en trois grandes sous-disciplines : la géographie démographique qui correspond à une « utilisation par les géographes des indicateurs démographiques » (David, 2004), la démogéographie qui consiste en « une mise en valeur de la dimension spatiale des faits démographiques » (David, 2004), et la démographie spatiale qui se définit comme un « champ étroit avec des préoccupations proches de celles de la démographie statistique » (Noin et Thumerelle, 1993, p. 5) qui est profondément marquée par l'œuvre de Hervé Le Bras (1993 ; 2000 ; 2005). Enfin, à partir des années 1970, un rapprochement avec la sociologie a été opéré. En effet, celle-ci est désormais perçue comme étant « l'analyse des processus engendrant les configurations géographiques » (Noin et Thumerelle, 1993, p. 5). Ainsi, on est amené à réaliser des études combinant faits sociologiques et faits démographiques pour expliquer la répartition et la mobilité des populations.

Cependant, cette mobilité est rarement intercontinentale (Le Bras, 1993 ; Baudelle, 2003, p. 186). De ce fait, il existe une certaine forme d'inertie, c'est-à-dire une stationnarité de la population mondiale. C'est ce qu'étudie la géographie du peuplement. Celle-ci a pour objet d'étude la structure, et non la dynamique (Baudelle, 2003). D'abord, elle établit la répartition de la population à la surface de la terre. Ensuite, elle propose des grands facteurs explicatifs autour des concepts d'œkoumène et de foyers de peuplement. Enfin, elle essaye de comprendre les rapports entre dynamique démographique (court terme) et dynamique de peuplement (long terme). Autrement dit, « le thème du peuplement est d'un grand intérêt scientifique mais aussi pédagogique car il permet une approche globale de la géographie humaine, échappant autant à la segmentation habituelle entre branches (géographie rurale, urbaine...) qu'à la division courante entre géographie physique et géographie humaine » (Baudelle, 2003, p. 5).

Cette quatrième partie s'intéressera à la géographie du peuplement, et non à celle de la population. D'après l'imposante littérature sur le sujet, il existe deux grands facteurs expliquant cette répartition des Hommes : les facteurs physiques et les facteurs historiques (Vidal de la Blache, 1922 ; Noin, 1979 ; George, 1993 ; Baudelle, 2003 ; David, 2004). Les facteurs physiques sont assez simples à établir. Le facteur climatique est plus important, car environ la moitié de la population mondiale habite dans la zone tempérée (George 1993). Toutefois, il n'est pas unique : les reliefs, le réseau hydrographique et les sols jouent également un rôle essentiel. De plus, les facteurs historiques sont tout autant déterminants. Ces deux facteurs combinés permettent de définir d'une part le concept d'œkoumène, et d'autre part celui de foyers de peuplement.

L'œkoumène est un terme inventé par Max Sorre, comme le rappelle Pierre George (1993, p. 7). Il correspond à l'espace habité, ou habitable par les Hommes (David, 2004). « L'œkoumène est donc l'ensemble des pays où l'humanité vit et procrée » (George, 1993, p. 8).

« Les principaux foyers de peuplement, si l'on excepte les pays neufs, sont issus d'une occupation humaine proportionnellement dense dans des temps anciens » (Dumont, 2004, p. 271). Autrement dit, les principaux foyers de peuplement renvoient à un concept qui possède une dimension beaucoup plus historique et qui est étroitement lié à la notion de concentration humaine forte (Vidal de la Blache, 1922). De plus, ces foyers peuvent être considérés comme des « mondes pleins » pour reprendre une expression chère à Pierre Chaunu (1969). Toutefois, ces foyers ont une définition qui fluctue davantage en fonction des auteurs. Néanmoins, la différence ne se joue qu'entre trois ou quatre foyers de population historiques. Ainsi, tous les auteurs s'accordent sur le foyer d'Asie orientale (Japon, Corée(s), Chine orientale et Taïwan), sur celui du subcontinent indien (Inde, Pakistan, Bangladesh, Népal, Bhoutan) et sur celui d'Europe matérialisé par une dorsale bien connue entre Londres et Milan en passant par Bruxelles et le bassin industriel de la Ruhr (Baudelle, 2003 ; David, 2004). À cette liste, certains ajoutent le foyer nord-américain autour de la région des Grands Lacs (Noin, 1979 ; George, 1993 ; Dumont, 2004 ; Guillon et Sztokman, 2008). Autour de ces foyers principaux gravitent des foyers secondaires : le golfe de Guinée en allant de la Côte-d'Ivoire au Nigeria ; l'archipel indonésien autour de Java en incluant l'Indochine, le croissant fertile en allant du Nil au Proche-Orient, le Mexique central, la Cordillère des Andes, le Rio de la Plata, les Caraïbes, le Maghreb, le rift et les Grands Lacs africains, le Moyen-Orient autour de la Mésopotamie et l'Australie orientale avec la Nouvelle-Zélande et les îles Fiji (Noin, 1979 ; David, 2004 ; Dumont, 2004 ; Guillon et Sztokman, 2008). Autrement dit, pour certains auteurs, le foyer nord-américain n'est qu'un foyer secondaire.

Pour conclure, on peut rappeler que « ce n'est pas à la façon d'une nappe d'huile envahissant régulièrement la surface terrestre que l'humanité en a pris possession solide et durable. Des intervalles vides ont persisté longtemps, persistent encore en partie, à maintenir la séparation des groupes. Ceux-ci obéissent à une loi de nécessité en se séparant, en s'écartant les uns des autres » (Vidal de la Blache, 1922, p. 68-69). Même si, de nos jours, on circule beaucoup plus facilement et beaucoup plus rapidement qu'à l'époque de Paul Vidal de la Blache, l'inertie des foyers de peuplement est toujours d'actualité. À l'échelle mondiale, on constate toujours des concentrations et des déconcentrations humaines (cf. chapitre 16), c'est-à-dire des « terres vides » et des « terres pleines » pour reprendre les expressions de Pierre-Jean Thumerelle (1996), mais Pierre George (1993), par exemple, souligne un problème majeur autour de cette notion de concentration. En effet, une population peut être concentrée un niveau local (cf. chapitre 17), et déconcentrée à un niveau beaucoup plus global (cf. chapitres 16 et 17). Il existe donc un problème d'articulation entre les échelles, donc un problème de fractalité. Il est vrai que « parler de concentration ou de dispersion de la population n'a de sens que pour une échelle donnée d'observation » (Le Bras, 1993, p. 115). Autrement dit, le problème concentration-déconcentration est de même nature que le questionnement entre le vide et le plein d'une ville (cf. chapitre 9). La géographie du peuplement peut alors se construire autour d'objets et d'analyses fractals.

15.2. Géographie du peuplement et analyse fractale

Le vide et le plein en géographie du peuplement sont souvent associés aux différentes notions gravitant autour de la description des objets célestes, et ce dès Paul Vidal de la Blache (1922, p. 71). En effet, « le peuplement de la terre surprend tout autant par son irrégularité que par sa discontinuité. Les cartes par points de la distribution spatiale de la population n'évoquent-elles pas celle du ciel ? Ici une étoile isolée, là un semis d'étoiles, ailleurs des nébuleuses, et surtout des vides, des vides à l'intérieur des constellations, des vides immenses entre les constellations » (Thumerelle, 1996, p. 54). Autrement dit, Pierre-Jean Thumerelle décrit la structure fractale intrinsèque du peuplement à l'échelle planétaire. La géographie du peuplement ne peut donc s'étudier qu'à travers des niveaux géographiques (George, 1993 ; Thumerelle, 1996).

Pierre George (1993) en identifie trois essentiels : le niveau continental, le niveau étatique et le niveau local autour des relations ville-campagne. Pour Pierre-Jean Thumerelle, « l'emboîtement des échelons géographiques ne doit pas faire illusion, nul ne peut faire abstraction des seuils spatiaux, le changement d'échelle n'entraînant pas un effet de zoom. Autrement dit, on ne saurait sans risque déduire d'observations à micro-échelle des principes que l'on retrouverait à macro-échelle. Les mêmes phénomènes ne se manifestent ni avec la même intensité ni de la même manière, selon le niveau territorial auquel on se situe, et les inerties ne sont pas les mêmes » (Thumerelle, 1996, p. 61). Il est donc plus prudent que Pierre George, car il refuse de définir des niveaux caractéristiques. C'est également le cas de Guy Baudelle qui propose explicitement de construire une géographie du peuplement basée sur la nature fractale de celle-ci. « Les hommes sont en effet presque tout et le peuplement est discontinu à toutes les échelles » (Baudelle, 2003, p. 31).

Celui qui a plus étudié les échelles de la population, est Hervé Le Bras (1993 ; 2000). Il montre que les grandes échelles géographiques sont moins stables que les petites, ce qui se comprend très bien. Les niveaux planétaire et continental sont stables, même si la mobilité est forte (Le Bras, 1993, p. 10). Le niveau étatique l'est tout autant, si l'on prend l'exemple de la France, les quatre grands foyers de peuplement ont toujours été depuis, au moins, le Moyen Âge : Paris, Lyon, le bassin minier du Nord-Pas-de-Calais, et Marseille (Le Bras, 1993). Ainsi, « Globalement la stabilité l'emporte nettement. La persistance de la configuration spatiale et hiérarchique du peuplement est même une caractéristique majeure, malgré des bouleversements tels que l'accroissement considérable de la population mondiale ou le passage d'une économie agricole à une économie industrielle : dans le monde développé, les plus grandes villes d'aujourd'hui était déjà les plus grandes avant la révolution industrielle » (Baudelle, 2003, p. 186). Finalement, seuls les niveaux très locaux sont instables.

Si l'on reprend, la position de Pierre-Jean Thumerelle (1996) au sujet des vides et des pleins, on constate un accord avec l'opinion d'Olivier David (2004) qui remarque qu'il n'existe aucun vide absolu, même parmi les déserts humains connus qu'ils soient blancs, secs, verts ou d'altitude (Baudelle, 2003). Le concept d'œkoumène qui peut être identifié « au plein », est donc fractal, dans la mesure où il dépend d'une

échelle de référence. De ce fait, « un simple changement d'échelle spatio-temporelle d'observation suffit souvent à mettre l'accent sur les permanences ou au contraire sur les changements et fait converger ou diverger des facteurs explicatifs de toutes origines » (Thumerelle, 1996, p. 50). Il en va de même pour le concept de foyer de peuplement, car une nouvelle fois, le vide domine et structure le plein. En reprenant la description de Daniel Noin (1979, Chapitre 5), il est possible d'établir les vides et les pleins de la planète. C'est d'ailleurs ce portrait qui sera retenu pour le chapitre 17. Daniel Noin décompose le monde en quatre zones : l'Eurasie, l'Amérique, l'Afrique et l'Océanie. Pour l'Eurasie, les vides correspondent à la toundra, la taïga, le désert de Gobi, le plateau du Tibet, le Tian-Chan, l'Altaï et Bornéo. Pour l'Amérique, les vides sont plus nombreux : le Canada, le Groenland, les Rocheuses, l'Amazonie, la Patagonie et les Andes méridionales. Pour l'Afrique, la population est beaucoup moins concentrée ; seuls deux vides sont notables : le Sahara et le Kalahari. Pour l'Océanie, on peut prétendre que le vide est omniprésent par l'intermédiaire notamment de la Nouvelle-Guinée et le Bush australien, ainsi que de nombreuses îles inhabitées.

Pour cette analyse, trois niveaux, liés à la nature des données de la base utilisée, sont retenus : le niveau planétaire (cf. chapitre 16), le niveau continental (cf. chapitre 17) et le niveau étatique (cf. chapitre 17), l'objectif étant de montrer que « dans la morphologie du peuplement comme dans ses changements à différentes échelles, l'espace est précisément structuré » (Le Bras, 1993, p. 207).

16

Présentation de la base de données *Tageo*

Le site *Tageo* regroupe l'ensemble des données disponibles sur la population de chaque État du monde (soit 193). Cette base présente la particularité de fournir une géolocalisation ponctuelle des villes administratives où la population a été recensée, ce qui est suffisant pour réaliser une étude globale de la structure multi-échelle de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire, l'objectif n'étant évidemment pas de réaliser une nouvelle base de données analogue à *Geopolis* (Moriconi-Ébrard, 1994). Ce chapitre détaillera la structure des données, et proposera une nouvelle interprétation des lois rang - taille abondamment utilisées en géographie urbaine pour décrire le réseau inter-urbain en reprenant des travaux réalisés en 2007 (Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009).

16.1. *Tageo*, site des données de la loi rang - taille

Tageo se présente comme le site « officiel » (gratuit) de la loi rang - taille en géographie urbaine. Il fournit pour les 193 États officiels du monde le classement de leurs villes définies par leur limite administrative. Au maximum, chaque série de données possède 300 lieux par État. On peut donc, sans problème, estimer un ajustement de type rang - taille sur ces listes. Toutefois, que valent réellement les informations contenues dans cette base qui ne mentionne aucune de ses sources ?

16.1.1. La nature des données

Tageo distingue deux informations : celles sur le classement des villes par État et celles sur la population totale de l'État étudié. Les données ont été extraites précisément le 3 novembre 2009. À cette date, on a pu vérifier sur un nombre restreint d'État que beaucoup de classements correspondaient à ceux des classements officiels, par exemple celui des Fiji est bien sur le site officiel de cet État. Autrement dit, la base comporte des données qui peuvent être temporellement très éloignés d'un classement à l'autre. Par exemple, la Chine n'a pas publié de données officielles depuis 1982 (Moriconi-Ébrard, 1994). Le classement chinois proposé est donc surprenant puisqu'il n'intègre ni Macao, ni Hong Kong. L'ensemble des données est par conséquent très hétéroclite de ce point de vue. Par contre, les données sur la population totale de chaque État semblent correspondre à l'année en cours, puisque si on fait le total du nombre d'habitants sur Terre, on trouve 6,5 milliards d'habitants, ce qui est conforme aux estimations officielles de l'ONU, mais il faut reconnaître que « malgré la présence d'un arsenal statistique puissant et de données très riches à l'échelle internationale, il n'existe pas d'inventaire fiable du nombre total d'habitants sur la planète » (David, 2004, p. 30). De plus, le positionnement des lieux cités dans la base est lui-même incomplet ; il manque 2 242 localisations sur 24 791. Toutefois, il est aujourd'hui assez simple de retrouver les villes manquantes, car *Tageo* donne les latitudes et les longitudes en coordonnées internationales.

Avant tout traitement, il faut évidemment préciser les objectifs de l'analyse et compléter dans la mesure du possible cette base de données.

16.1.2. L'objectif de l'analyse et les corrections apportées à la base

L'objectif de l'étude menée est de proposer une méthode d'analyse multi-échelle en couplant la géolocalisation des villes et leur population respective. Ainsi, la qualité des données au niveau du classement rang - taille de chaque État importe peu, car il sera toujours possible de reprendre l'outil d'analyse créé sur des données plus fiables. De ce point de vue, *Tageo* n'échappe pas aux différents reproches sur les sources de données de la population urbaine formulés par François Moriconi-Ébrard (1994).

Il en existe trois principaux.

1. Les découpages administratifs, utilisés par *Tageo*, suivent rarement des agglomérations urbaines réelles.
2. Les États ont chacun leur technique de comptage et leur stratégie de publication de leur population. Concernant le comptage, on dénombre trois problèmes. Tout d'abord, celui de la répétitivité dans le temps des recensements, elle est très irrégulière, même dans les États développés. Ensuite, dans certains États, et particulièrement ceux d'Afrique (Noin et Thumerelle, 1993 ; Moriconi-Ébrard, 1994), les recensements et les registres d'état civil sont réalisés de manière très approximative, si l'on excepte ceux subventionnés par les différents organismes de l'ONU (Noin et Thumerelle, 1993). Enfin, dans certains États, comme la Chine, les militaires présents en un lieu ne sont jamais comptés dans un recensement. De plus, pour les publications, beaucoup d'État, et en particulier les États autoritaires ou en voie de développement, ne publient ou ne diffusent aucune de leurs données officielles, ce qui ne facilite pas la recherche documentaire.
3. La recherche documentaire est un réel casse-tête. Le complément sur les géolocalisations apporté illustre bien l'ensemble des problèmes possibles évoqués par François Moriconi-Ébrard (1994). Deux sources complémentaires ont été utilisées : la base de données de la CIA (geonames.org) et celle de *GoogleEarth*. Les 2 242 sites manquants ont systématiquement été recherchés sur ces deux bases. Cela a permis de porter le nombre de sites marquants à 519. Ces derniers permettent d'identifier deux problèmes : celui de la transcription des alphabets locaux en alphabet latin et celui des changements de toponymes. Le premier cas est typique du passage de l'alphabet arabe à l'alphabet latin. Sur les 519 sites manquants, 168 correspondent à des toponymes arabes mal transcrits dans la base *Tageo*, dans le sens où elle ne fournit qu'une seule graphie. Les autres alphabets (chinois, cyrillique, grec) ont été moins problématiques. Par contre, le problème des changements toponymiques s'est peu posé, car la base de la CIA propose tous les anciens noms, ou tous les noms que peut porter une localité.

Pour conclure, il faut une nouvelle fois insister sur le fait que l'objectif de cette étude est de proposer une méthode d'analyse multi-échelle des villes localisées et de leur population respective. Ainsi, les imperfections relevées sur les populations ne peuvent être de même nature de celles relevées sur les localisations. Que le nombre d'habitants d'une ville soit faux, c'est une chose, mais que sa localisation soit fautive c'en est une autre. Étant donné que l'analyse du chapitre suivant portera essentiellement sur la position relative des lieux cités dans la base, les informations incertaines de la variable « nombre d'habitants » ne devraient pas perturber la structure globale des résultats.

16.1.3. Le sens des variables utilisées

Avant d'effectuer une analyse rang - taille de chaque État, il faut préciser ce qu'apportent les deux variables contenues dans la base *Tageo* afin d'éviter les erreurs d'interprétation.

16.1.3.1. La variable « position »

La variable « position » a été rarement utilisée dans l'étude de la répartition de la population mondiale. En effet, elle n'a un sens que si elle correspond à une réelle concentration de population en un lieu donné, ce qui n'est pas toujours le cas dans de nombreuses entités administratives. Lorsque le nombre d'habitants est peu important sur une étendue restreinte, la localisation par les limites administratives à un sens, mais ceci est rarement le cas pour des agglomérations morphologiques (cf. chapitre 7), où la limite officielle n'intègre pas la population réellement concentrée en un lieu (Moriconi-Ébrard, 1994). Toutefois, dans le chapitre 17, une méthode sera proposée pour corriger ce problème.

On peut également ajouter que le réseau des grandes villes à l'échelle mondiale présente des « hiérarchies [qui] sont relativement stables, car les espaces urbains disposant d'un certain poids démographique bénéficient d'effets d'inertie ne pouvant se modifier que lentement » (Dumont, 2004, p. 271). Ainsi, même si les classements de ces positions par l'intermédiaire du nombre d'habitants varient dans le temps, ce n'est pas le cas des positions elles-mêmes qui peuvent être, certes, déclassées, mais elle se maintiennent assez longtemps dans la hiérarchie urbaine. Les résultats présentés dans le chapitre 17 au niveau des positions, sont donc structurels.

16.1.3.2. La variable « nombre d'habitants »

Dans ce cadre, « une population se définit tout simplement comme étant l'ensemble des habitants (domiciliés à leur lieu de résidence des habitants (domiciliés à leur lieu de résidence habituelle) d'un territoire donné » (Noin et Thumerelle, 1993, p. 18). Pour éviter toute confusion avec le sens statistique du terme « population », désormais, il sera systématiquement remplacé par l'expression « nombre d'habitants ». Son intérêt a été parfaitement soulevé par François Moriconi-Ébrard (1994) qui écrivait que « la variable « nombre d'habitants » révèle [...] de l'évolution d'un système de peuplement qui transforme à de multiples échelles et tend à rassembler une humanité de plus en plus nombreuse dans un ensemble paradoxalement très sélectif de noyaux de peuplement. À cet égard, la ville apparaît comme le système d'organisation le plus rentable que la société ait inventé pour permettre à une population nombreuse de vivre sur une surface de taille la plus réduite possible. [On peut remarquer qu'ici l'auteur décrit ici un processus de fractalisation.] La variable « nombre d'habitants » est donc particulièrement appropriée pour mesurer ces processus, dans lesquels la ville représente davantage un moyen d'investigation que la finalité d'une recherche. Les villes peuvent ainsi être définies non pas par la portée de leur influence, mais directement par cette fonction de noyau de peuplement » (Moriconi-Ébrard, 1994, p. 13). De plus, si les géolocalisations sont incomplètes, ce n'est nullement le cas de la variable « nombre d'habitants » qui présente une liste continue de nombres, classée par ordre décroissant de la ville de rang 1 à celle du rang maximum connu.

Les données sont donc de qualité suffisante pour proposer une méthode d'analyse multi-échelle à l'échelle planétaire. De plus, elles permettent d'obtenir une structure rang - taille qui est continue sur les 2 668 premières villes administratives à l'échelle du monde, mais également à l'échelle de chaque État (soit 193 mesures possibles).

16.2. Lois rang - taille à l'échelle étatique

Dans cette partie, pour des raisons pédagogiques, seules les analyses à l'échelle étatique seront traitées. Cela permettra d'effectuer un état des lieux sur les principales relations et interprétations existantes des lois rang - taille en géographie urbaine, puis de vérifier leur validité dans chacun des classements de *Tageo*.

16.2.1. État des lieux des connaissances concernant les lois rang - taille

Les lois rang - taille sont issues d'une série d'observations empiriques qui caractérisent le réseau urbain défini comme étant la « répartition spatiale des villes en fonction de leur organisation hiérarchique » (Guérin-Pace, 1993, p. 4). On considère George Kingsley Zipf comme le père de cette approche (Zipf, 1941 ; Zipf, 1949). Ces lois se définissent par le fait « que l'on se place à l'échelle d'une région, d'un pays, d'un continent ou du monde, on constate toujours qu'il existe un petit nombre de petites villes, et que la diminution du nombre des villes suit une progression géométrique à peu près régulière lorsqu'on considère des catégories de taille de plus en plus élevée » (Pumain, 1982, p. 16). Autrement dit, il existe une relation linéaire entre, dans un graphique bi logarithmique, le rang et le nombre d'habitants d'une structure administrative. Cette dernière précision est indispensable pour l'étude correcte de la base *Tageo*, car comme cela était vu dans le chapitre 7, les limites administratives ne correspondent que très rarement aux limites morphologiques d'une ville. Il est important de rappeler que le classement doit impérativement être décroissant, sinon il est impossible d'établir une loi rang - taille (Clark, 1967).

D'ailleurs, la forme des distributions de la taille des villes change en fonction du choix des limites spatiales d'un objet géographique. Ainsi, si l'on étudie l'ensemble des agglomérations morphologiques, la structure de la loi rang - taille ne sera pas forcément une droite. Ce fut le cas, par exemple, de la France où l'on observait clairement un ajustement demi-parabolique (Laherrère, 1996). Ce résultat a été confirmé une nouvelle fois à l'échelle du monde à partir des données de l'ONU, soit les 435 premières conurbations à l'échelle du monde (Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009). Ainsi, plusieurs modèles ont pu être proposés pour étudier les lois rang - taille d'une variable V quelconque (Figure 133). Il faut préciser que ces dernières ressemblent aux lois de transformations d'échelle vues au chapitre 4, mais ce n'est qu'une analogie où l'on rapproche le rang r d'une résolution ε . Les lois rang - taille ne sont donc pas des lois fractales. Toutefois, la loi de Zipf est l'équivalent d'une loi invariante d'échelle. Pour une parabole, on se trouve dans le cas d'un modèle dépendant d'échelle plus complexe, où la dimension fractale varie elle-même en fonction de la résolution. À chacun de ces modèles, il est possible de proposer une correction log-périodique permettant un meilleur ajustement des données par rapport à ce que l'on observe, à savoir des paliers de populations.

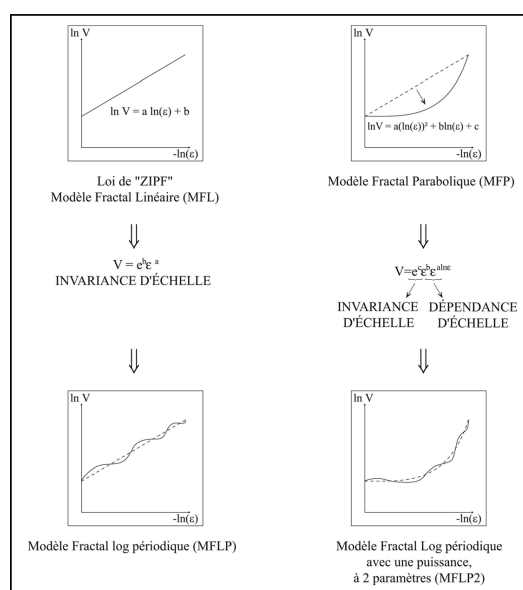


Figure 133. Schéma des différentes lois rang - taille possibles (Forriez, Martin, 2009)

Pour éviter de confondre lois fractales et lois rang - taille, ce texte poursuivra son analyse en appelant l'exposant des lois rang - taille : q ; le rang r et le nombre d'habitants P . Dans le cas linéaire, la relation observée dans un espace bi-logarithmique sera :

$$\ln P = -q \ln r + \ln P_0$$

ou, en loi de puissance,

$$P = P_0 r^{-q}.$$

De plus, contrairement aux graphiques de la Figure 133 et à la note de Denise Pumain (1982, p. 30-31), on ne prendra plus l'inverse du rang, car cette modification mathématique n'est pas nécessaire. En effet, elle ne permet que d'obtenir un exposant q positif, au lieu d'être négatif.

Si l'on revient, maintenant, sur l'ensemble des lois possibles observées, il faut préciser que l'on étudie toujours une loi rang - taille en analysant son espace bi logarithmique. C'est ce dernier, tout comme dans le cas des lois fractales, qui permet d'estimer si l'on se trouve dans le cas linéaire, ou dans le cas demi-parabolique, ou dans un cas inédit. Les potentialités des lois rang - taille sont donc largement à découvrir.

Quoi qu'il en soit, comme l'écrit François Moriconi-Ébrard, « un classement sur continuum statistique du nombre d'habitants pourrait peut-être constituer un critère scientifique si on [le] mettait en relation avec les structures de peuplement du pays : l'utilisation de la loi rang-taille pour un échantillon portant sur la totalité des établissements humains d'une unité géographique donnée met en évidence un seuil de rupture qui a été interprété comme un seuil de démarcation entre le rural et l'urbain. [...] Une définition qui s'appuierait sur la rupture de ce continuum statistique pourrait traduire ce changement de nature dans l'organisation d'un système spatial, ou en respectant les spécificités nationales et régionales, à condition toutefois de définir des limites spatiales homogènes pour chaque unité de peuplement » (Moriconi-Ébrard, 1994, p. 42). Cependant, le rapprochement entre système de peuplement, articulation urbain-rural et répartition dans l'espace géographique semble tout de même périlleux. Il est vrai que les lois rang - taille sont porteuses de toutes ces considérations, mais leur mise en correspondance se heurte aux lois fractales régissant au moins l'articulation urbain-rural et la répartition de la population. Il ne serait donc guère étonnant que le système de peuplement soit également régi par une structure multi-échelle. C'est ce que le chapitre suivant essayera de prouver.

Avant de poursuivre l'analyse, le paragraphe suivant présentera rapidement les résultats obtenus des lois rang - taille mesurées sur les distributions de taille des villes dans chacun des 193 États du monde.

16.2.2. Présentation des résultats obtenus à partir des données *Tageo*

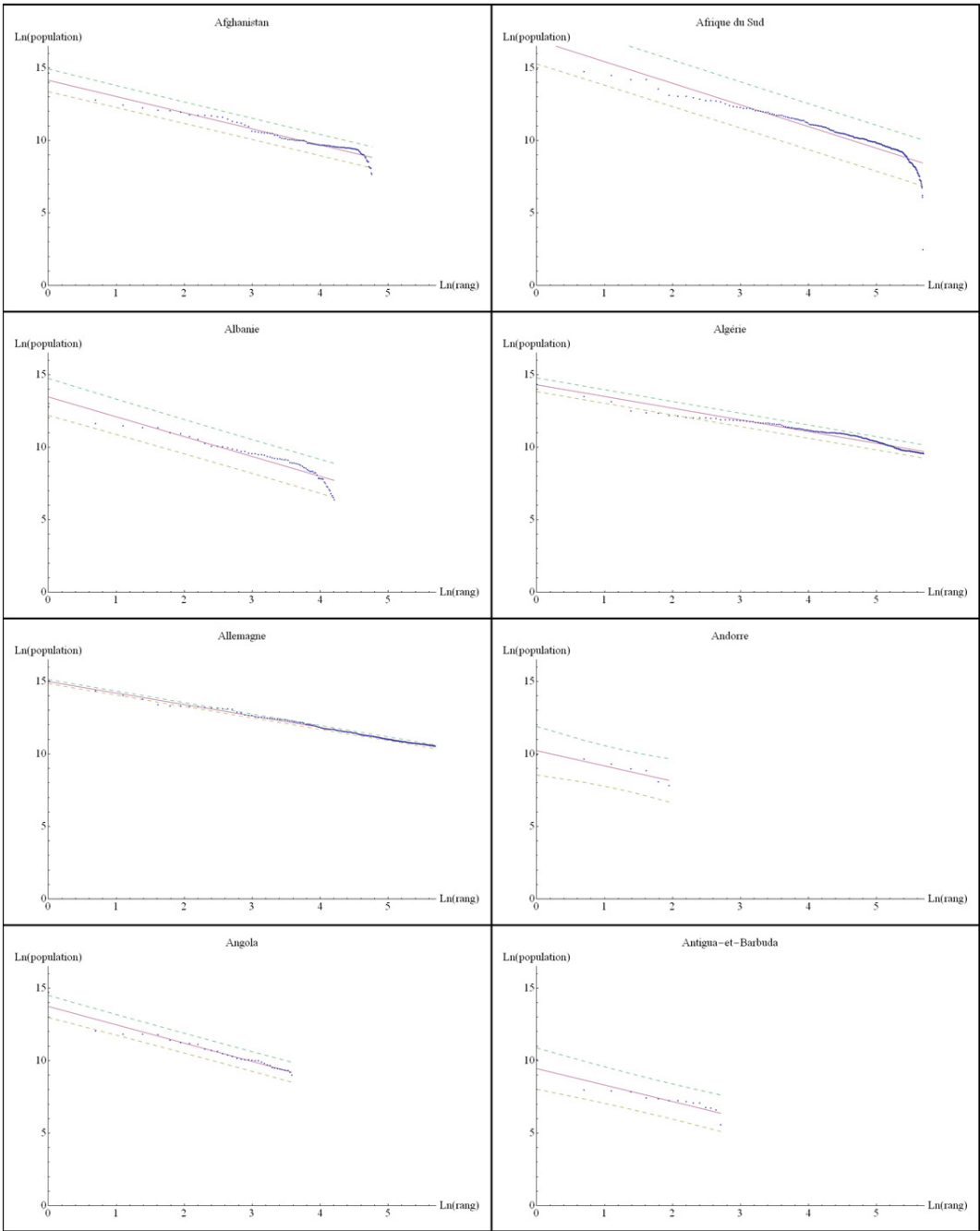


Figure 134-1. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

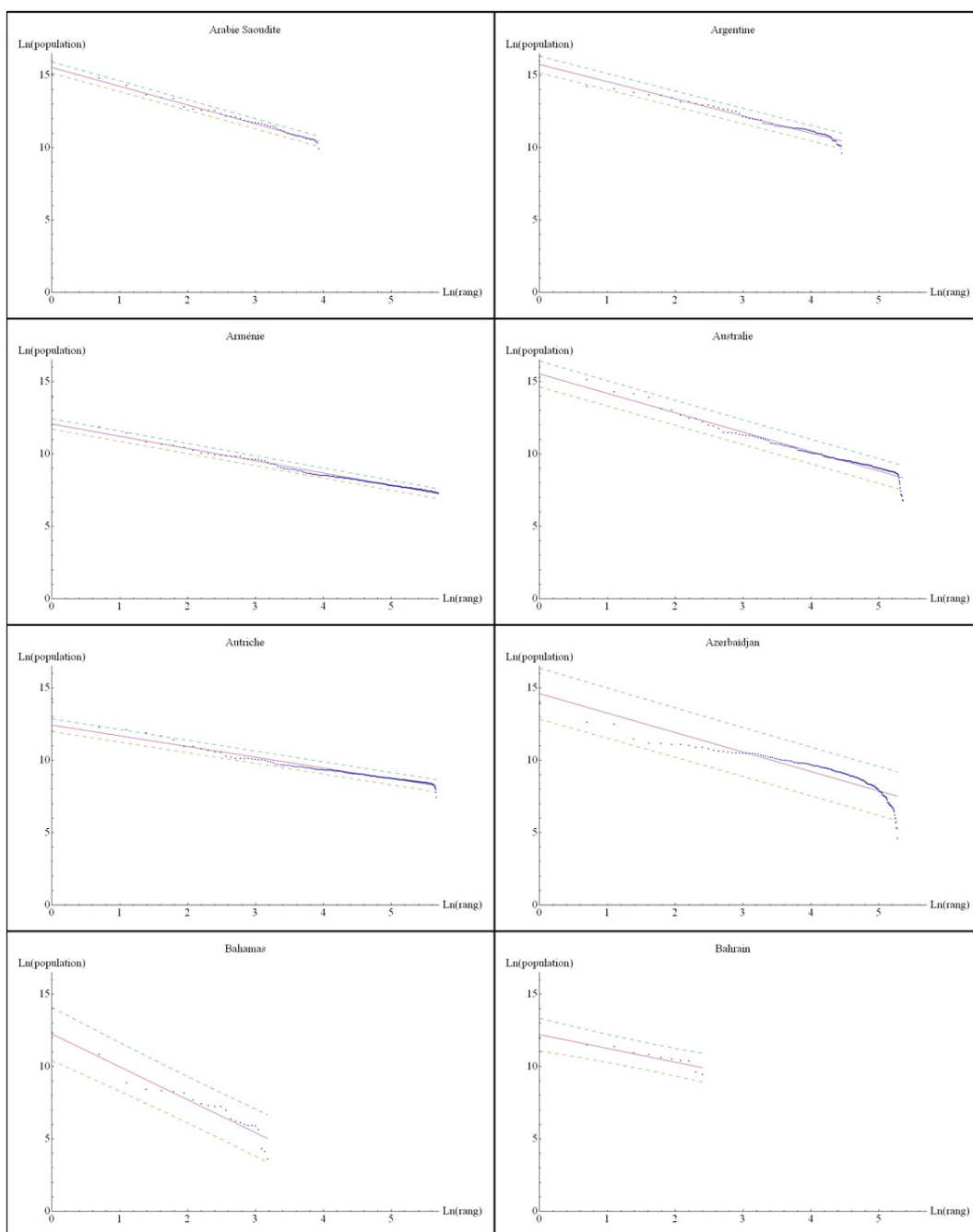


Figure 134-2. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

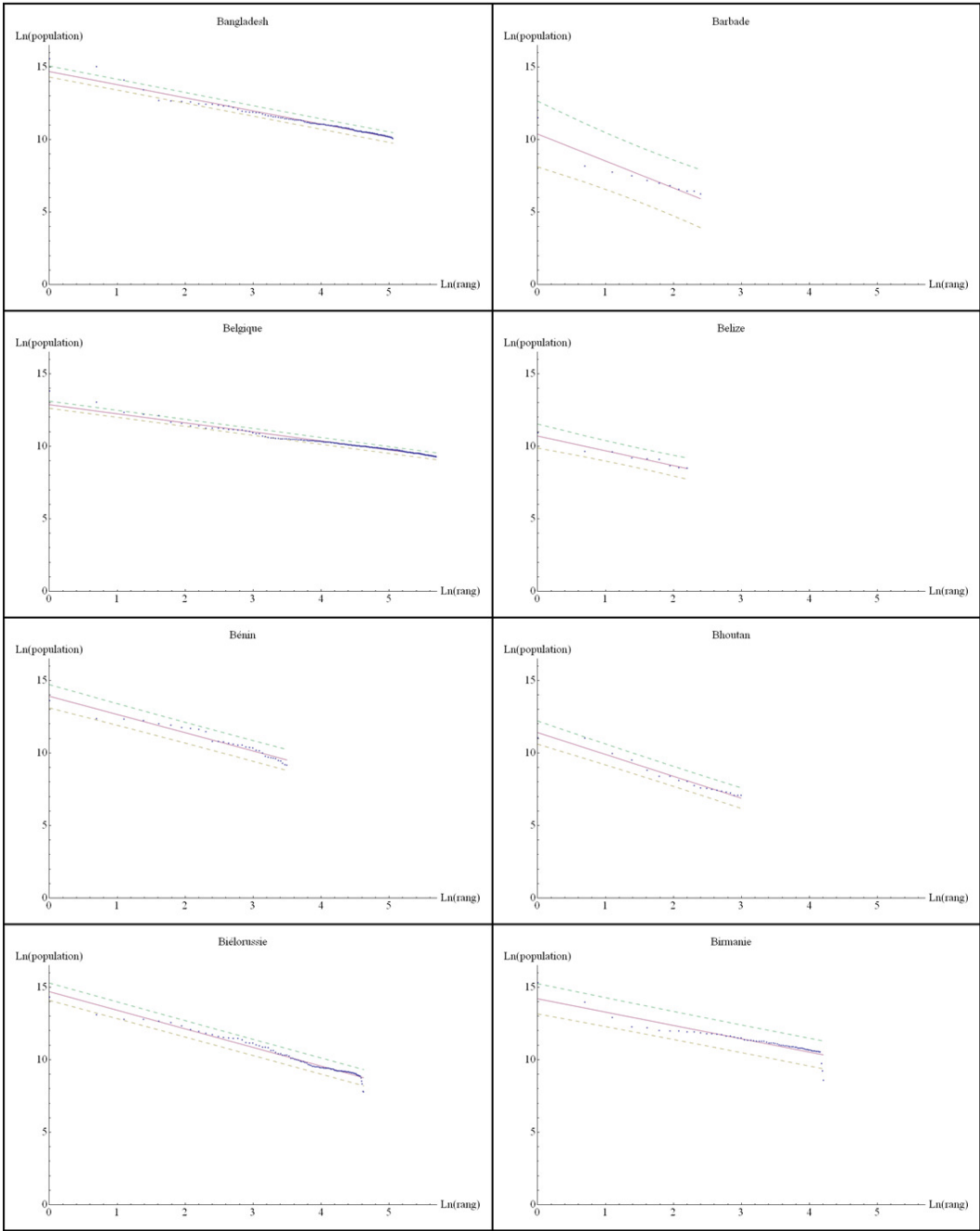


Figure 134-3. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

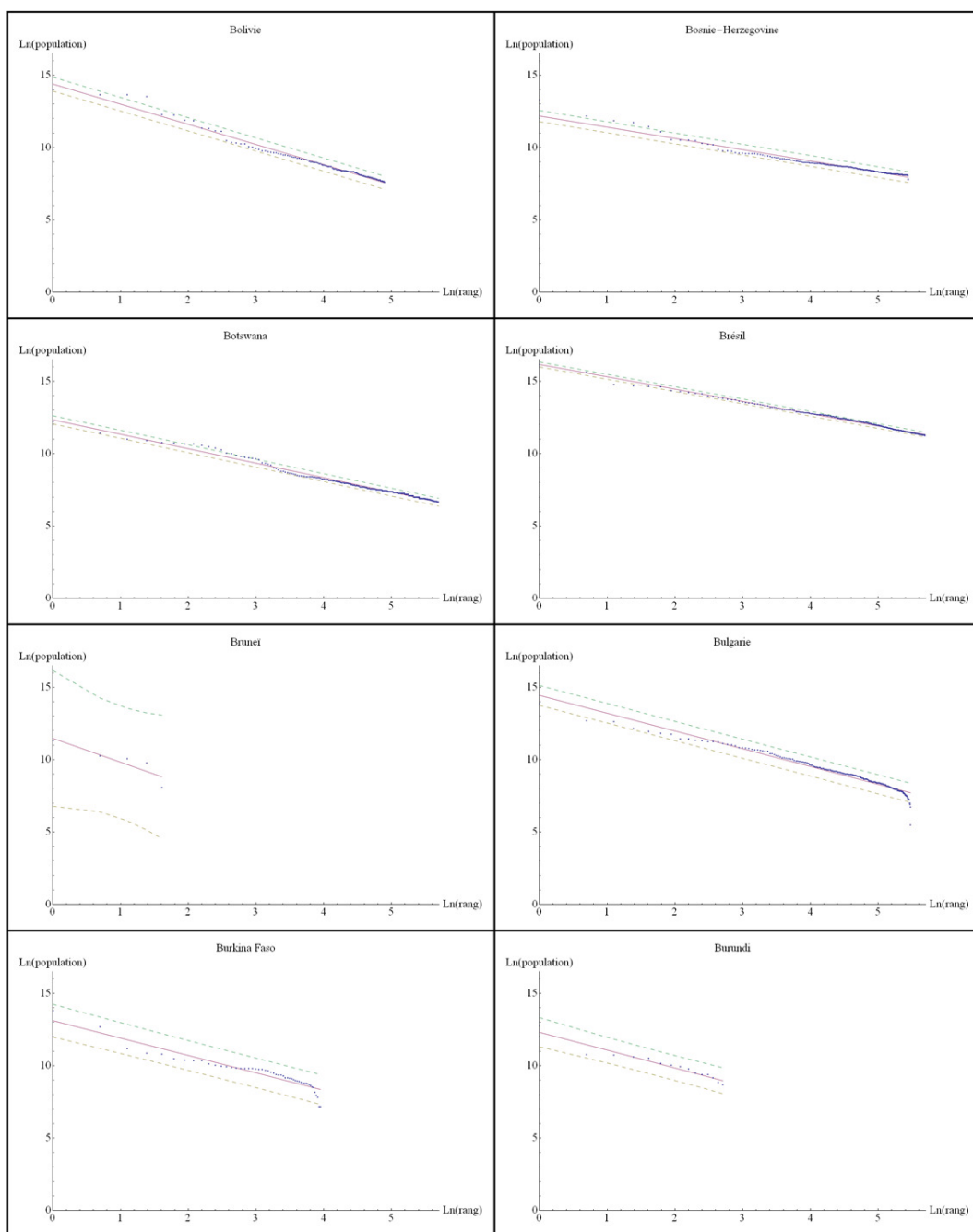


Figure 134-4. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

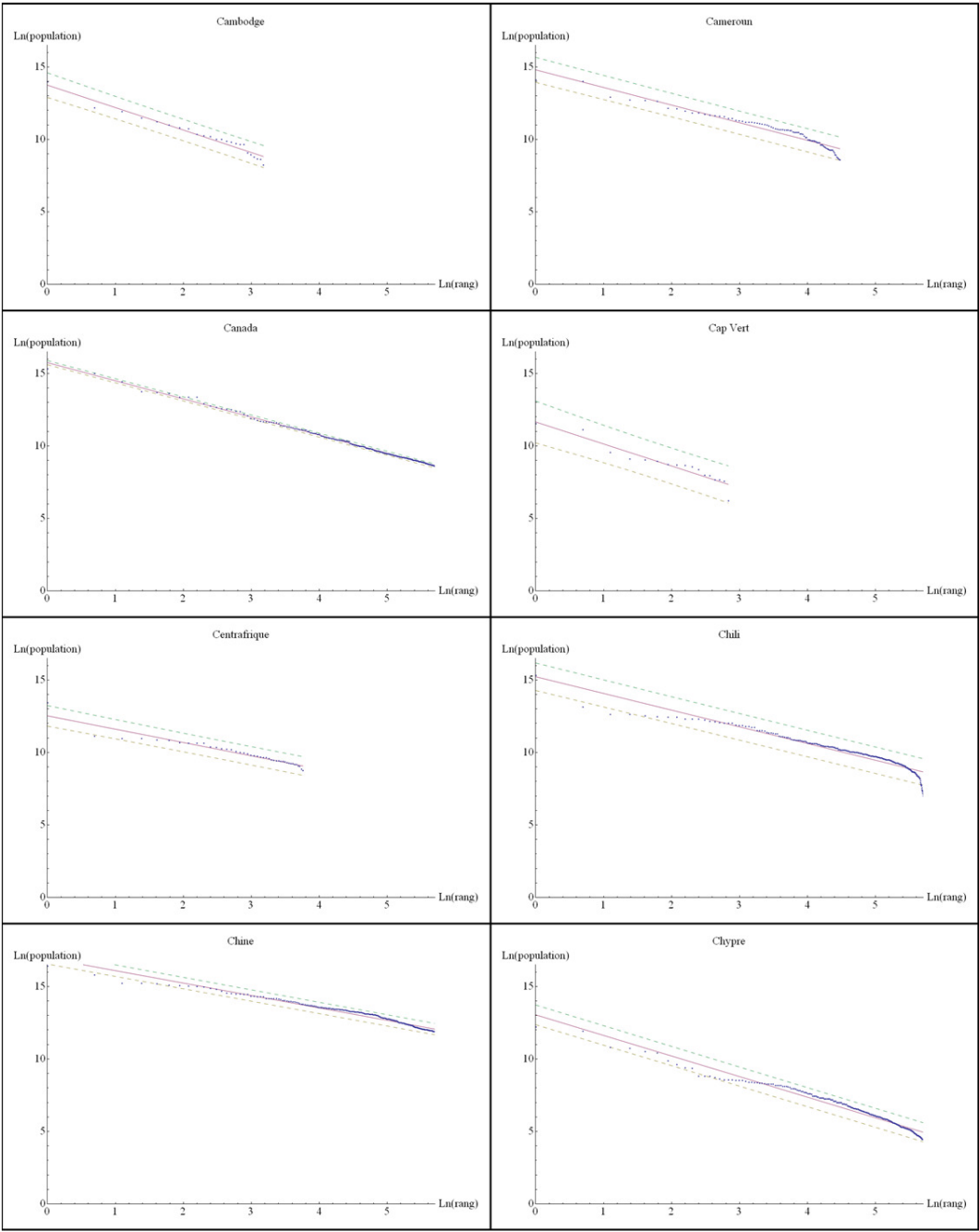


Figure 134-5. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

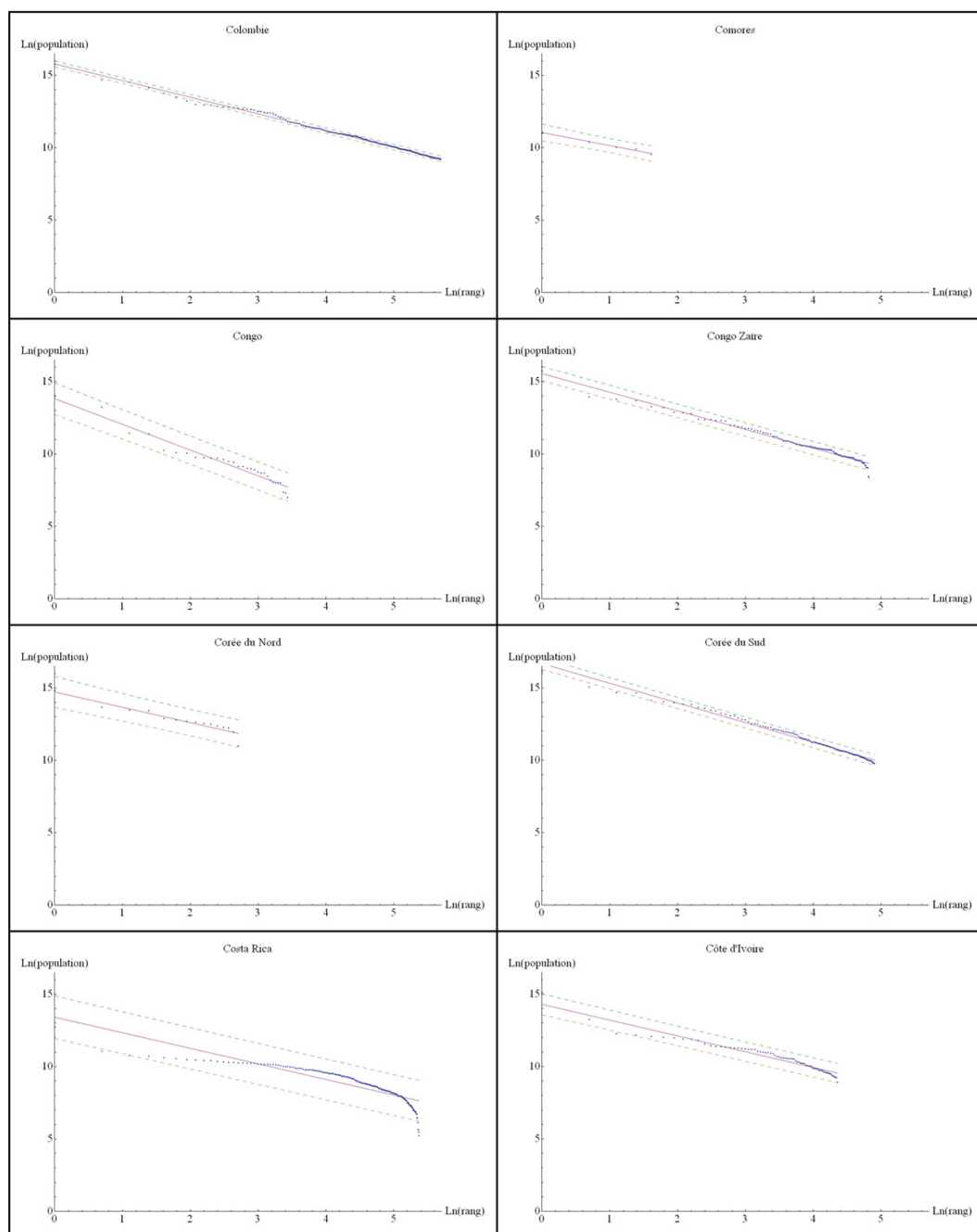


Figure 134-6. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

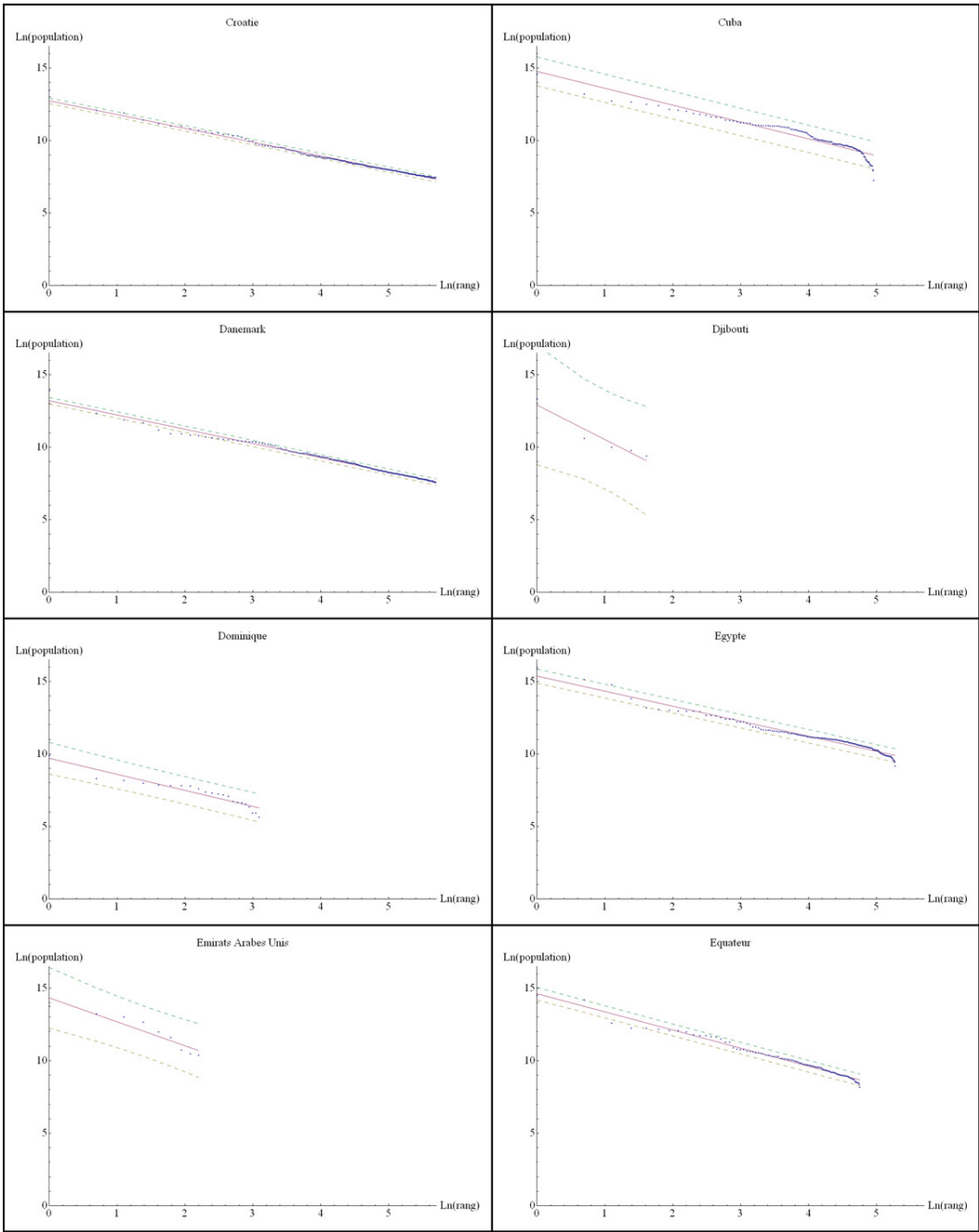


Figure 134-7. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

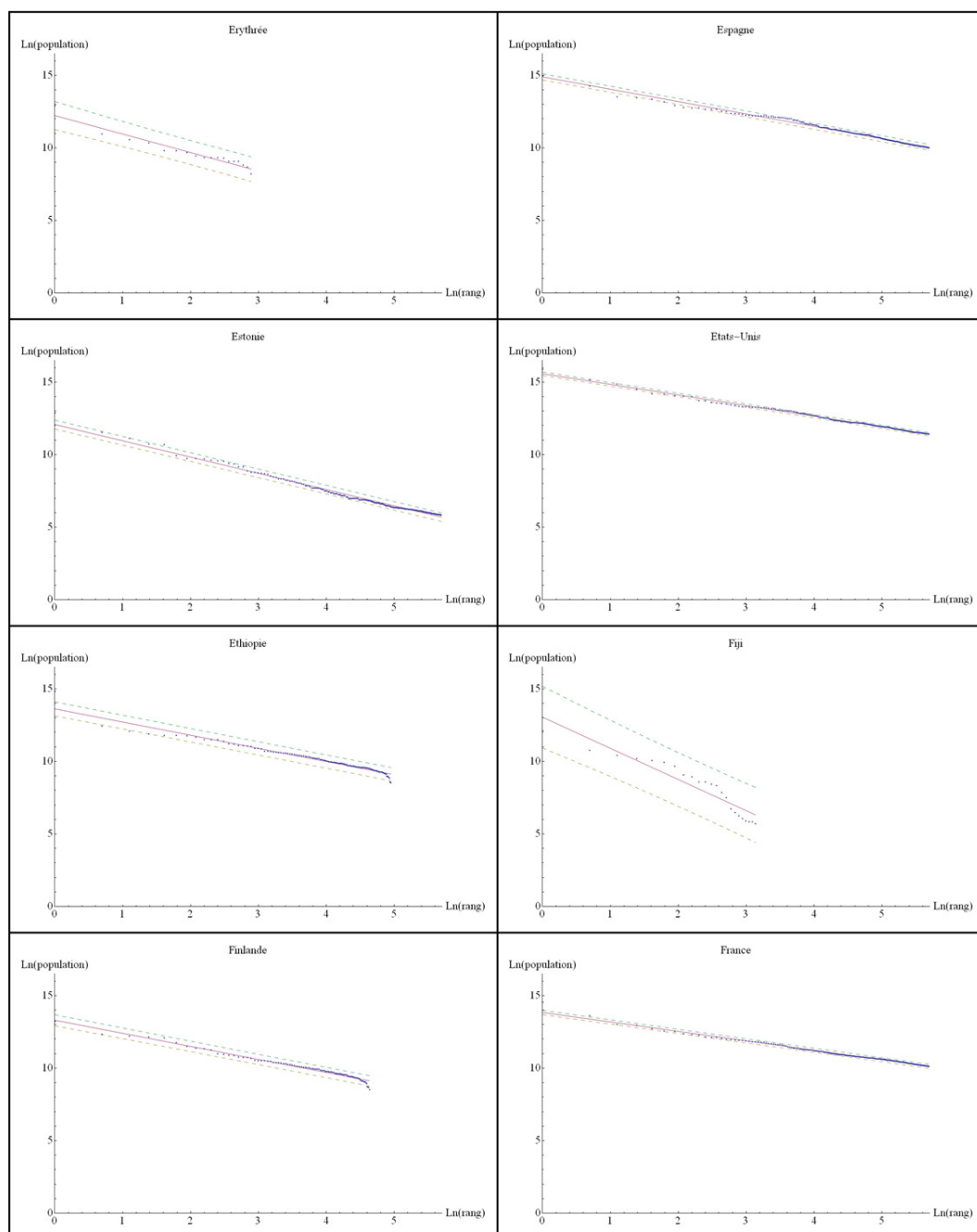


Figure 134-8. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

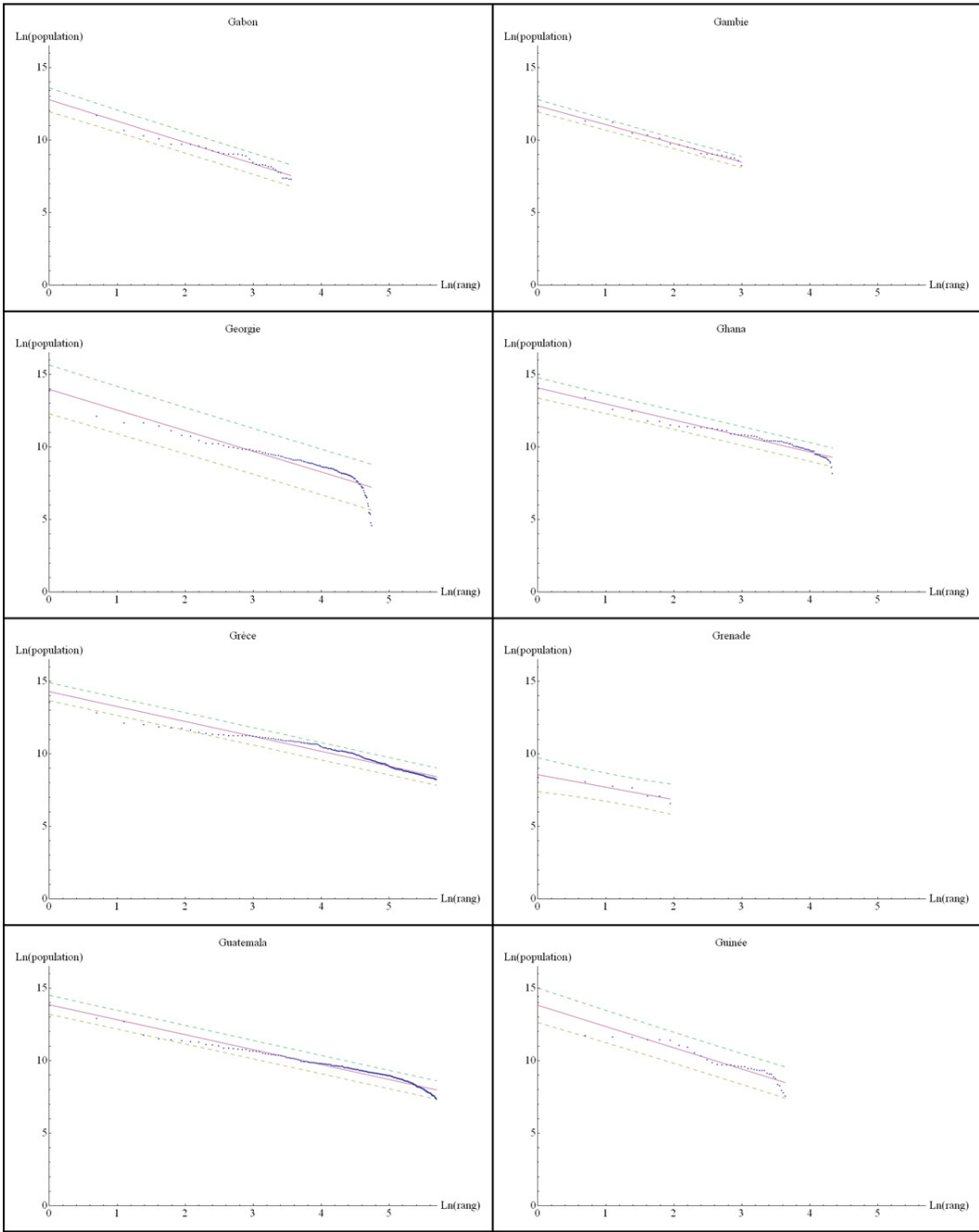


Figure 134-9. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

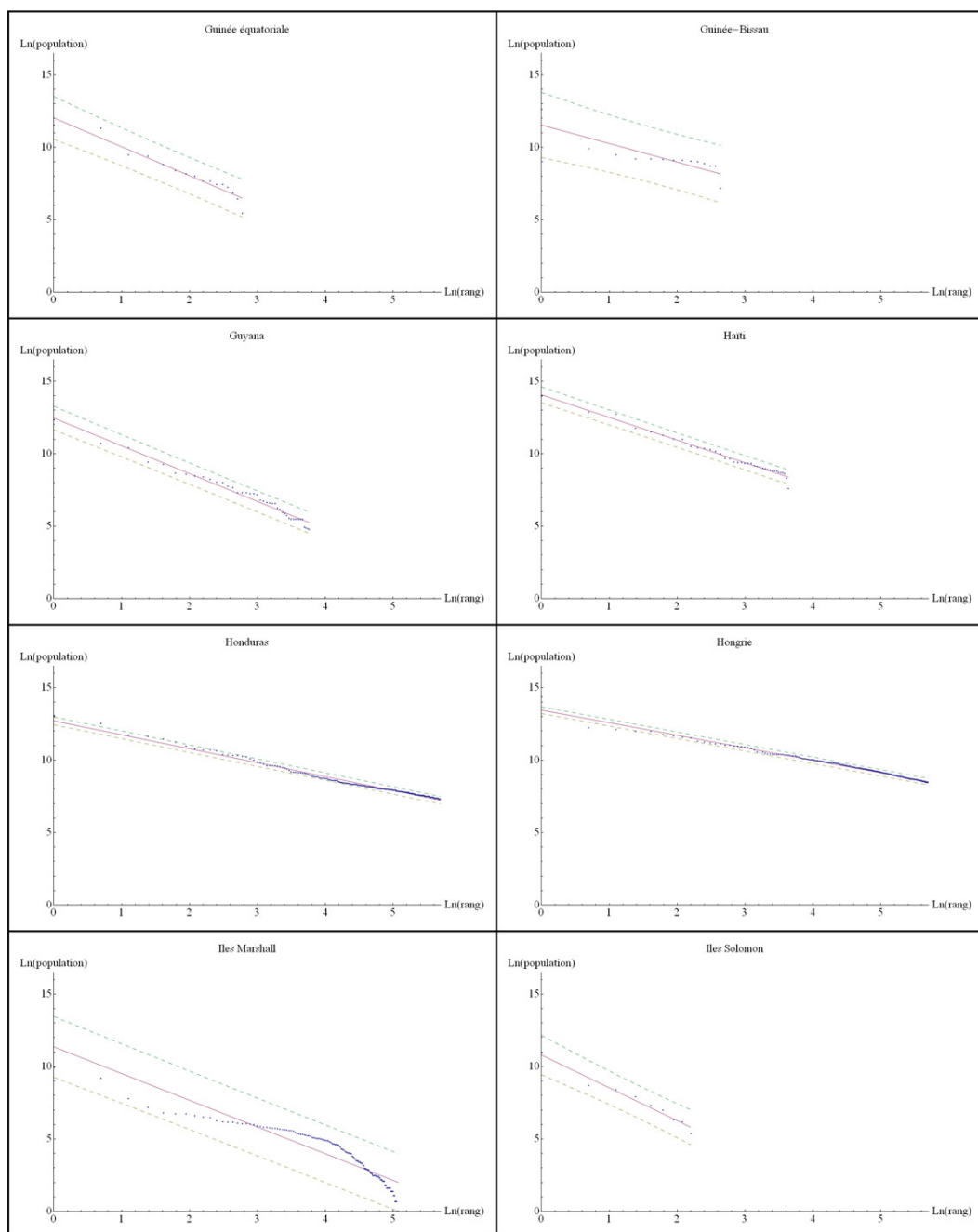


Figure 134-10. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

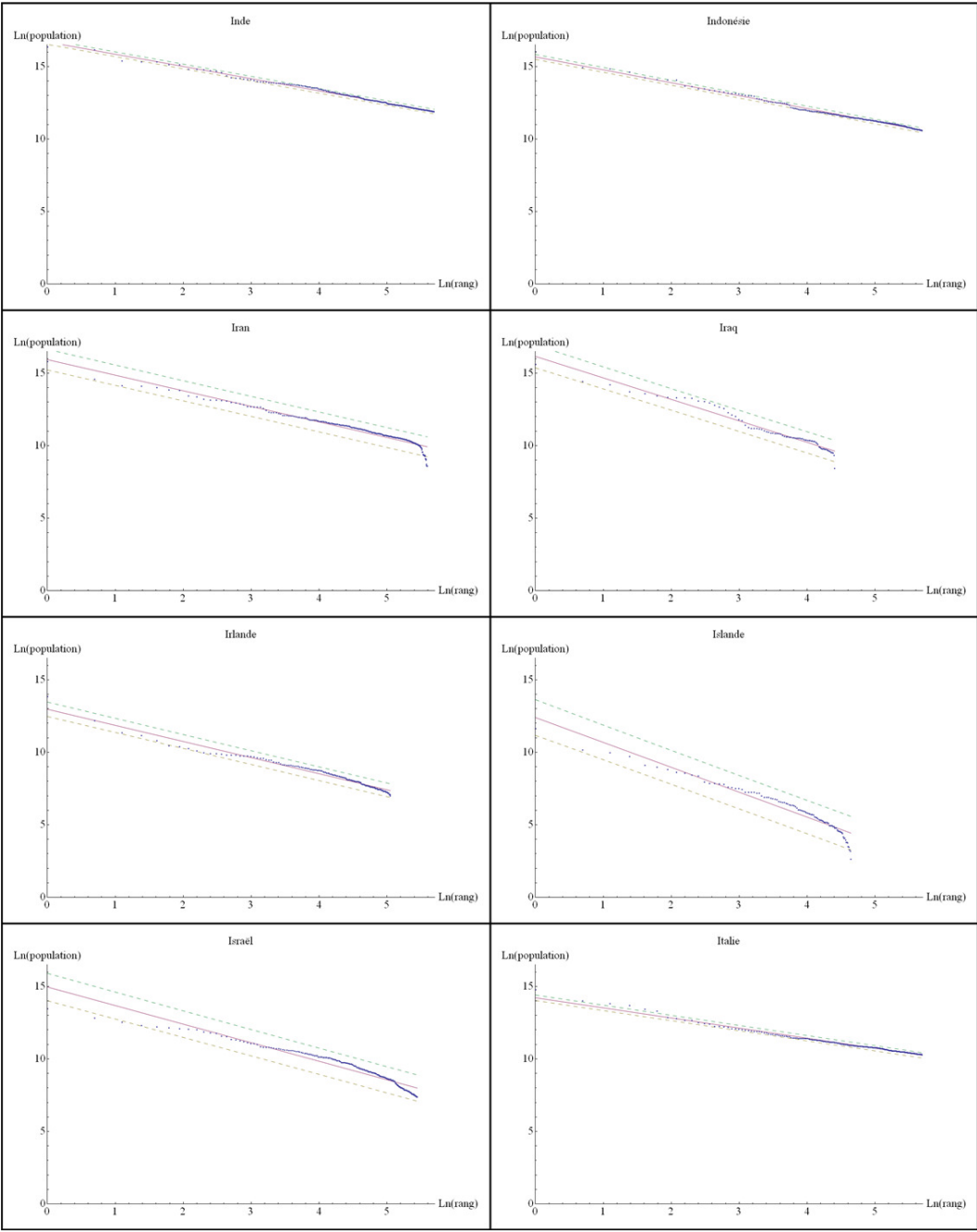


Figure 134-11. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

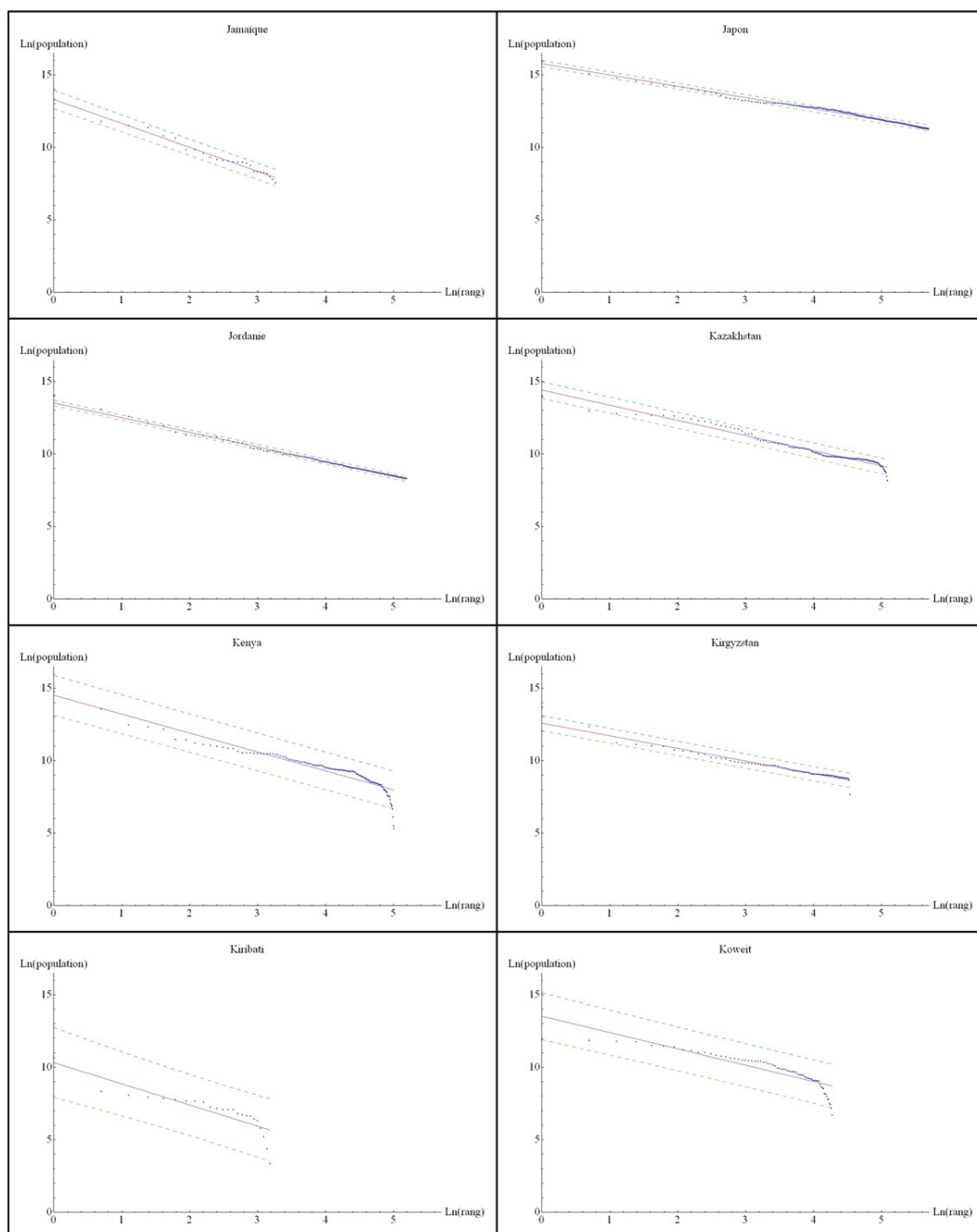


Figure 134-12. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

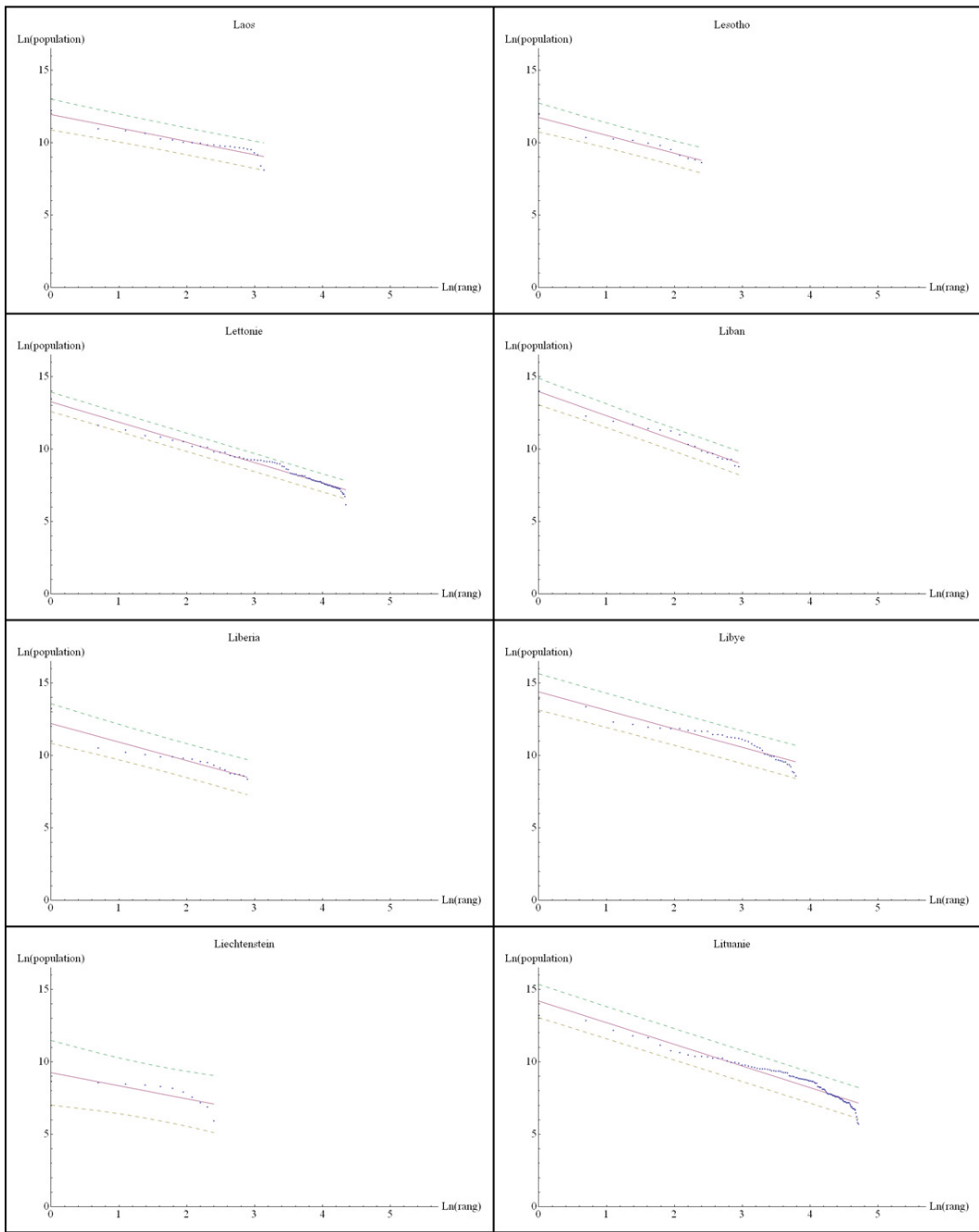


Figure 134-13. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

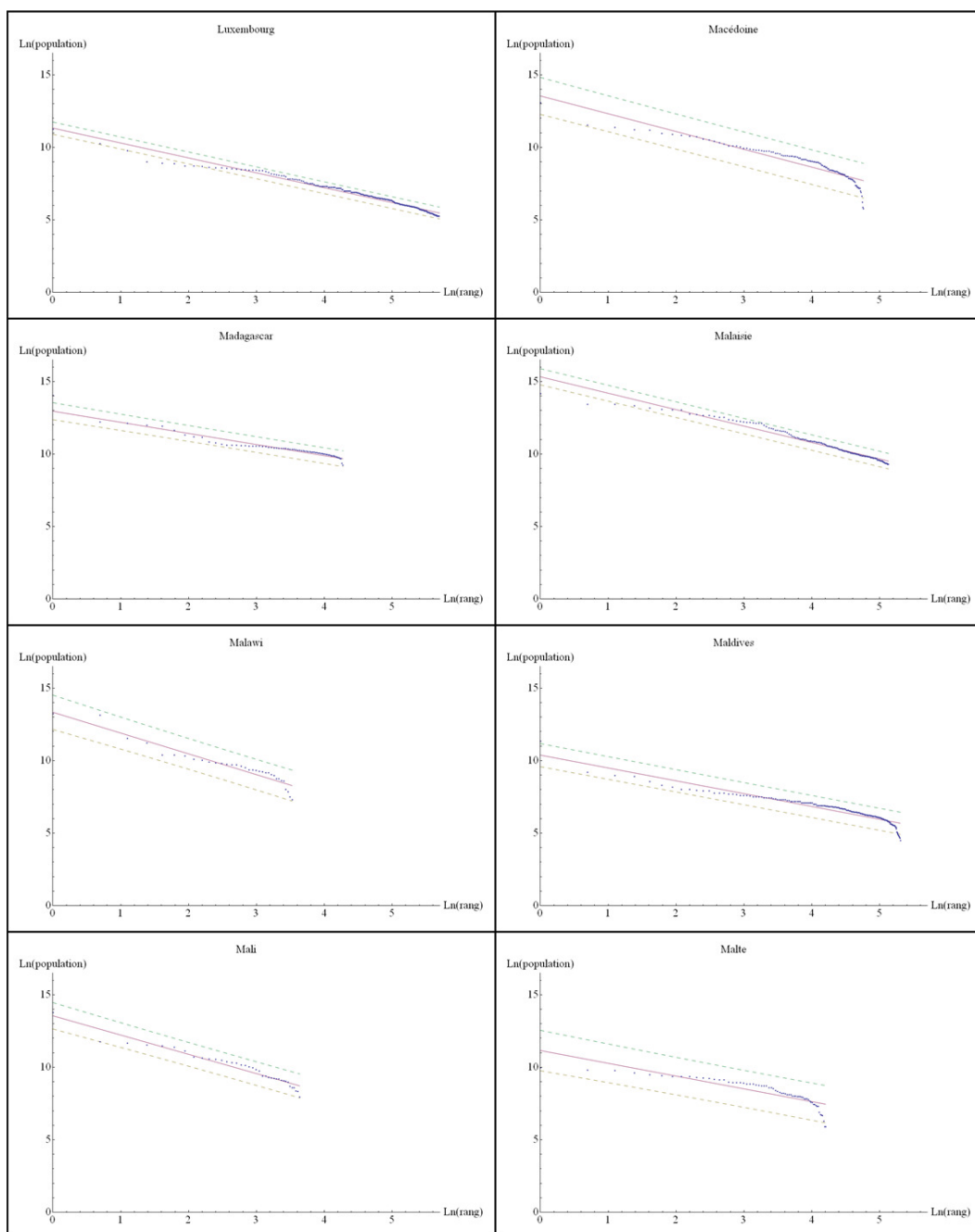


Figure 134-14. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

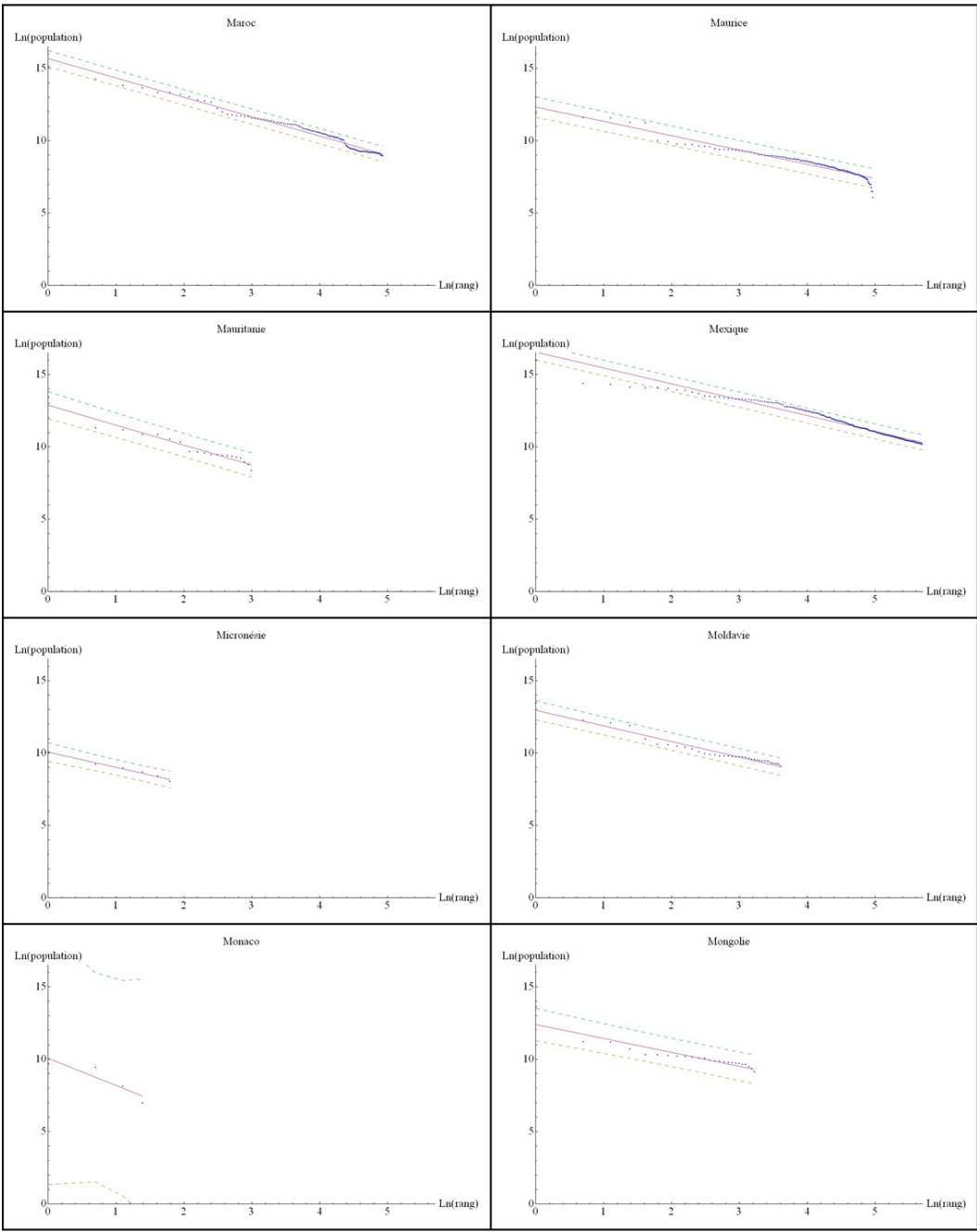


Figure 134-15. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

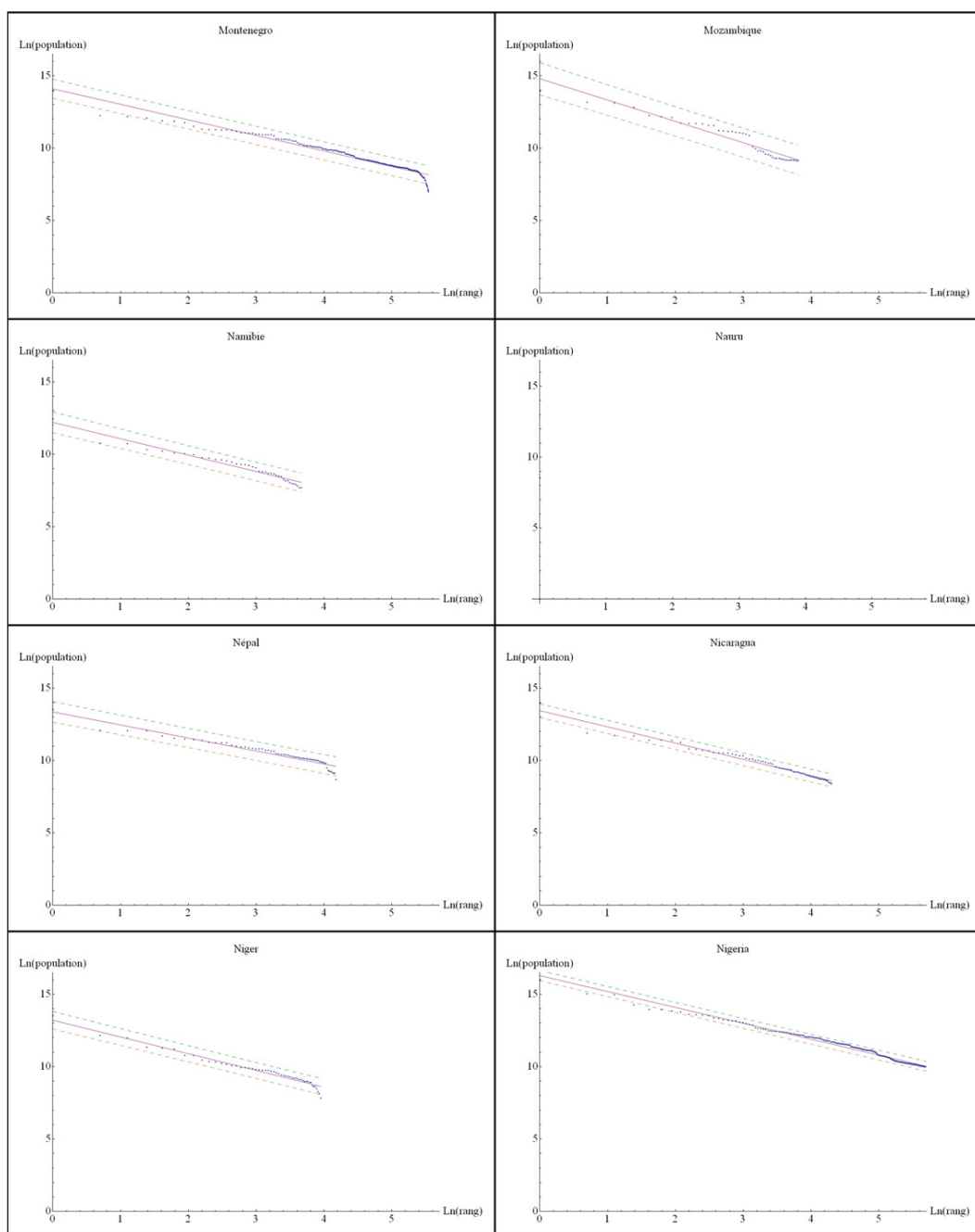


Figure 134-16. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

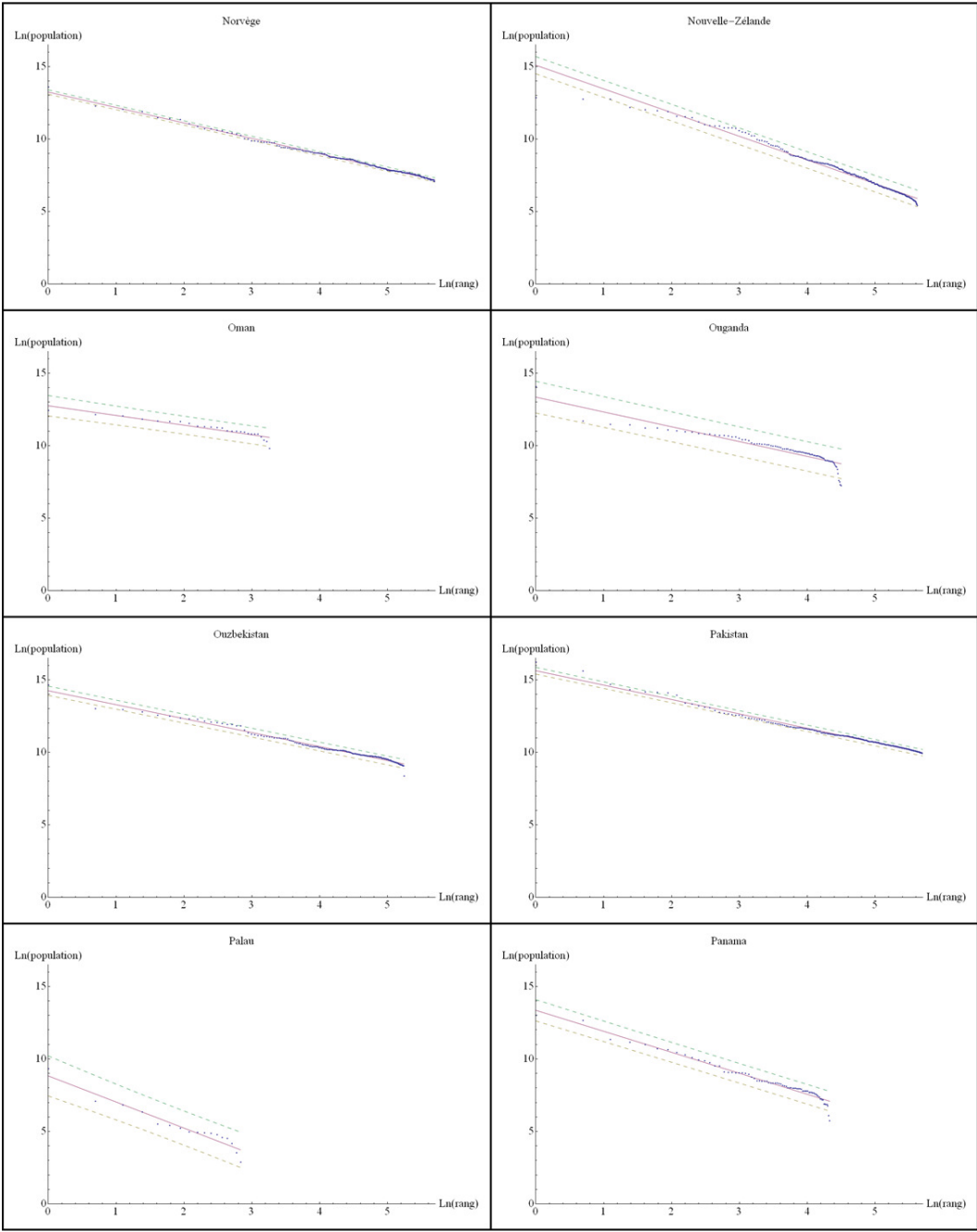


Figure 134-17. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

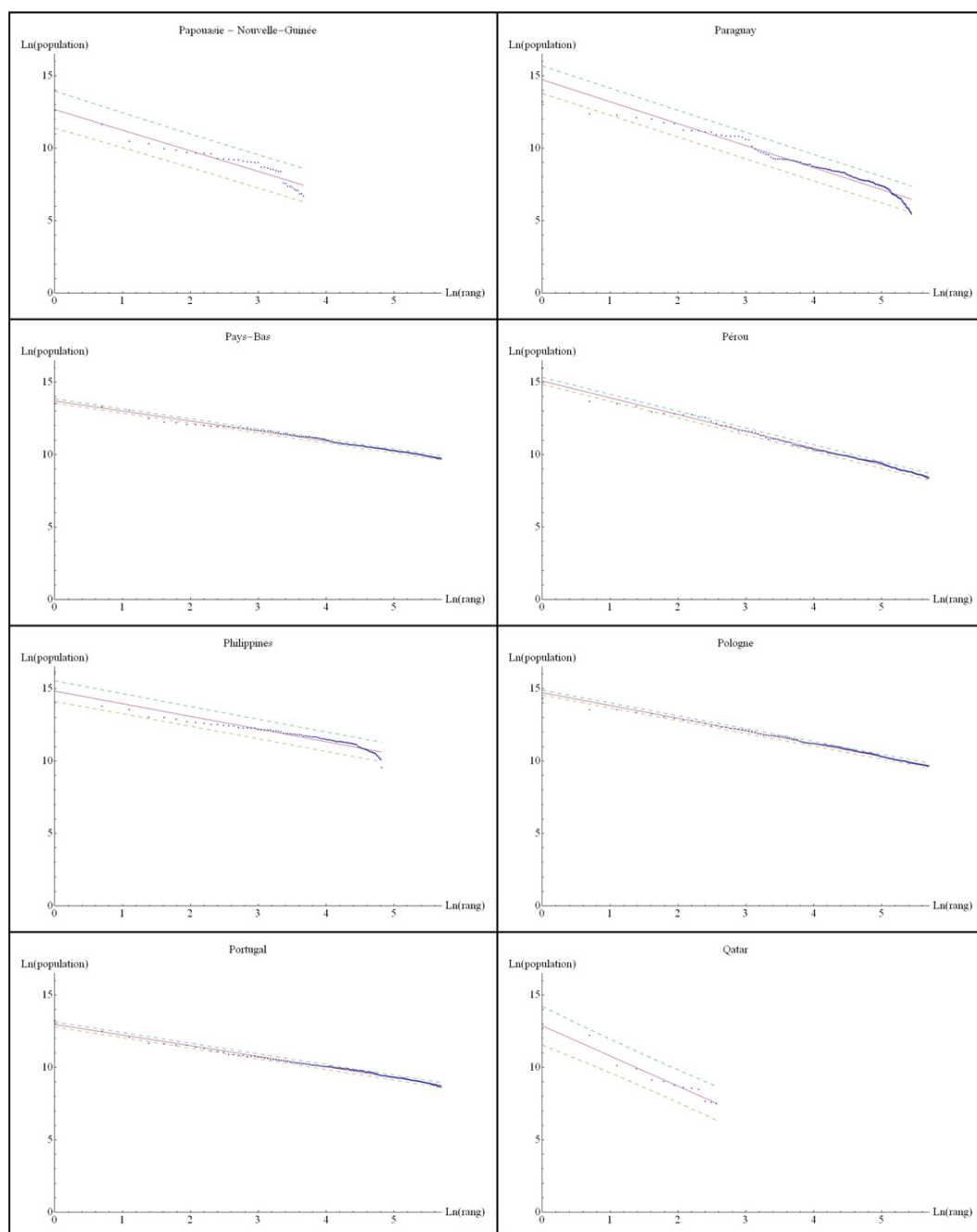


Figure 134-18. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

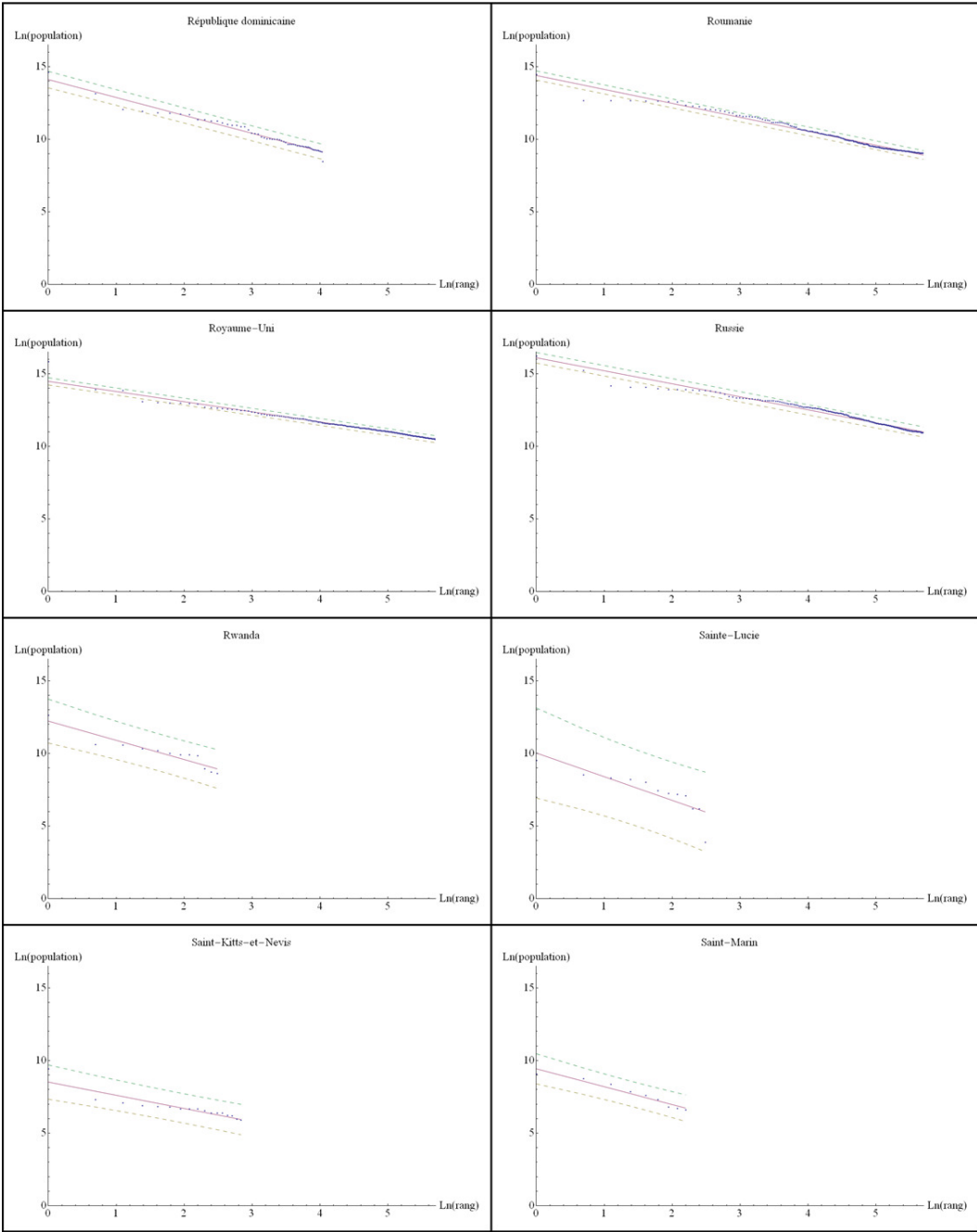


Figure 134-19. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

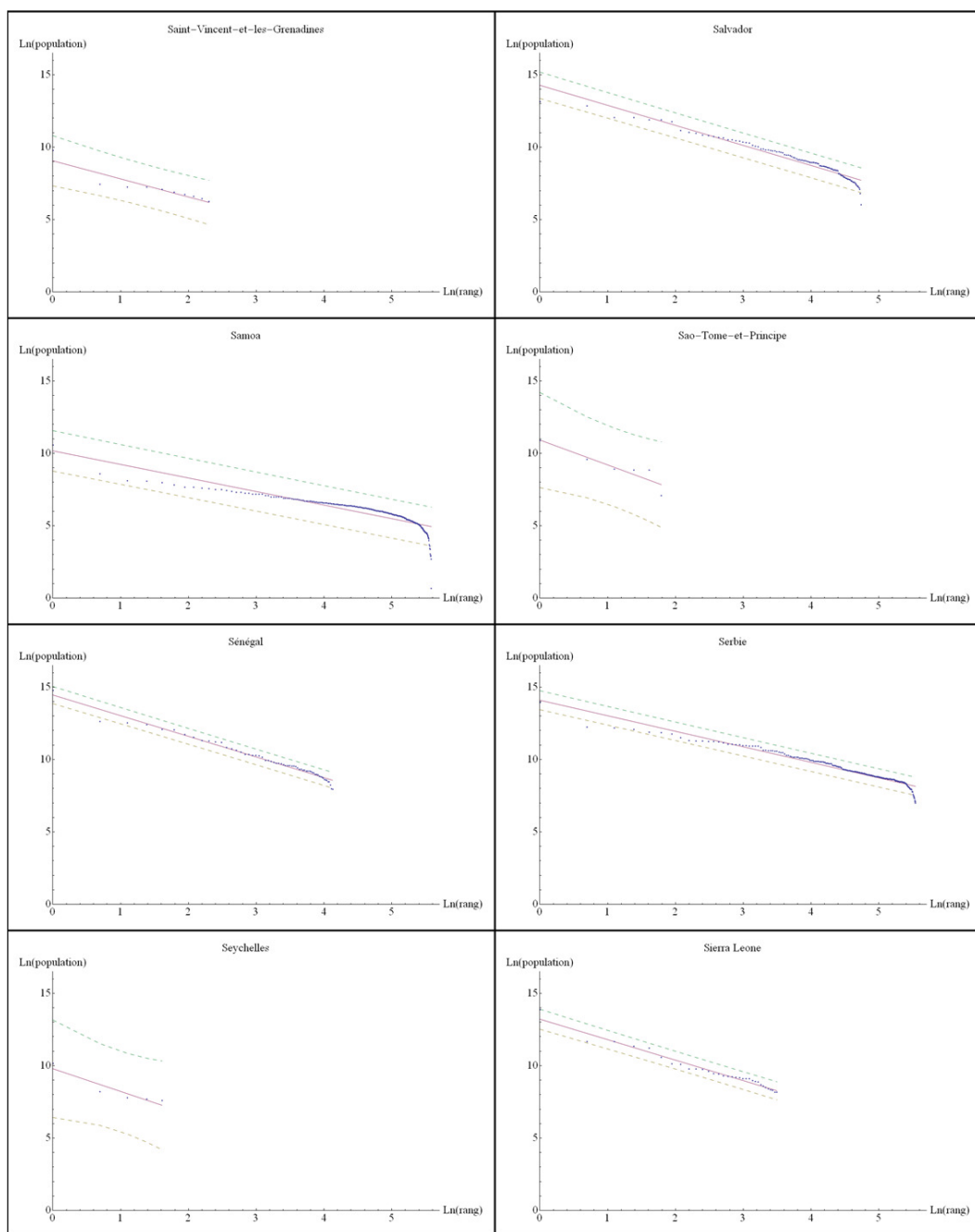


Figure 134-20. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

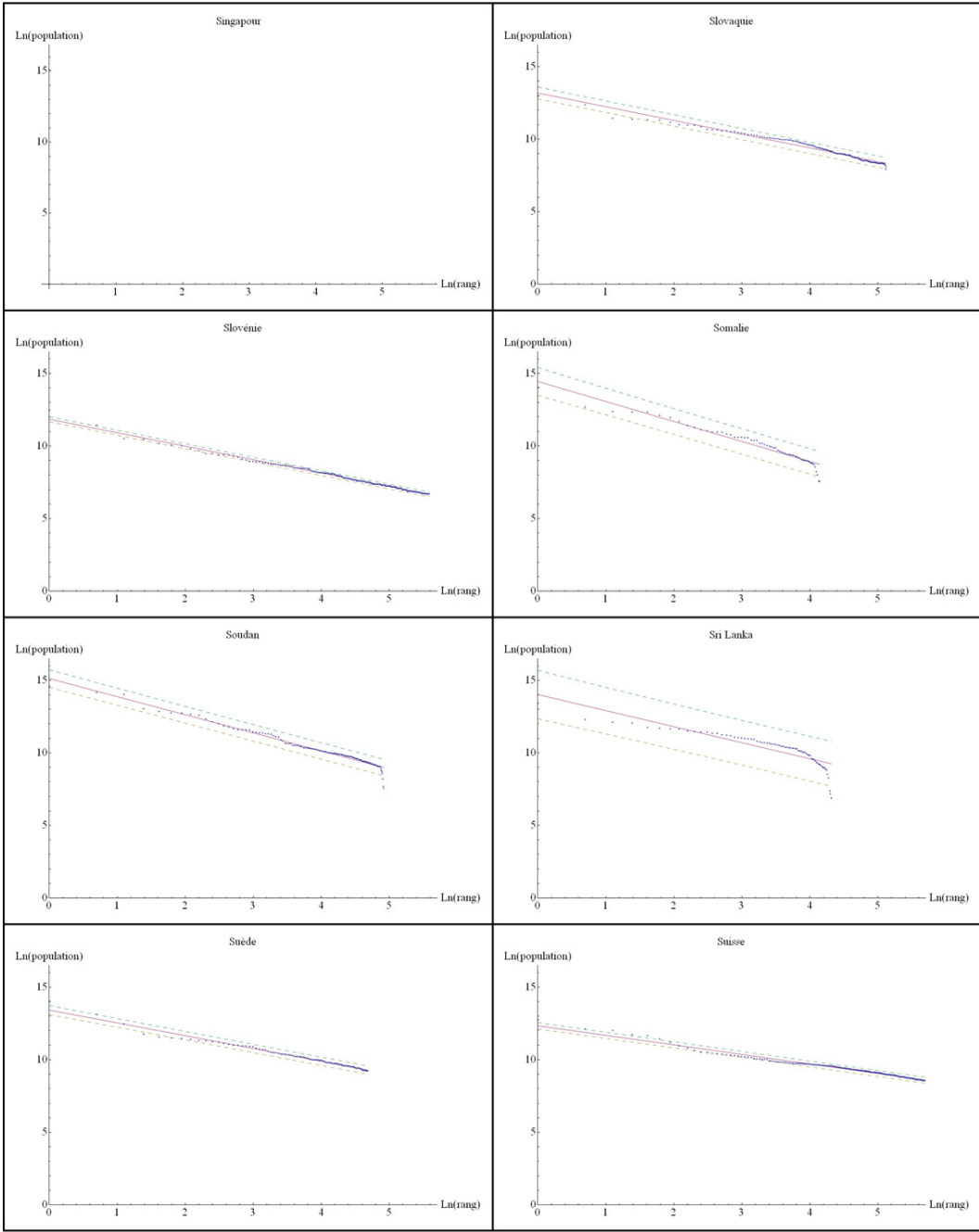


Figure 134-21. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

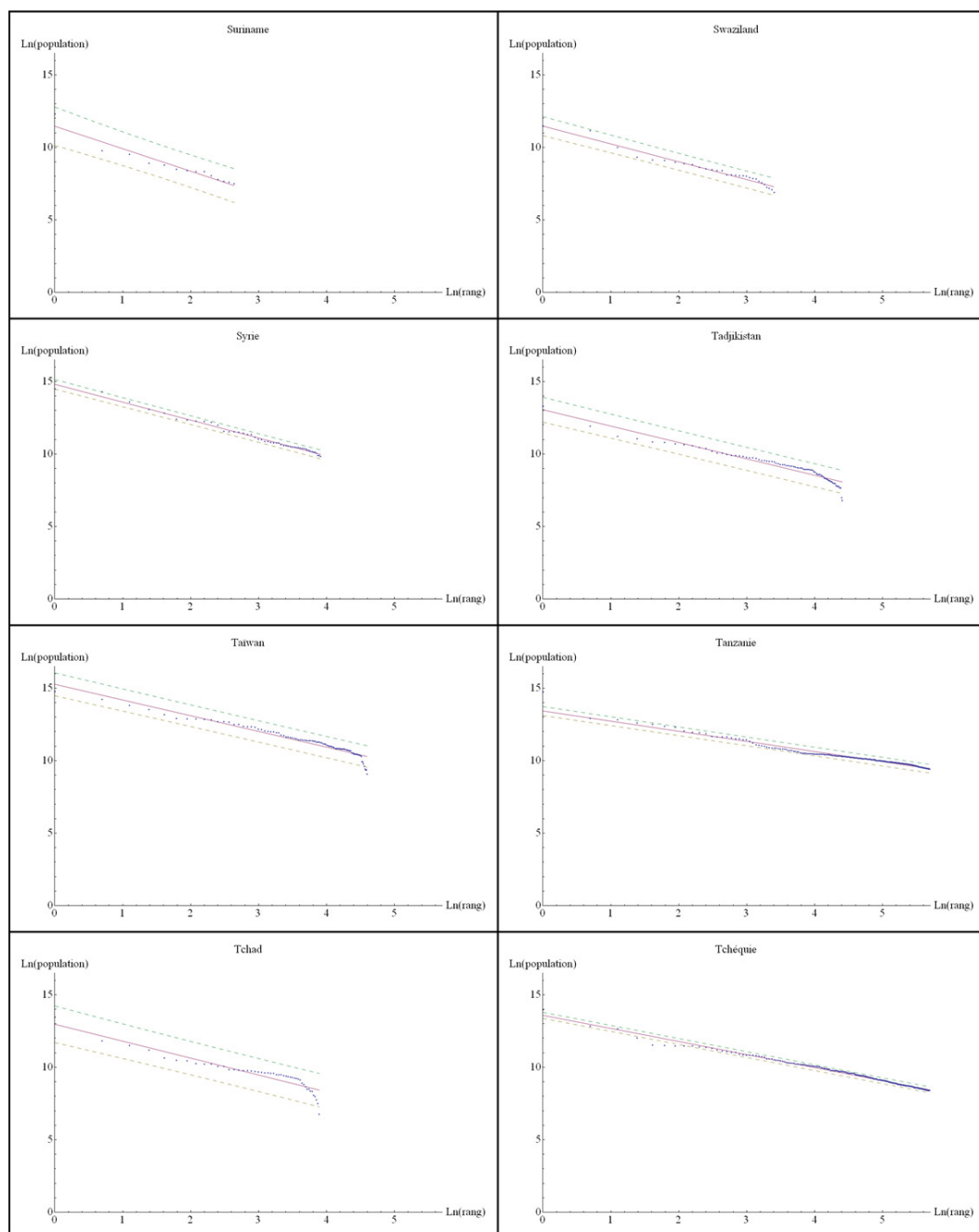


Figure 134-22. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

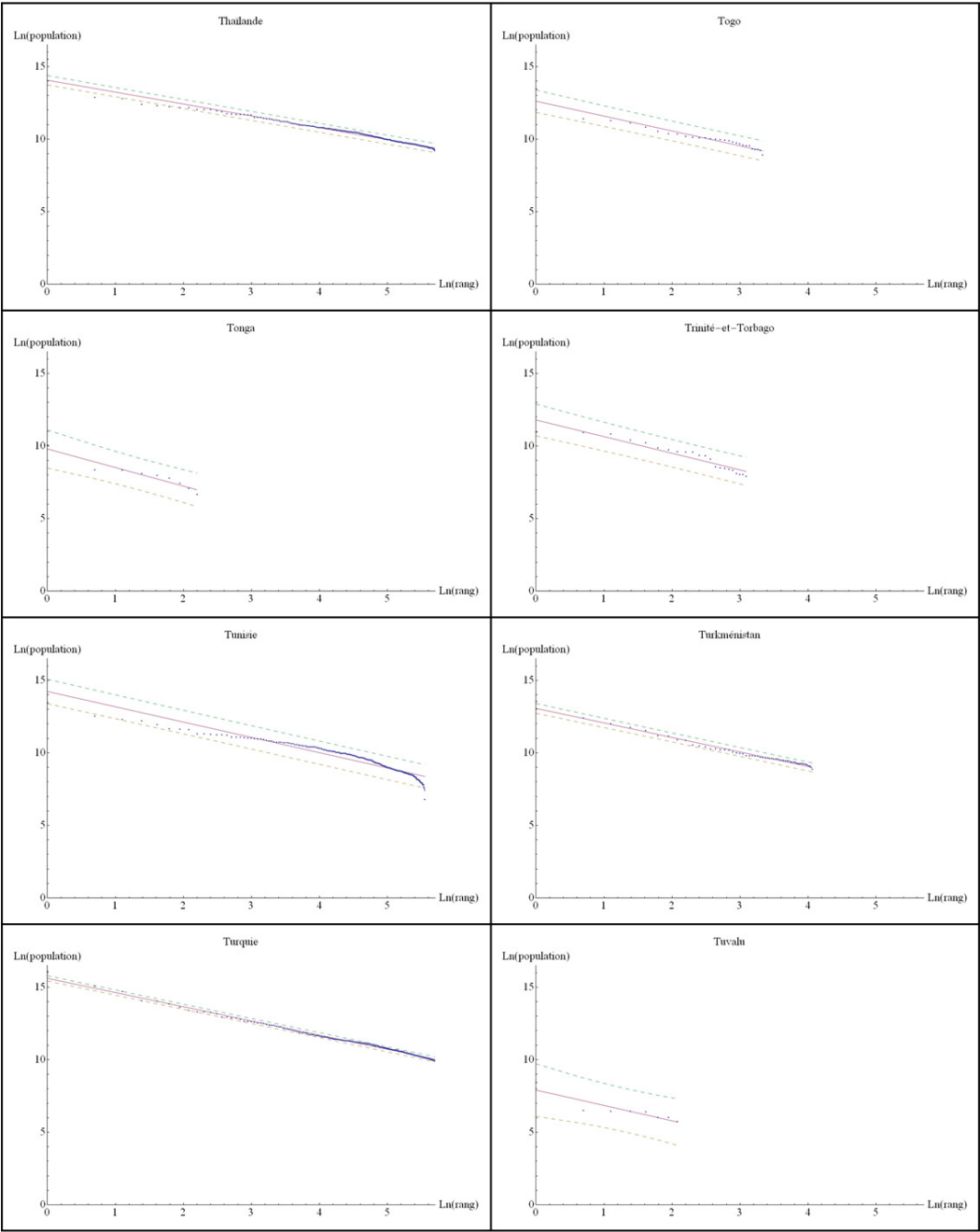


Figure 134-23. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

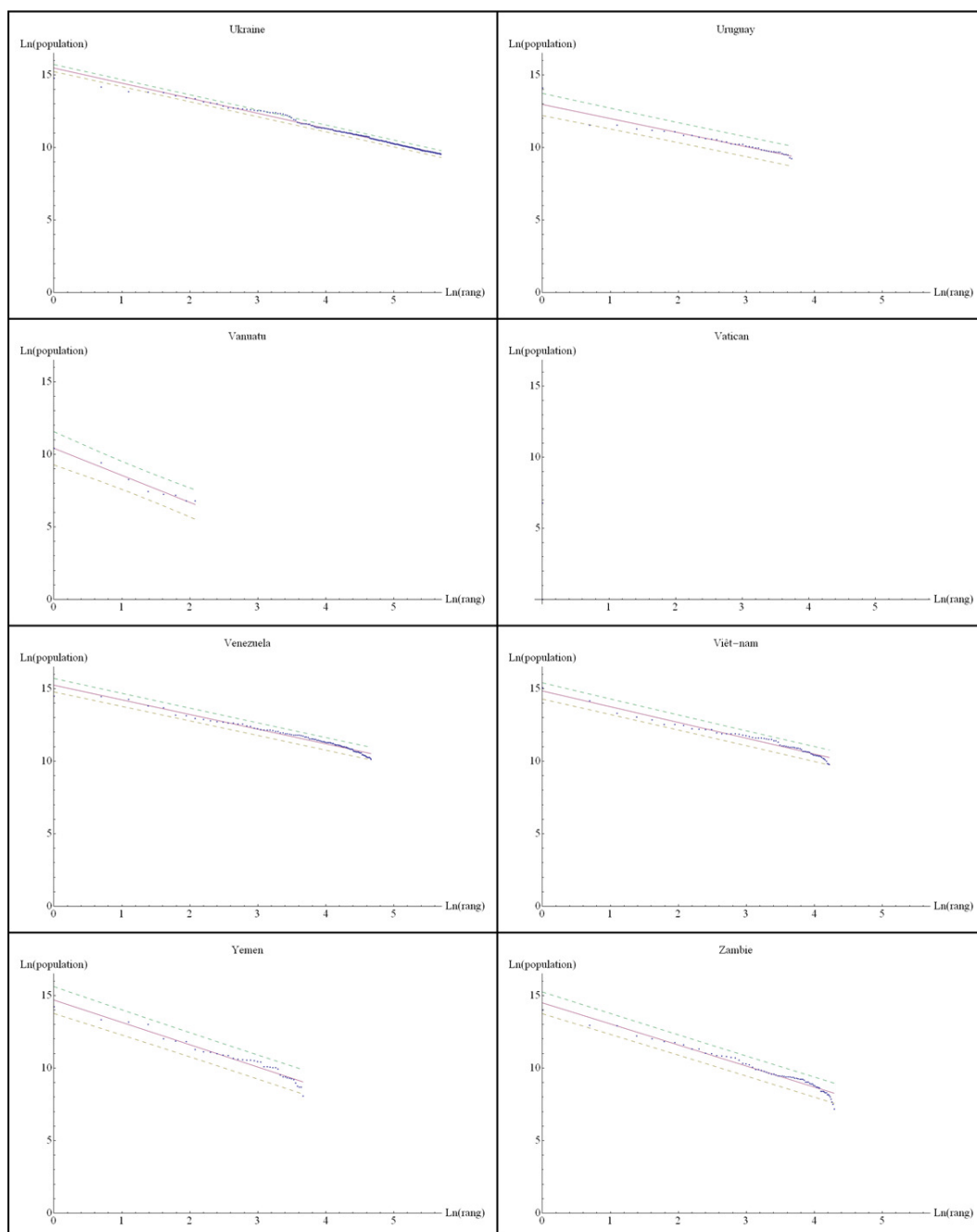


Figure 134-24. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

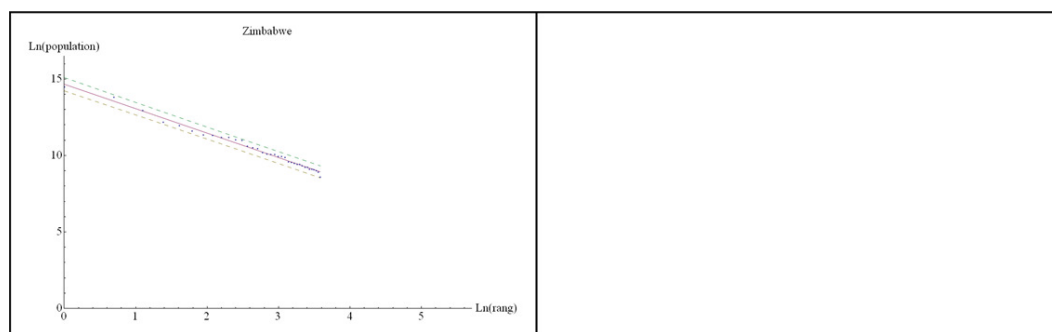


Figure 134-25. Tableau récapitulant les régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants

La Figure 134 illustre l'ensemble des régressions linéaires calculées avec leurs barres d'erreur respectives. Désormais, il est possible de réaliser une statistique sur la valeur de la pente à partir des différentes valeurs de q estimées pour chacun des 193 États (Figure 135 et Figure 136). Une nouvelle constante apparaît $q = 1,2 \pm 0,1$. Ces résultats sont-ils significatifs ? En effet, il faut préciser que la base *Tageo* permet d'évaluer la structure de son information. On sait que la population totale articulée dans les lois rang - taille vaut à peu près 2 069 530 000 habitants ; dans cette même base, on sait que la population totale du monde est évaluée à 6 689 330 000 d'habitants. Les lois présentées ne représentent alors que 31 % de la population mondiale. De plus, la signification des résultats pour chaque État dépend explicitement du nombre d'implantations connues sur son territoire (Figure 137). Dans le cas de la base *Tageo*, ce nombre correspond à l'échelon administratif le plus bas (par exemple la commune pour la France). On s'aperçoit, tout d'abord, qu'il existe des pourcentages supérieurs à 100. Cela s'explique par le fait que la population totale des différents États du monde est publiée de manière plus récurrente que la hiérarchisation de leur réseau urbain. Ce biais n'apparaît que pour des États de petites tailles comme les Bahamas, Chypre, Djibouti, le Liechtenstein, Monaco, le Monténégro ou le Vatican. Pour le reste, le taux varie entre 5 et 99 % avec une moyenne arithmétique de 55 %. Il est évident si le taux est supérieur à 80 %, ces données sont vraisemblablement de même nature que les sept États cités précédemment. Seuls vingt États correspondent à ce critère ; on y trouve : Andorre, l'Arménie, l'Australie, le Bahrein, la Belgique, le Chili, la Corée du Sud, l'Estonie, les Îles Marshall, l'Islande, Israël, le Koweït, le Luxembourg, la Macédoine, Malte, l'île Maurice, la Nouvelle-Zélande, les Pays-Bas, Saint-Marin et les îles Samoa. Tous ces États ont pour particularité d'avoir un territoire exigu, ce qui explique le taux très élevé par rapport à la moyenne, même si le non renouvellement des données peut également être une explication. Pour les trente-huit États dont le taux est entre 5 et 25 %, cela est dû réellement, pour la plupart, à une non publication des données, comme en Chine ainsi que dans de nombreux pays d'Afrique par exemple. Ces critiques formulées, il reste tout de même 127 États dont le taux varie entre 25 et 80 % qui doivent comporter des données suffisamment significatives pour ne pas invalider la loi rang - taille estimée, soit 65 % de la base *Tageo*.

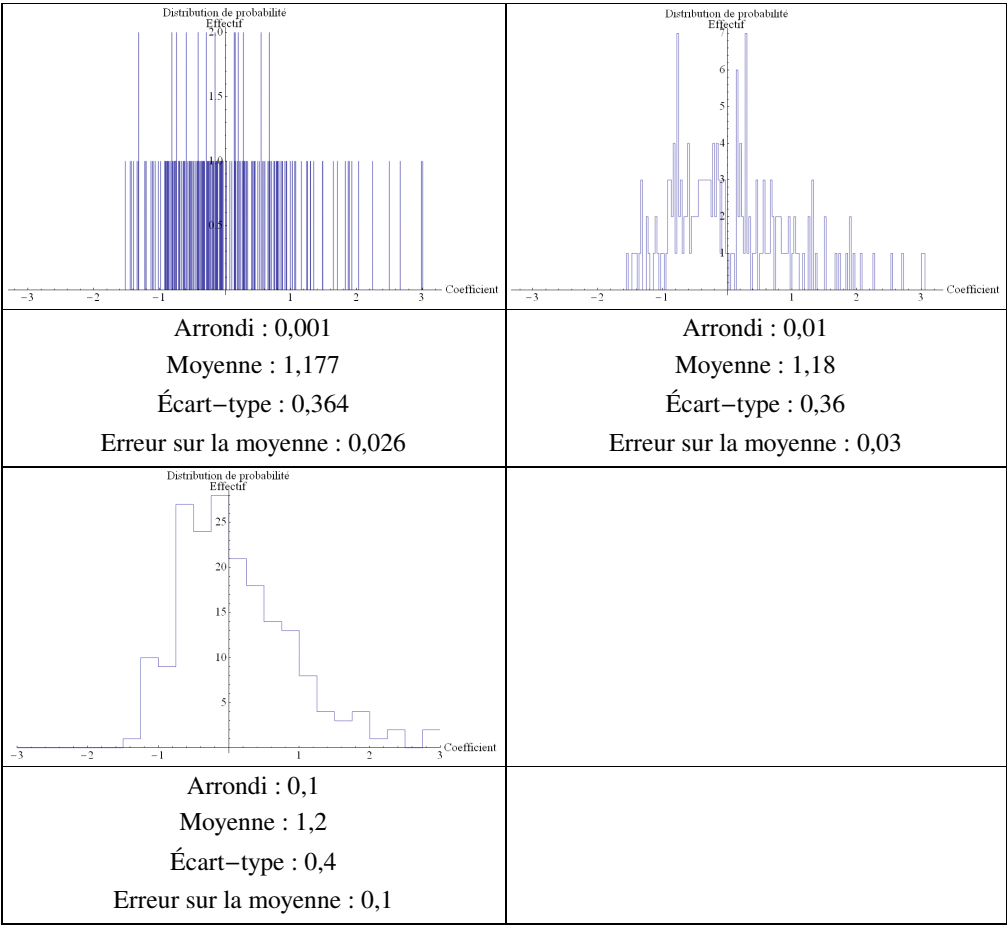


Figure 135. Statistique de la pente q centrée et réduite

État	Pente	Erreur sur la pente	t de Student de la pente	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Afghanistan	-1.115	0.028	-40.483	14.143	0.107	131.588
Afrique du Sud	-1.491	0.037	-40.332	16.921	0.177	95.525
Albanie	-1.368	0.059	-23.112	13.462	0.2	67.451
Algérie	-0.807	0.011	-76.655	14.303	0.051	282.183
Allemagne	-0.789	0.003	-255.014	14.985	0.015	1006.47
Andorre	-1.05	0.192	-5.481	10.223	0.263	38.851
Angola	-1.264	0.048	-26.394	13.735	0.134	102.708
Antigua-et-Barbuda	-1.136	0.133	-8.529	9.454	0.267	35.344
Arabie Saoudite	-1.295	0.021	-62.401	15.527	0.065	240.227
Argentine	-1.185	0.024	-49.992	15.738	0.086	184.002
Arménie	-0.846	0.008	-105.838	12.066	0.038	313.707
Australie	-1.339	0.023	-57.048	15.519	0.105	147.692
Autriche	-0.739	0.01	-73.946	12.423	0.048	260.59
Azerbaïdjan	-1.343	0.048	-27.7	14.595	0.213	68.466
Bahamas	-2.272	0.14	-16.252	12.247	0.339	36.153
Bahrain	-0.953	0.118	-8.097	12.205	0.205	59.498
Bangladesh	-0.904	0.012	-77.541	14.686	0.049	300.913
Barbade	-1.859	0.238	-7.827	10.378	0.414	25.076
Belgique	-0.624	0.005	-114.205	12.863	0.026	489.147
Belize	-1.02	0.092	-11.096	10.707	0.145	73.928
Bénin	-1.257	0.053	-23.902	13.914	0.143	97.54
Bhoutan	-1.508	0.066	-22.85	11.408	0.149	76.49
Biélorussie	-1.282	0.023	-56.71	14.692	0.085	172.339
Birmanie	-0.92	0.048	-18.998	14.202	0.163	87.005
Bolivie	-1.391	0.016	-87.353	14.386	0.064	223.967
Bosnie-Herzégovine	-0.775	0.01	-79.395	12.178	0.045	273.368
Botswana	-0.999	0.006	-159.063	12.334	0.03	408.017
Brésil	-0.85	0.004	-226.033	16.154	0.018	891.99
Brunei	-1.651	0.475	-3.473	11.474	0.529	21.678
Bulgarie	-1.227	0.017	-71.968	14.437	0.078	184.145
Burkina Faso	-1.203	0.059	-20.317	13.116	0.186	70.659
Burundi	-1.236	0.094	-13.084	12.312	0.19	64.935
Cambodge	-1.549	0.065	-23.984	13.746	0.156	87.844
Cameroun	-1.214	0.035	-34.564	14.798	0.128	116.002
Canada	-1.25	0.003	-394.482	15.747	0.015	1032.65
Cap Vert	-1.518	0.128	-11.846	11.654	0.271	42.966
Chili	-1.152	0.021	-54.673	15.224	0.101	150.147
Chine	-0.857	0.009	-95.552	16.952	0.043	392.494
Chypre	-1.42	0.015	-93.863	13.046	0.073	179.149

Figure 136-1. Tableau récapitulant l'ensemble des pentes q et des ordonnées estimées

État	Pente	Erreur sur la pente	t de Student de la pente	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Vatican	0.	0.	0.	0.	0.	0.
Colombie	-1.15	0.004	-257.972	15.782	0.021	735.419
Comores	-0.897	0.059	-15.164	11.046	0.066	167.673
Congo	-1.776	0.074	-23.993	13.818	0.197	70.3
Congo Zaïre	-1.285	0.017	-75.722	15.543	0.067	231.3
Corée du Nord	-1.056	0.1	-10.532	14.71	0.201	73.057
Corée du Sud	-1.358	0.013	-103.512	16.669	0.053	314.583
Costa Rica	-1.075	0.039	-27.85	13.407	0.173	77.389
Côte d'Ivoire	-1.089	0.031	-34.961	14.292	0.11	130.501
Croatie	-0.949	0.004	-219.68	12.733	0.021	612.522
Cuba	-1.162	0.032	-36.23	14.76	0.131	112.496
Danemark	-0.982	0.005	-195.738	13.204	0.024	546.664
Djibouti	-2.378	0.417	-5.701	12.905	0.464	27.784
Dominique	-1.106	0.086	-12.789	9.703	0.203	47.855
Égypte	-1.036	0.013	-77.601	15.367	0.059	261.761
Émirats Arabes Unis	-1.649	0.232	-7.108	14.329	0.366	39.187
Équateur	-1.25	0.015	-81.691	14.618	0.06	245.367
Érythrée	-1.274	0.084	-15.241	12.229	0.181	67.494
Espagne	-0.852	0.005	-180.455	14.895	0.023	655.235
Estonie	-1.121	0.007	-164.766	12.075	0.033	368.771
États-Unis	-0.732	0.003	-265.047	15.577	0.013	1171.81
Éthiopie	-0.908	0.016	-58.134	13.62	0.064	213.663
Fiji	-2.147	0.165	-13.032	13.046	0.393	33.198
Finlande	-0.9	0.014	-62.832	13.301	0.054	245.572
France	-0.651	0.003	-196.547	13.836	0.016	868.008
Gabon	-1.468	0.052	-28.098	12.774	0.145	88.366
Gambie	-1.292	0.035	-36.643	12.357	0.08	155.024
Georgie	-1.422	0.06	-23.65	13.963	0.233	59.884
Ghana	-1.104	0.031	-36.143	14.068	0.107	131.94
Grèce	-1.027	0.014	-74.491	14.282	0.066	215.133
Grenade	-0.86	0.133	-6.475	8.561	0.182	46.922
Guatemala	-1.03	0.015	-70.631	13.85	0.07	197.287
Guinée	-1.464	0.073	-20.102	13.815	0.207	66.746
Guinée équatoriale	-1.994	0.134	-14.871	12.028	0.277	43.471
Guinée-Bissau	-1.278	0.216	-5.911	11.538	0.421	27.394
Guyana	-1.917	0.047	-40.904	12.459	0.139	89.9
Haïti	-1.562	0.034	-46.102	14.064	0.096	146.018
Honduras	-0.96	0.006	-161.489	12.705	0.029	443.943
Hongrie	-0.864	0.005	-167.626	13.443	0.025	541.617

Figure 136-2. Tableau récapitulant l'ensemble des pentes q et des ordonnées estimées

État	Pente	Erreur sur la pente	t de Student de la pente	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Îles Marshall	-1.843	0.064	-28.99	11.355	0.267	42.488
Îles Solomon	-2.265	0.151	-14.993	10.794	0.238	45.343
Inde	-0.842	0.004	-229.856	16.689	0.018	946.734
Indonésie	-0.889	0.004	-232.288	15.66	0.018	850.279
Iraq	-1.481	0.033	-44.478	16.153	0.119	136.121
Iran	-1.074	0.017	-64.052	15.932	0.079	202.011
Irlande	-1.111	0.015	-72.65	12.968	0.064	202.882
Islande	-1.716	0.046	-37.168	12.397	0.175	70.858
Israël	-1.28	0.024	-53.712	14.959	0.109	137.586
Italie	-0.696	0.004	-164.55	14.218	0.02	697.821
Jamaïque	-1.65	0.047	-35.326	13.303	0.117	114.105
Japon	-0.778	0.005	-162.54	15.767	0.023	684.634
Jordanie	-1.01	0.005	-188.558	13.518	0.023	585.216
Kazakhstan	-1.045	0.017	-60.82	14.41	0.072	198.906
Kenya	-1.302	0.043	-30.202	14.505	0.178	81.341
Kirgystan	-0.871	0.021	-41.733	12.584	0.077	163.783
Kiribati	-1.46	0.184	-7.945	10.319	0.445	23.168
Koweït	-1.125	0.073	-15.496	13.52	0.25	54.107
Laos	-0.924	0.083	-11.195	11.94	0.197	60.644
Lesotho	-1.233	0.105	-11.734	11.735	0.183	64.108
Lettonie	-1.397	0.029	-47.681	13.255	0.103	129.135
Liban	-1.668	0.077	-21.549	13.962	0.171	81.433
Liberia	-1.281	0.118	-10.824	12.204	0.256	47.6
Libye	-1.275	0.071	-17.833	14.386	0.213	67.575
Liechtenstein	-0.901	0.234	-3.851	9.25	0.408	22.695
Lituanie	-1.495	0.041	-36.032	14.197	0.16	88.822
Luxembourg	-1.027	0.009	-109.646	11.326	0.045	251.253
Macédoine	-1.227	0.045	-27.223	13.546	0.176	77.029
Madagascar	-0.766	0.026	-29.066	12.952	0.091	142.848
Malaisie	-1.133	0.017	-68.659	15.325	0.07	218.094
Malawi	-1.434	0.077	-18.737	13.334	0.21	63.61
Maldives	-0.885	0.022	-40.987	10.38	0.096	108.682
Mali	-1.328	0.056	-23.84	13.55	0.158	85.573
Malte	-0.881	0.065	-13.593	11.155	0.218	51.067
Maroc	-1.336	0.018	-73.857	15.664	0.073	213.169
Maurice	-0.987	0.022	-43.94	12.322	0.092	133.865
Mauritanie	-1.376	0.077	-17.778	12.874	0.175	73.601
Mexique	-1.095	0.012	-91.15	16.542	0.058	286.046
Micronésie	-1.055	0.072	-14.707	10.063	0.09	112.008

Figure 136-3. Tableau récapitulant l'ensemble des pentes q et des ordonnées estimées

État	Pente	Erreur sur la pente	t de Student de la pente	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Moldavie	-1.078	0.041	-26.112	12.95	0.116	111.329
Monaco	-1.879	0.623	-3.017	10.06	0.592	17.008
Mongolie	-0.962	0.084	-11.509	12.394	0.206	60.303
Montenegro	-1.073	0.016	-67.971	14.095	0.073	191.846
Mozambique	-1.471	0.063	-23.304	14.786	0.189	78.127
Namibie	-1.131	0.043	-26.095	12.205	0.124	98.207
Nauru	0.	0.	0.	0.	0.	0.
Népal	-0.899	0.034	-26.802	13.35	0.112	118.993
Nicaragua	-1.121	0.021	-53.41	13.439	0.073	184.724
Niger	-1.155	0.032	-36.08	13.2	0.1	131.563
Nigeria	-1.097	0.008	-140.583	16.281	0.038	433.388
Norvège	-1.063	0.003	-314.122	13.237	0.016	812.442
Nouvelle-Zélande	-1.634	0.014	-119.596	15.091	0.065	233.346
Oman	-0.669	0.052	-12.933	12.753	0.129	98.862
Ouganda	-1.021	0.044	-23.175	13.347	0.161	82.919
Ouzbekistan	-0.962	0.009	-108.011	14.245	0.039	366.423
Pakistan	-0.992	0.005	-193.598	15.624	0.025	633.605
Palau	-1.798	0.122	-14.69	8.829	0.259	34.077
Panama	-1.447	0.032	-45.045	13.353	0.112	119.038
Papouasie – Nouvelle-Guinée	-1.422	0.078	-18.323	12.664	0.222	56.928
Paraguay	-1.515	0.024	-62.905	14.72	0.11	134.157
Pays-Bas	-0.689	0.003	-208.503	13.701	0.016	861.008
Pérou	-1.158	0.005	-215.543	15.08	0.026	582.938
Philippines	-0.872	0.025	-35.388	14.825	0.097	152.233
Pologne	-0.882	0.004	-229.76	14.716	0.018	796.077
Portugal	-0.733	0.004	-186.398	12.966	0.019	684.795
Qatar	-2.086	0.131	-15.888	12.875	0.247	52.046
Centrafrique	-0.919	0.041	-22.481	12.528	0.121	103.601
République dominicaine	-1.233	0.029	-43.103	14.107	0.092	153.176
Roumanie	-0.961	0.007	-137.536	14.391	0.034	427.938
Royaume-Uni	-0.698	0.005	-127.529	14.473	0.026	549.355
Russie	-0.896	0.008	-110.372	16.098	0.039	411.823
Rwanda	-1.323	0.154	-8.587	12.226	0.28	43.7
Saint-Kitts-et-Nevis	-0.908	0.105	-8.669	8.516	0.222	38.425
Saint-Marin	-1.231	0.115	-10.705	9.43	0.181	52.026
Saint-Vincent-et-les-Grenadines	-1.249	0.187	-6.663	9.059	0.312	29.061
Sainte-Lucie	-1.629	0.316	-5.156	10.029	0.574	17.474
Salvador	-1.383	0.033	-42.469	14.272	0.126	112.995
Samoa	-0.936	0.033	-28.463	10.171	0.154	65.84

Figure 136-4. Tableau récapitulant l'ensemble des pentes q et des ordonnées estimées

État	Pente	Erreur sur la pente	t de Student de la pente	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Sao-Tomé-et-Principe	-1.718	0.367	-4.675	10.918	0.46	23.724
Sénégal	-1.426	0.028	-50.062	14.453	0.094	153.795
Serbie	-1.073	0.016	-67.971	14.095	0.073	191.846
Seychelles	-1.568	0.341	-4.6	9.79	0.38	25.789
Sierra Leone	-1.414	0.045	-31.239	13.211	0.123	107.634
Singapour	0.	0.	0.	0.	0.	0.
Slovaquie	-0.945	0.012	-78.093	13.179	0.051	256.487
Slovénie	-0.926	0.004	-227.74	11.839	0.019	619.506
Somalie	-1.376	0.046	-29.984	14.442	0.152	94.929
Soudan	-1.246	0.02	-63.434	15.118	0.08	189.799
Sri Lanka	-1.105	0.073	-15.034	14.015	0.256	54.819
Suède	-0.882	0.011	-78.109	13.42	0.043	310.749
Suisse	-0.658	0.005	-137.9	12.339	0.023	537.524
Suriname	-1.55	0.127	-12.206	11.458	0.247	46.331
Swaziland	-1.229	0.045	-27.172	11.467	0.119	96.585
Syrie	-1.235	0.018	-69.88	14.808	0.055	270.609
Tadjikistan	-1.129	0.036	-31.208	13.054	0.129	101.247
Taïwan	-1.082	0.03	-35.715	15.264	0.113	134.546
Tanzanie	-0.698	0.007	-101.838	13.422	0.033	406.778
Tchad	-1.166	0.068	-17.093	12.966	0.21	61.727
Tchéquie	-0.902	0.005	-193.79	13.582	0.022	606.493
Thaïlande	-0.819	0.007	-114.646	14.059	0.034	408.86
Togo	-1.023	0.055	-18.702	12.612	0.14	89.941
Tonga	-1.278	0.146	-8.758	9.795	0.23	42.61
Trinité-et-Torbago	-1.146	0.086	-13.247	11.792	0.203	58.139
Tunisie	-1.054	0.02	-52.545	14.23	0.094	152.12
Turkménistan	-1.001	0.017	-59.82	13.066	0.054	241.232
Turquie	-0.978	0.004	-242.556	15.606	0.019	804.242
Tuvalu	-1.059	0.205	-5.175	7.911	0.303	26.127
Ukraine	-1.039	0.005	-191.197	15.471	0.026	591.231
Uruguay	-0.97	0.046	-20.952	12.963	0.133	97.644
Vanuatu	-1.865	0.13	-14.357	10.416	0.192	54.195
Venezuela	-1.011	0.017	-58.664	15.24	0.066	232.224
Viêt-nam	-1.086	0.026	-42.01	14.84	0.088	169.537
Yemen	-1.538	0.056	-27.448	14.685	0.161	91.416
Zambie	-1.451	0.033	-43.352	14.492	0.116	125.421
Zimbabwe	-1.599	0.027	-58.379	14.66	0.076	191.732

Figure 136-5. Tableau récapitulant l'ensemble des pentes q et des ordonnées estimées

État	Population totale de la loi rang-taille	Population totale	Rapport en %
Afghanistan	6 359 700	32 738 376	19
Afrique du Sud	24 748 890	48 782 756	51
Albanie	1 426 888	3 619 778	39
Algérie	16 885 300	33 769 668	50
Allemagne	37 308 000	82 369 552	45
Andorre	67 600	82 627	82
Angola	3 871 500	12 531 357	31
Antigua-et-Barbuda	44 289	84 522	52
Arabie Saoudite	14 976 300	28 146 656	53
Argentine	27 785 600	40 677 350	68
Arménie	2 628 400	2 968 589	89
Australie	18 164 577	21 007 310	86
Autriche	4 731 500	8 205 533	58
Azerbaïdjan	4 178 606	8 177 717	51
Bahamas	312 652	307 451	102
Bahrain	618 100	718 306	86
Bangladesh	21 830 400	153 546 896	14
Barbade	112 604	281 968	40
Belgique	8 684 900	10 403 951	83
Belize	129 800	301 270	43
Bénin	2 867 900	8 532 547	34
Bhoutan	197 900	682 321	29
Biélorussie	6 444 400	9 685 768	67
Birmanie	10 971 000	47 758 180	23
Bolivie	5 536 800	9 247 816	60
Bosnie-Herzégovine	2 751 900	4 590 310	60
Botswana	1 450 646	1 842 323	79
Brésil	96 893 900	196 342 592	49
Brunei	154 100	381 371	40
Bulgarie	5 186 381	7 262 675	71
Burkina Faso	2 112 500	15 264 735	14
Burundi	656 200	8 691 005	8
Cambodge	2 070 800	14 241 640	15
Cameroun	7 637 400	18 467 692	41
Canada	23 378 800	33 212 696	70
Cap Vert	247 096	426 998	58
Chili	15 141 900	16 454 143	92
Chine	193 511 700	1 330 044 544	15
Chypre	870 824	792 604	110

Figure 137-1. Comparaison entre la population totale de la loi rang - taille et de la population totale respective

État	Population totale de la loi rang-taille	Population totale	Rapport en %
Vatican	878	824	107
Colombie	29 867 900	45 013 672	66
Comores	152 900	731 775	21
Congo	2 218 300	3 903 318	57
Congo Zaïre	17 639 200	66 514 504	27
Corée du Nord	7 815 300	23 479 088	33
Corée du Sud	38 903 800	48 379 392	80
Costa Rica	2 488 675	4 195 914	59
Côte d'Ivoire	8 057 900	20 179 602	40
Croatie	2 826 700	4 491 543	63
Cuba	8 626 500	11 423 952	76
Danemark	3 904 800	5 484 723	71
Djibouti	716 800	506 221	142
Dominique	54 378	72 514	75
Égypte	29 445 000	81 713 520	36
Émirats Arabes Unis	2 651 900	4 621 399	57
Équateur	7 454 600	13 927 650	54
Érythrée	687 400	5 502 026	12
Espagne	27 259 100	40 491 052	67
Estonie	1 108 432	1 307 605	85
États-Unis	83 522 300	303 824 640	27
Éthiopie	7 103 300	82 544 840	9
Fiji	394 083	931 741	42
Finlande	3 779 700	5 244 749	72
France	20 024 500	64 057 792	31
Gabon	1 100 200	1 485 832	74
Gambie	602 600	1 735 464	35
Georgie	2 516 182	4 630 841	54
Ghana	5 505 300	23 382 848	24
Grèce	7 388 800	10 722 816	69
Grenade	15 023	90 343	17
Guatemala	5 465 000	13 002 206	42
Guinée	2 967 800	9 806 509	30
Guinée équatoriale	237 915	616 459	39
Guinée-Bissau	423 600	1 503 182	28
Guyana	382 548	770 794	50
Haïti	2 708 400	8 924 553	30
Honduras	2 644 700	7 639 327	35
Hongrie	6 993 700	9 930 915	70

Figure 137-2. Comparaison entre la population totale de la loi rang - taille et de la population totale respective

État	Population totale de la loi rang-taille	Population totale	Rapport en %
Îles Marshall	54 616	63 174	86
Îles Solomon	72 263	581 318	12
Inde	167 237 700	1 147 995 904	15
Indonésie	57 374 300	237 512 352	24
Iraq	19 337 500	28 221 180	69
Iran	37 823 200	65 875 224	57
Irlande	2 355 300	4 156 119	57
Islande	275 651	304 367	91
Israël	6 329 200	7 112 359	89
Italie	25 549 200	58 145 320	44
Jamaïque	1 154 500	2 804 332	41
Japon	84 151 500	127 288 416	66
Jordanie	4 826 700	6 198 677	78
Kazakhstan	8 475 700	15 340 533	55
Kenya	6 218 637	37 953 840	16
Kirgyzstan	2 498 800	5 356 869	47
Kiribati	76 497	110 356	69
Koweït	2 260 525	2 596 799	87
Laos	660 000	6 677 534	10
Lesotho	324 400	2 128 180	15
Lettonie	1 486 508	2 245 423	66
Liban	2 147 300	3 971 941	54
Liberia	805 000	3 334 587	24
Libye	4 431 700	6 173 579	72
Liechtenstein	34 873	34 498	101
Lituanie	2 330 139	3 565 205	65
Luxembourg	434 725	486 006	89
Macédoine	2 033 215	2 061 315	99
Madagascar	4 049 200	20 042 552	20
Malaisie	14 906 700	25 274 132	59
Malawi	1 652 000	13 931 831	12
Maldives	283 101	385 925	73
Mali	2 107 800	12 324 029	17
Malte	383 009	403 532	95
Maroc	15 158 600	34 343 220	44
Maurice	1 234 914	1 274 189	97
Mauritanie	1 154 200	3 364 940	34
Mexique	59 189 500	109 955 400	54
Micronésie	55 300	107 665	51

Figure 137-3. Comparaison entre la population totale de la loi rang - taille et de la population totale respective

État	Population totale de la loi rang-taille	Population totale	Rapport en %
Moldavie	1 885 500	4 324 450	44
Monaco	33 300	32 796	102
Mongolie	1 436 400	2 996 081	48
Montenegro	5 785 800	678 177	853
Mozambique	4 671 400	21 284 700	22
Namibie	706 900	2 088 669	34
Nauru	5 100	13 770	37
Népal	3 577 200	29 519 114	12
Nicaragua	2 906 400	5 785 846	50
Niger	2 038 100	13 272 679	15
Nigeria	50 440 000	146 255 312	34
Norvège	3 207 200	4 644 457	69
Nouvelle-Zélande	3 338 779	4 173 460	80
Oman	2 207 100	3 311 640	67
Ouganda	3 384 200	31 367 972	11
Ouzbekistan	10 212 700	27 345 026	37
Pakistan	47 436 700	172 800 048	27
Palau	15 507	21 093	74
Panama	1 446 696	3 309 679	44
Papouasie – Nouvelle-Guinée	740 046	5 931 769	12
Paraguay	3 108 226	6 831 306	45
Pays-Bas	14 303 600	16 645 313	86
Pérou	19 146 300	29 180 900	66
Philippines	25 685 600	96 061 680	27
Pologne	19 964 000	38 500 696	52
Portugal	6 006 600	10 676 910	56
Qatar	620 200	824 789	75
Centrafrique	1 665 300	4 444 330	37
République dominicaine	4 926 400	9 507 133	52
Roumanie	11 907 900	22 246 862	54
Royaume-Uni	35 223 800	60 943 912	58
Russie	77 400 900	140 702 096	55
Rwanda	543 200	10 186 063	5
Saint-Kitts-et-Nevis	24 593	39 817	62
Saint-Marin	28 059	29 973	94
Saint-Vincent-et-les-Grenadines	27 212	118 432	23
Sainte-Lucie	36 123	159 585	23
Salvador	2 981 003	7 066 403	42
Samoa	180 735	217 083	83

Figure 137-4. Comparaison entre la population totale de la loi rang - taille et de la population totale respective

État	Population totale de la loi rang-taille	Population totale	Rapport en %
Sao-Tomé-et-Principe	91 600	206 178	44
Sénégal	5 100 700	12 853 259	40
Serbie	5 785 800	10 159 046	57
Seychelles	35 800	82 247	44
Sierra Leone	1 776 300	6 294 774	28
Singapour	3 499 500	4 608 167	76
Slovaquie	3 157 600	5 455 407	58
Slovénie	1 142 101	2 007 711	57
Somalie	4 035 900	9 558 666	42
Soudan	11 235 400	40 218 456	28
Sri Lanka	4 078 000	21 128 772	19
Suède	5 122 600	9 045 389	57
Suisse	4 360 700	7 581 520	58
Suriname	292 400	475 996	61
Swaziland	301 000	1 128 814	27
Syrie	8 339 400	19 747 586	42
Tadjikistan	1 824 482	7 211 884	25
Taïwan	16 332 100	22 920 946	71
Tanzanie	12 555 500	40 213 160	31
Tchad	1 656 065	10 111 337	16
Tchéquie	6 617 600	10 220 911	65
Thaïlande	16 688 000	66 493 296	25
Togo	1 433 800	5 858 673	24
Tonga	43 795	119 009	37
Trinité-et-Torbago	372 100	1 231 323	30
Tunisie	6 258 893	10 383 577	60
Turkménistan	2 470 300	5 179 571	48
Turquie	43 410 900	71 892 808	60
Tuvalu	8285	12 177	68
Ukraine	25 932 800	45 994 288	56
Uruguay	2 619 200	3 477 778	75
Vanuatu	55 991	215 446	26
Venezuela	19 266 900	26 414 816	73
Viêt-nam	11 760 100	86 116 560	14
Yemen	4 452 600	23 013 376	19
Zambie	3 912 900	11 669 534	34
Zimbabwe	4 712 400	11 350 111	42

Figure 137-5. Comparaison entre la population totale de la loi rang - taille et de la population totale respective

La structure des résultats obtenus ayant été critiquée, on peut désormais proposer une interprétation des lois rang - taille à l'échelle de chacun des 193 États du monde.

16.2.3. Interprétations de ces résultats

Pour George Kingsley Zipf (1941 ; 1949), le modèle linéaire ne s'applique que dans le cas d'un réseau urbain possédant une certaine épaisseur historique, à l'instar de celui qui a été constitué par le réseau des châteaux (cf. chapitres 10 à 14). Les résultats précédents montrent qu'il s'agit d'un modèle générique que l'on peut établir pour n'importe quelle entité spatiale. En effet, que l'État possède un petit territoire ou un territoire immense, que l'État soit séculaire ou pluri-millénaire, la même loi rang - taille caractérise le réseau urbain de chacun des 193 États de la planète. Cependant, on peut reprendre l'interprétation de Colin Grant Clark (1967) au sujet de ce qui deviendra les lois rang - taille non linéaires pour analyser les données *Tageo*. Ce dernier avait évoqué la possibilité que les lois rang - taille puissent correspondre à trois types de distributions possibles, tout d'abord, ce qu'il avait appelé la « situation de primatie », où les grandes villes possèdent une taille disproportionnée par rapport aux autres. Ensuite, il y avait la « situation oligarchique » où les villes moyennes étaient surreprésentées, et enfin, le cas de la « situation anti-primatiale » où les plus grandes villes étaient sous représentées, ce qui est le cas des données *Tageo* puisque les grandes villes ne sont représentées que par le nombre d'habitants au sein de la limite administrative officielle.

La correspondance entre espace géographique et lois rang - taille est loin d'être évidente. Leslie Curry (1964) précisait qu'il en existait deux grandes familles. La première est l'approche « fonctionnelle », la seconde, l'approche « génétique ». L'approche « fonctionnelle » essaye de combiner les lois rang - taille avec la théorie des lieux centraux (Christaller, 1933 ; Losch, 1940). Elle montre qu'une loi rang - taille linéaire est la structure que l'on rencontre la plus souvent. Toutefois, si l'on observe bien cette relation, dans de nombreux cas, des paliers existent, paliers qui renvoient à une structure log-périodique (Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009). Ce constat n'est qu'un élément supplémentaire permettant de prouver que cette régression linéaire contraint de manière géométrique la répartition des localités dans l'espace géographique. Chaque palier correspond alors aux nombres possibles de villes possédant le même nombre d'habitants. De plus, il a été montré que le réseau urbain de Walter Christaller était un modèle fractal (Le Bras, 2000). Cependant, comme l'écrit Denise Pumain (1982), cette approche comporte de nombreuses boîtes noires. La question est donc loin d'être tranchée aujourd'hui (Pumain, 2006).

L'approche « génétique » tente d'établir un lien entre les processus de croissance et la distribution de la taille des villes. De nombreux modèles ont été proposés pour essayer de comprendre la croissance physique de la ville en fonction des lois rang - taille. Le plus célèbre est le modèle de croissance allométrique. Le principe est simple : ce type de croissance caractérise la constance du rapport entre des mesures de nature différente effectuées sur un même objet (Pumain, 1982). Dans le cas des agglomérations, l'étude établit *via* un modèle de loi de puissance, la dépendance explicite entre la croissance de la surface S de l'agglomération et la croissance de la population P contenue dans celle-ci. Le modèle le plus simple s'écrit :

$$S = \gamma P^\alpha$$

où γ et α sont des constantes contingentes à l'objet d'étude. α est ce que l'on appelle le coefficient d'allométrie (Batty, Longley, 1994 ; Bejan, Lorente, 2004).

Les méthodes et les techniques divergent, mais la question fondamentale soulevée par ces deux approches est, au fond, d'établir une liaison entre le « système des localisations » et le « système de peuplement ». Malgré tous les travaux existants, ce lien n'a jamais pu être construit de manière strictement formelle (Pumain, 1982 ; 2006).

Enfin, il faut préciser que les distributions de probabilité ont été rarement étudiées en géographie. Pourtant, « la forme donnée par Zipf à la loi rang - taille ne diffère qu'en apparence d'une fonction de répartition » (Pumain, 1982, p. 25). Toutefois, ce n'en est pas une. En effet, si le modèle est linéaire, le lien entre la loi rang - taille et la distribution de probabilité est direct. Ainsi, l'exposant α de Pareto, caractéristique essentielle des distributions parétiennes, correspond à l'inverse de l'exposant q des lois rang - taille (Guérin-Pace, 1993, p. 44). Cependant, cette relation biunivoque n'existe plus, s'il s'agit d'un modèle polynomial. Il est par conséquent difficile de conclure quoi que ce soit sur les relations entre les lois rang - taille et les distributions statistiques qu'elles engendrent. Il est donc nécessaire d'utiliser en complément des lois rang - taille leurs distributions statistiques respectives.

16.3. Les statistiques parétiennes et les lois rang - taille

Denise Pumain (1982, p. 26-27) avait bien mis en garde sur le fait qu'il existait une différence fondamentale entre les distributions statistiques et les lois rang - taille. En effet, une distribution statistique se réalise par la mise en correspondance de la variable étudiée (ici le nombre d'habitants) avec l'effectif mesuré. Pour établir clairement ces lois, il faut donc nécessairement imposer un intervalle permettant de lisser les variables étudiées. *A contrario*, la loi rang - taille étudie la correspondance entre un rang et un nombre d'habitants ; le lissage n'est donc pas indispensable dans ce cas. De plus, Denise Pumain (1982) avait effectué un état des lieux des lois statistiques possibles pour qualifier les lois rang - taille. Son raisonnement avait abouti à l'exclusion totale de la loi normale de Gauss-Laplace et à une hésitation entre la loi log-normale (ou de Galton ou de Gibrat) et les lois parétiennes. Cette partie va montrer que, pour la base *Tageo*, ce doute est entièrement levé en faveur des lois parétiennes.

16.3.1. Les lois parétiennes

Il est difficile de présenter rapidement les lois parétiennes, dues à Vilfredo Pareto (1896), car peu d'ouvrages de synthèse en français existent (Zajdenweber, 1976 ; Zajdenweber, 2009). Cela est sans doute dû au fait que les caractéristiques de cette loi sont quelque peu déconcertantes. Il s'agit d'une loi puissance caractérisée par l'exposant α de Pareto. Cette distribution est donc extrêmement dissymétrique. Les paramètres classiques que sont la moyenne et la variance n'existent pas forcément. Pour que la moyenne existe, il faut que l'exposant α de Pareto soit strictement supérieur à 1. De même, pour que la variance existe, il faut que l'exposant α de Pareto soit strictement supérieur à 2. Cela signifie que les valeurs extrêmes ont une probabilité plus élevée que dans la distribution de Gauss-Laplace de se réaliser.

Formellement, la distribution s'écrit :

$$\Pr(X \geq x) = C(x / x_0)^{-\alpha}$$

où X est une variable aléatoire, x_0 la valeur minimale et C un facteur d'échelle (Zajdenweber, 1976 ; Zajdenweber, 2009). De plus, ses paramètres s'estiment par les formules suivantes (Zajdenweber, 1976 ; Zajdenweber, 2009) :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1} x_0 \text{ si } \alpha > 1$$

$$V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} x_0^2 \text{ si } \alpha > 2$$

où E est l'espérance et V la variance.

La loi de Pareto se décline plus précisément en deux catégories : d'une part, les lois parétiennes fortes, d'autre part, les lois parétiennes faibles. Les lois fortes correspondent à la loi de Pareto décrite dans le paragraphe précédent. Les lois faibles (Mandelbrot, 1963) ne se définissent que par un comportement asymptotique au niveau de la queue de distribution. Formellement, cela s'écrit :

$$\Pr(X \geq x) \rightarrow C(x / x_0)^{-\alpha}$$

Daniel Zajdenweber (1976) précise qu'il est possible de confondre la distribution « asymptotiquement parétienne » avec la distribution log-normale, ce qui légitimise le fait que Denise Pumain (1982) s'interroge sur la nature statistique des distributions rang - taille. Toutefois, dans le cas de la base *Tageo*, on rencontre plutôt la loi forte de Pareto.

16.3.2. Les distributions des lois rang - taille

Une mesure systématique des exposants de Pareto a été réalisée sur chacun des États de la base *Tageo*. Cette estimation ne peut se faire que par l'établissement d'une régression linéaire dans l'espace bi-logarithmique du nombre d'habitants et celui de leur effectif statistique respectif, l'exposant α de Pareto correspond alors à la pente de la droite observée. La Figure 138 montre toutes les distributions statistiques observées pour chaque État. Dans le cas d'une telle distribution la moyenne arithmétique et l'écart-type indiqués sur ces graphiques n'ont aucune signification. D'ailleurs beaucoup de graphiques possèdent une valeur nulle au niveau de ces paramètres. Enfin, le pas a été indiqué ; il correspond à l'intervalle de lissage permettant d'établir de manière lisible la distribution observée. Parmi toutes celles-ci, seuls vingt-quatre États possèdent une distribution non parétienne. Il s'agit une nouvelle fois des États ayant un petit territoire : Andorre, Bahrain, Belize, Brunei, Cap Vert, Vatican, Comores, Corée du Nord, Djibouti, Dominique, Émirats Arabes Unis, Grenade, les Îles Salomon, le Liechtenstein, la Micronésie, Oman, Saint-Marin, Sainte-Lucie, Sao-Tomé-et-Principe, les Seychelles, Singapour, Nauru, Tuvalu et Vanuatu. Pour l'ensemble de ces États, l'exposant α de Pareto est nul ou très proche de zéro (Figure 140), ce qui ne devrait pas perturber l'analyse statistique de α .

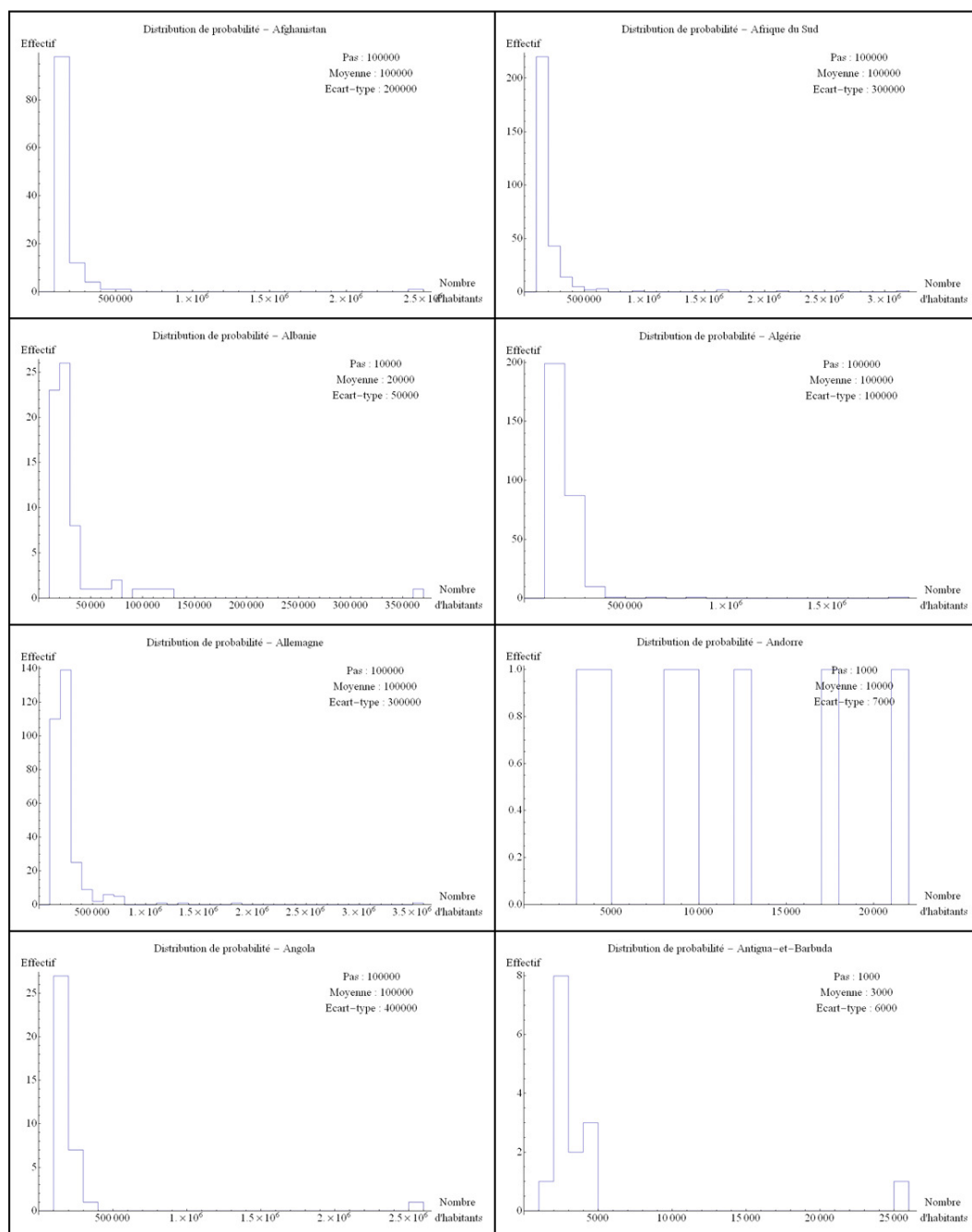


Figure 138-1. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

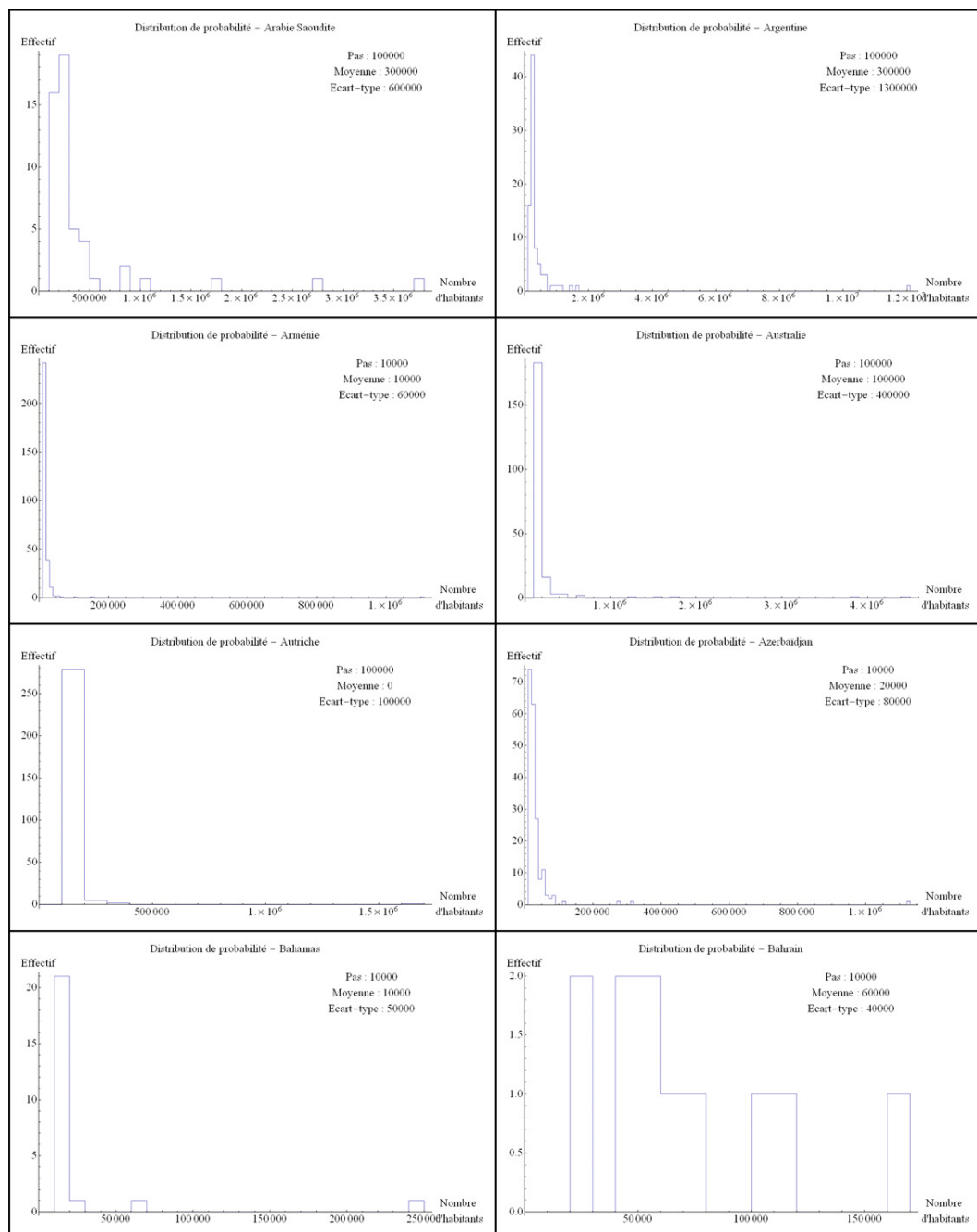


Figure 138-2. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

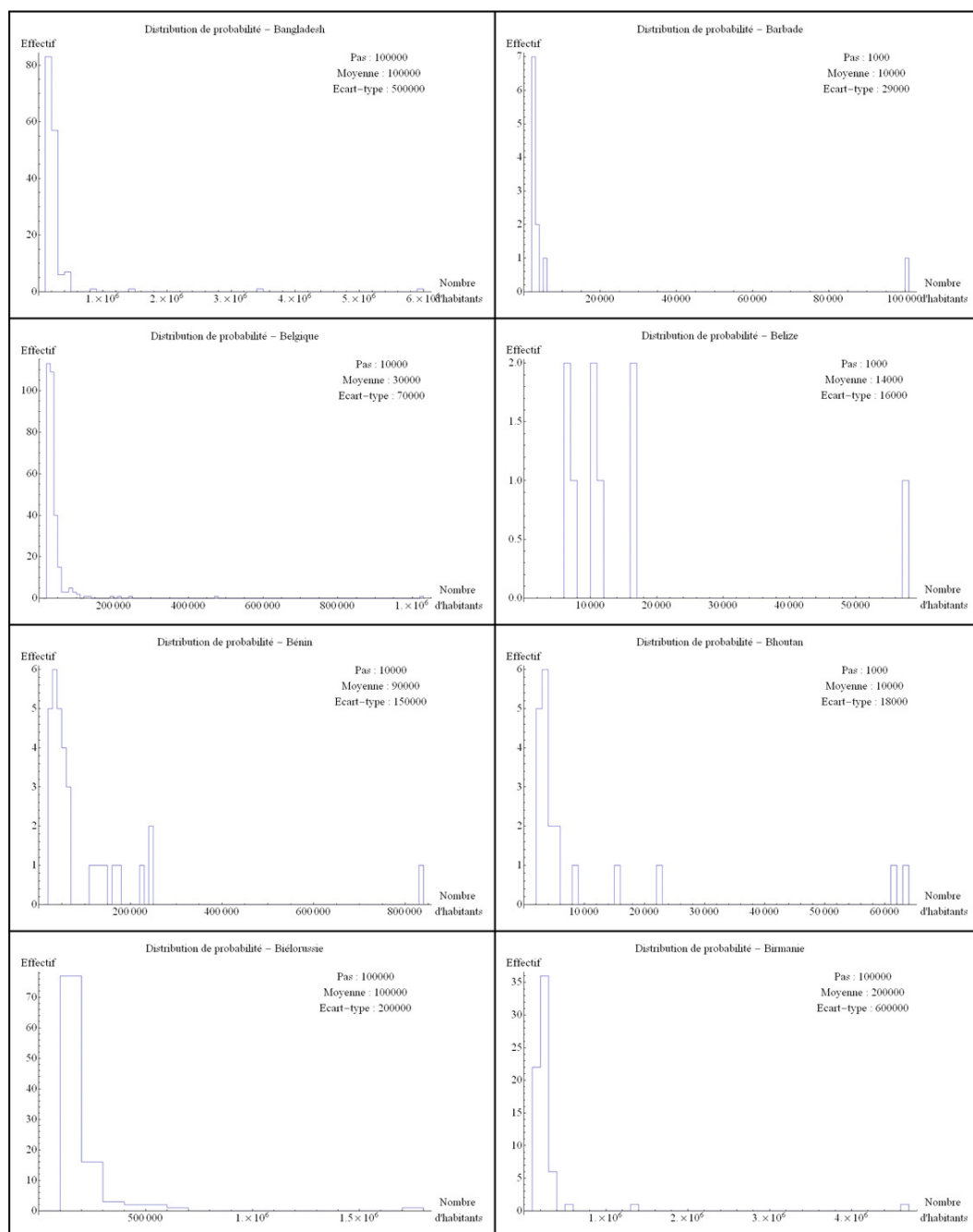


Figure 138-3. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

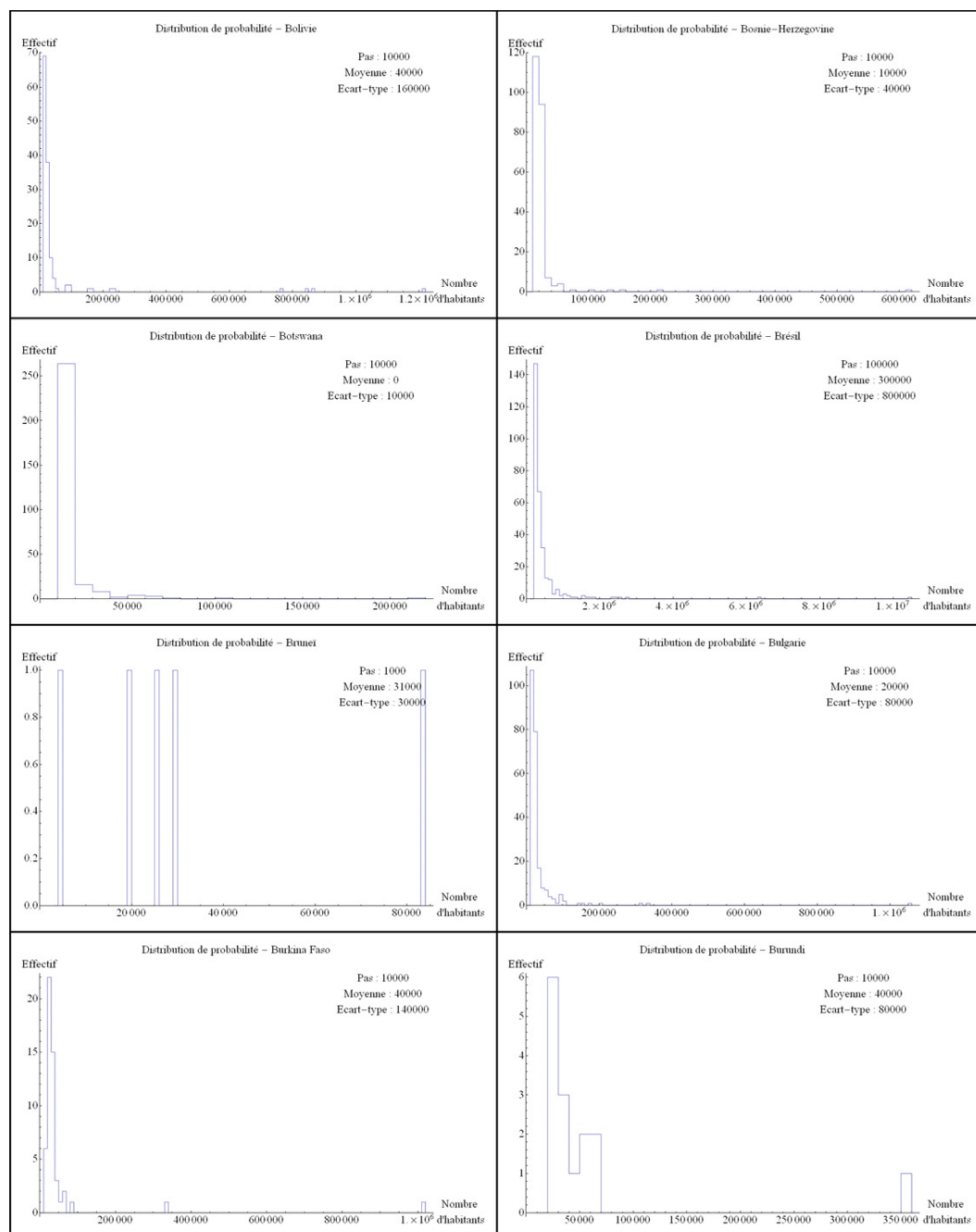


Figure 138-4. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

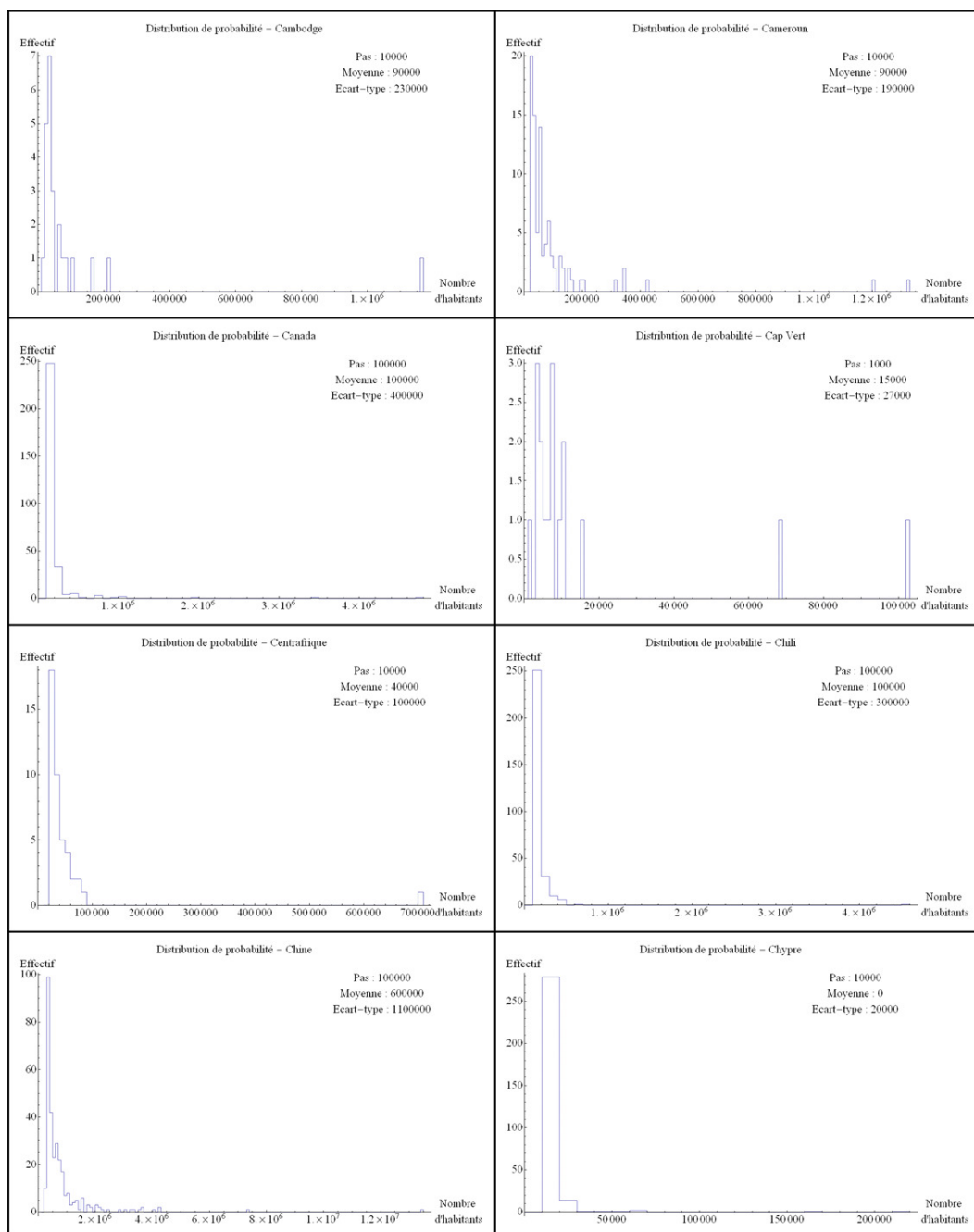


Figure 138-5. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

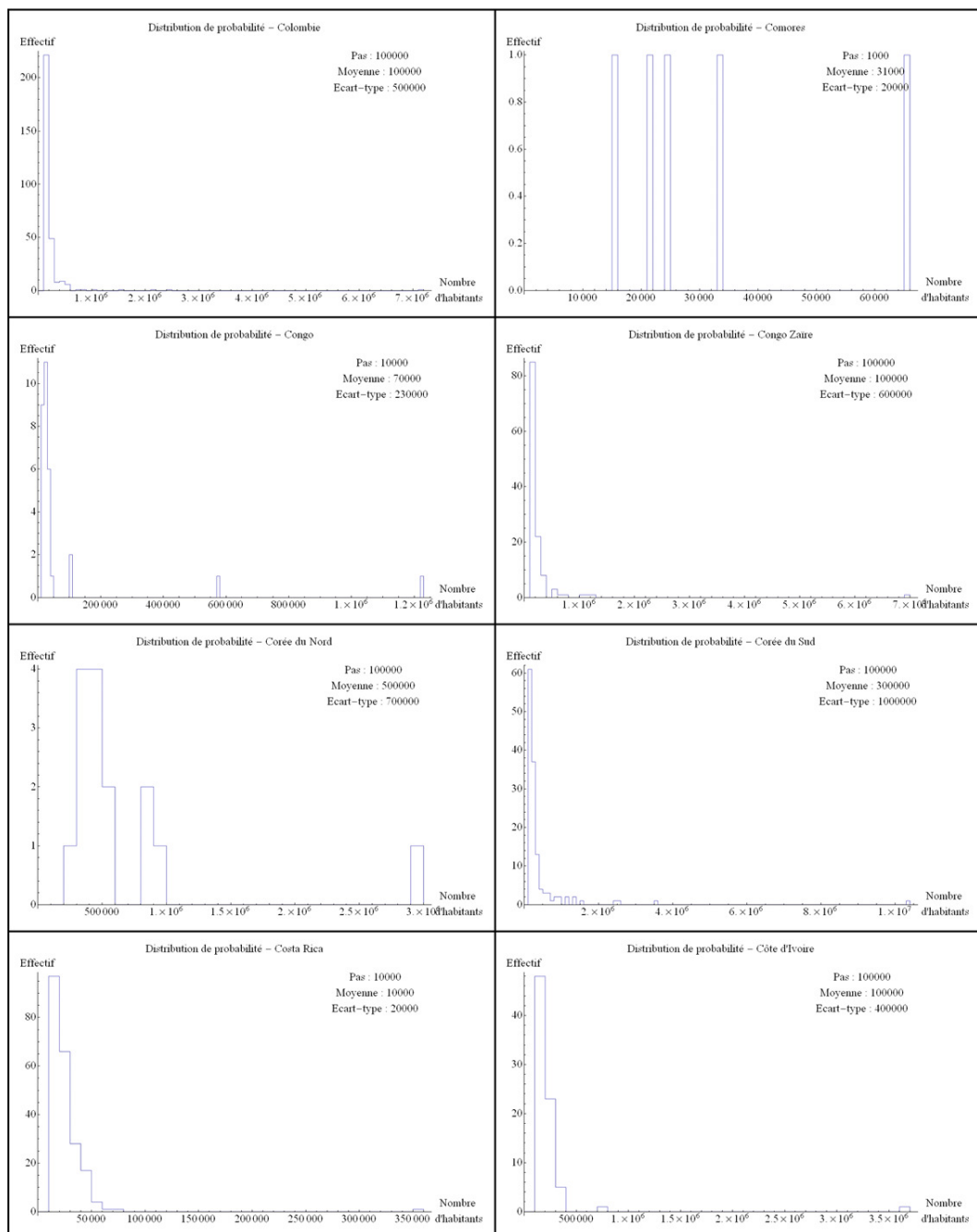


Figure 138-6. Distributions paréliennes observées pour chacun des États du monde

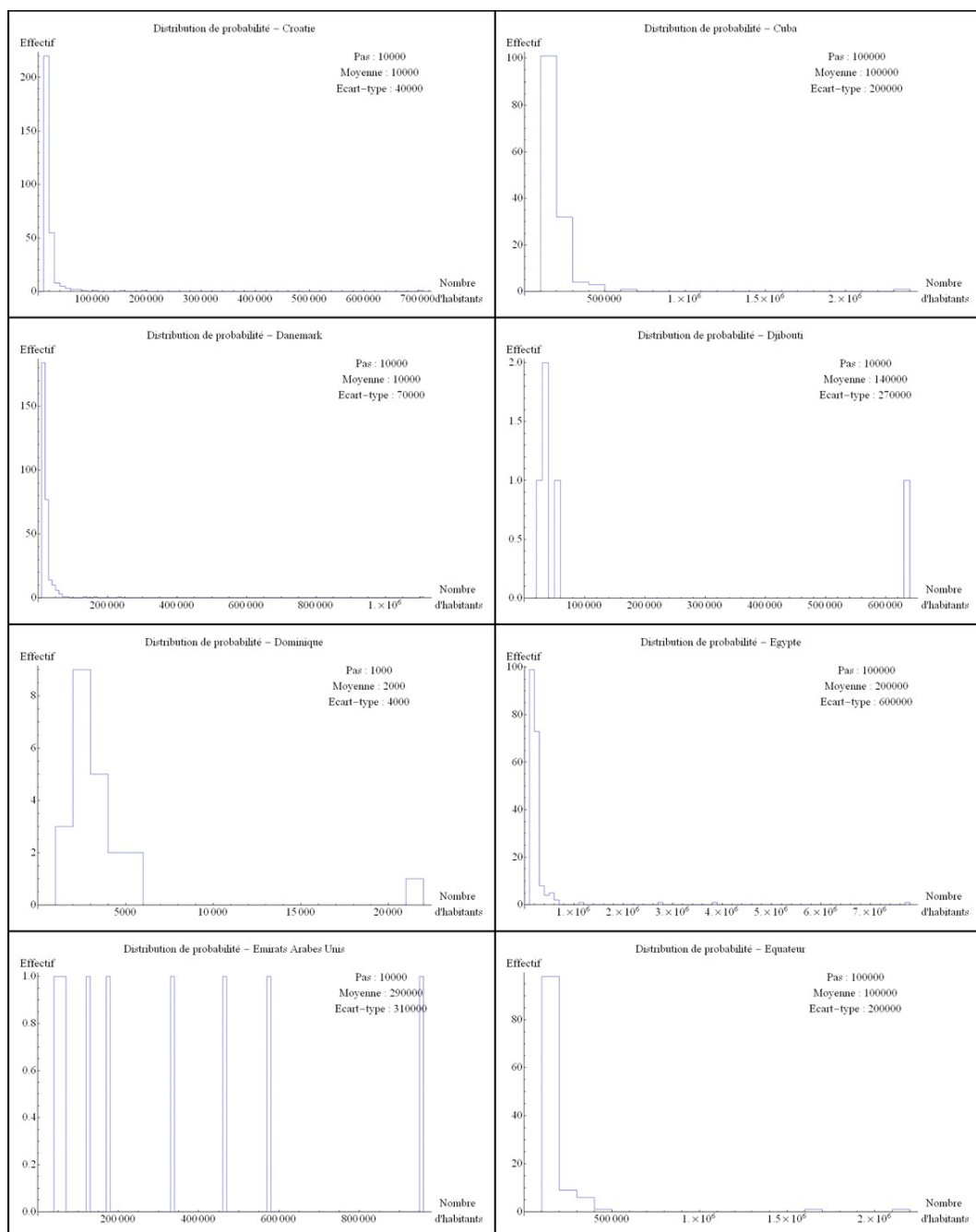


Figure 138-7. Distributions paréliennes observées pour chacun des États du monde

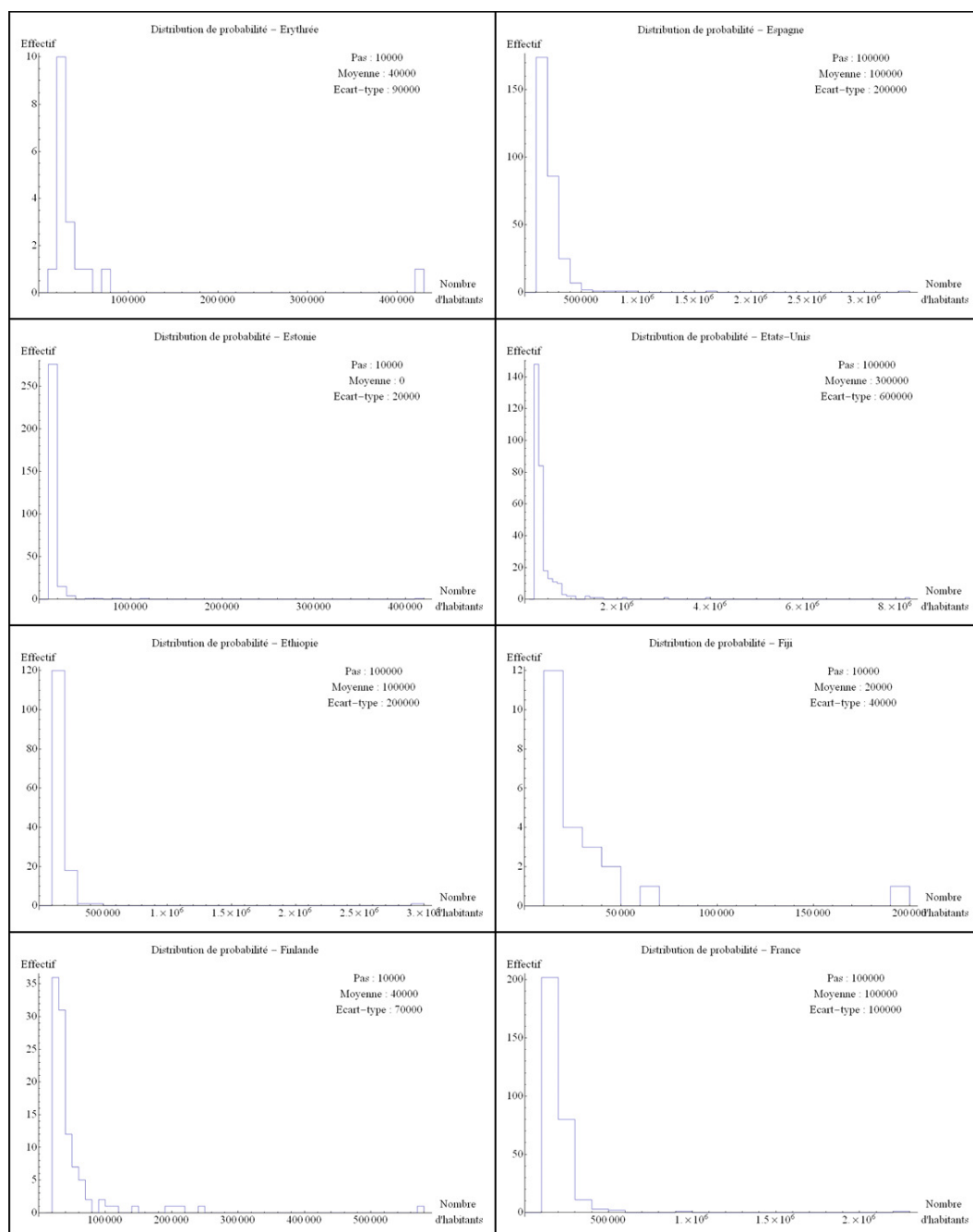


Figure 138-8. Distributions paréliennes observées pour chacun des États du monde

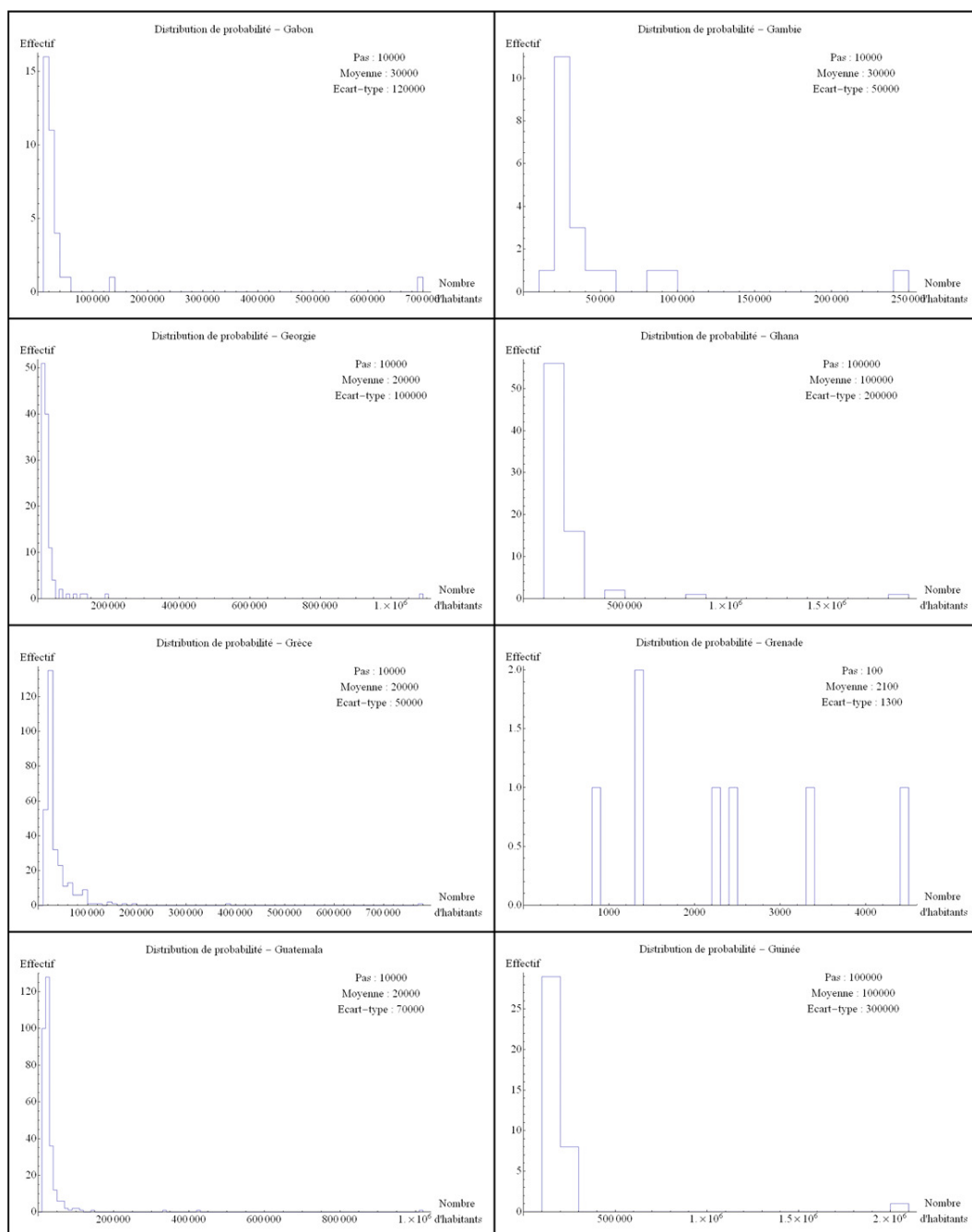


Figure 138-9. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

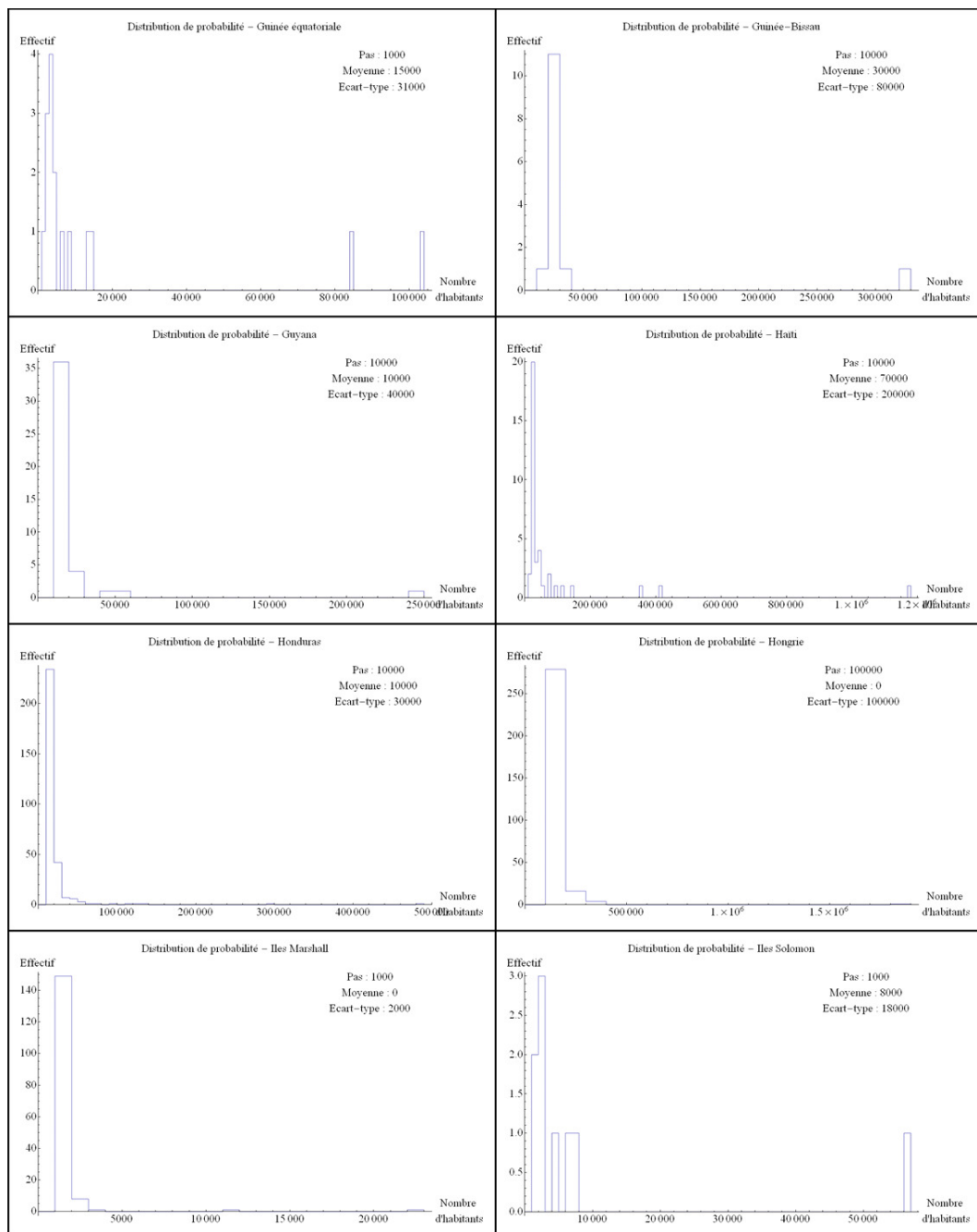


Figure 138-10. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

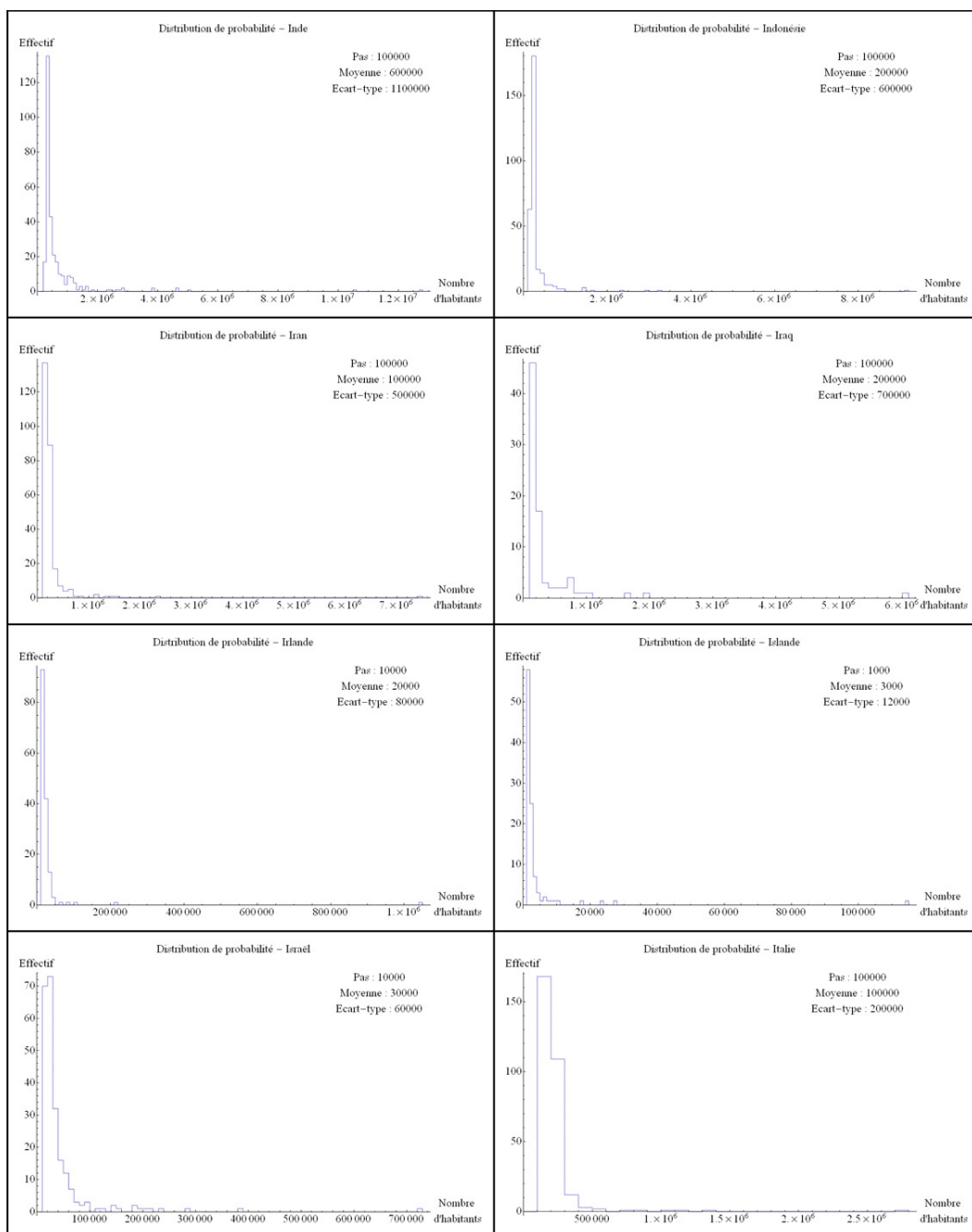


Figure 138-11. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

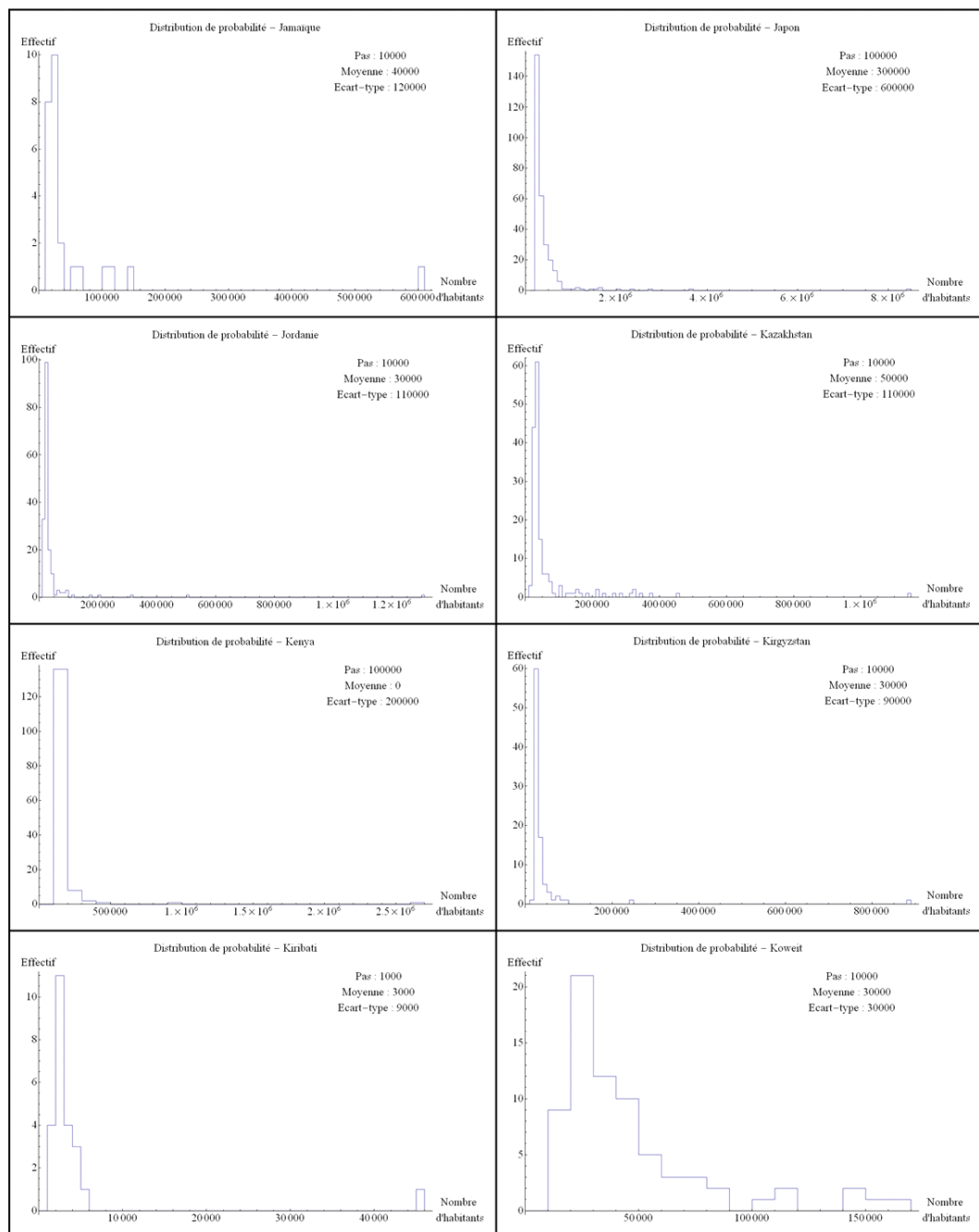


Figure 138-12. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

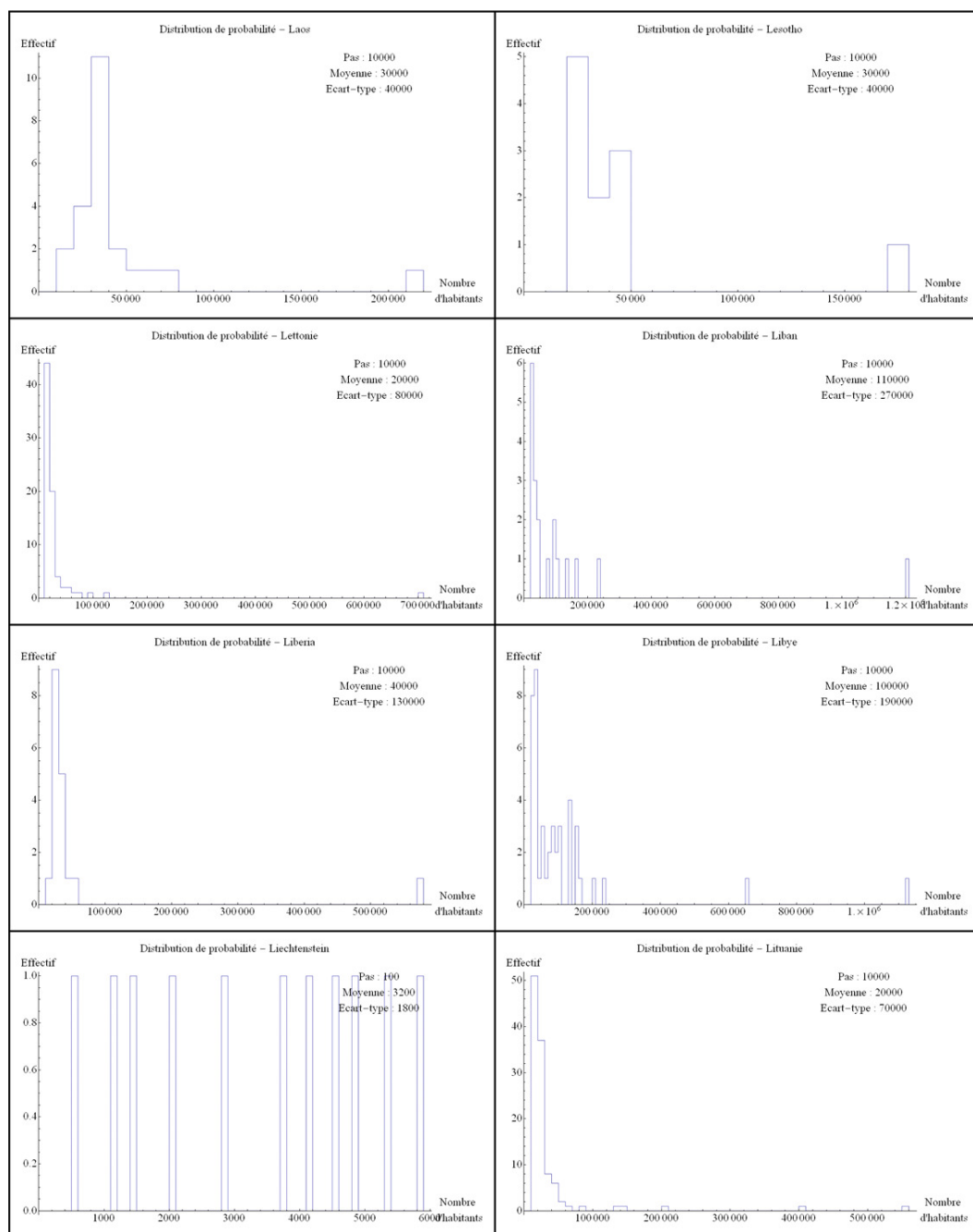


Figure 138-13. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

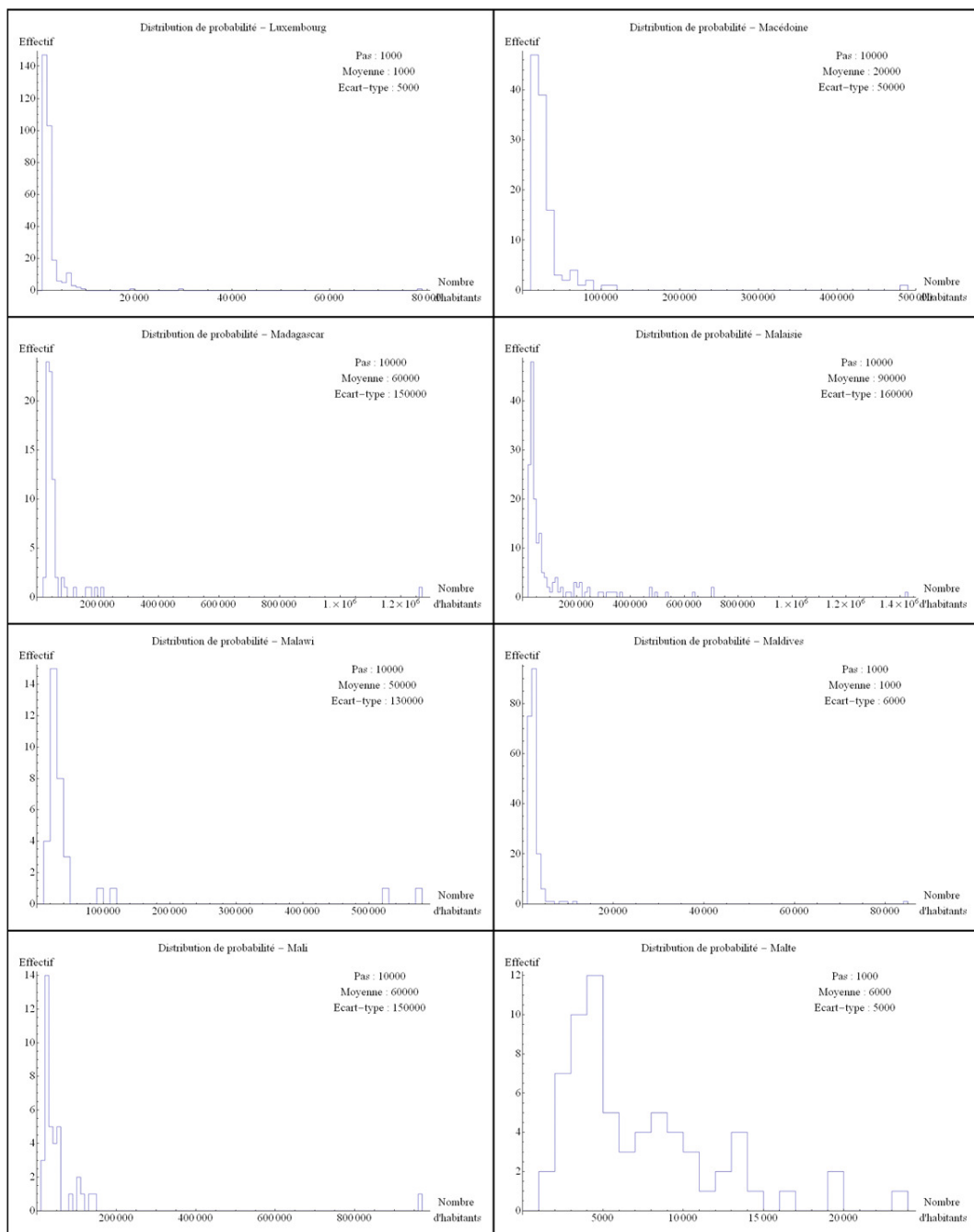


Figure 138-14. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

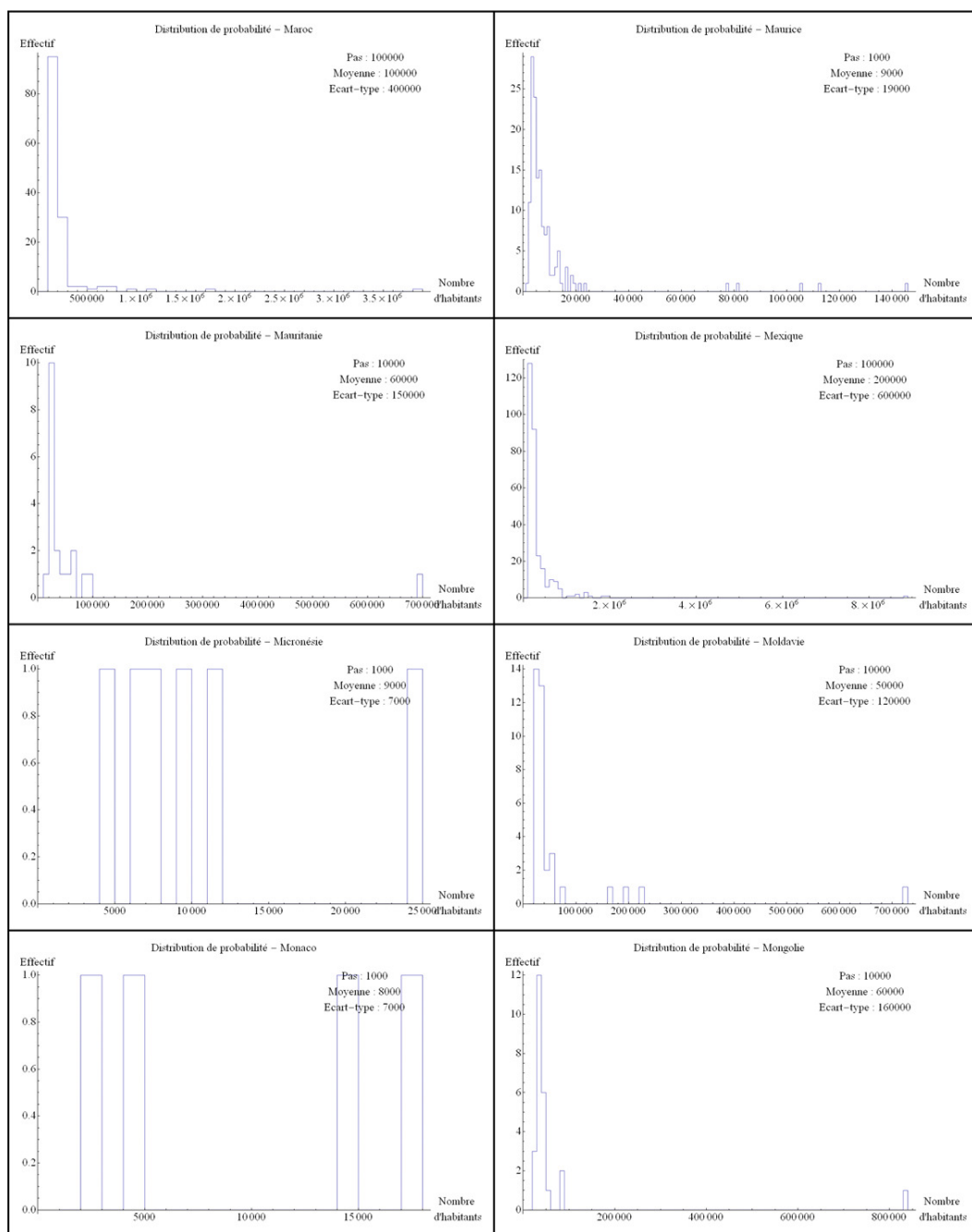


Figure 138-15. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

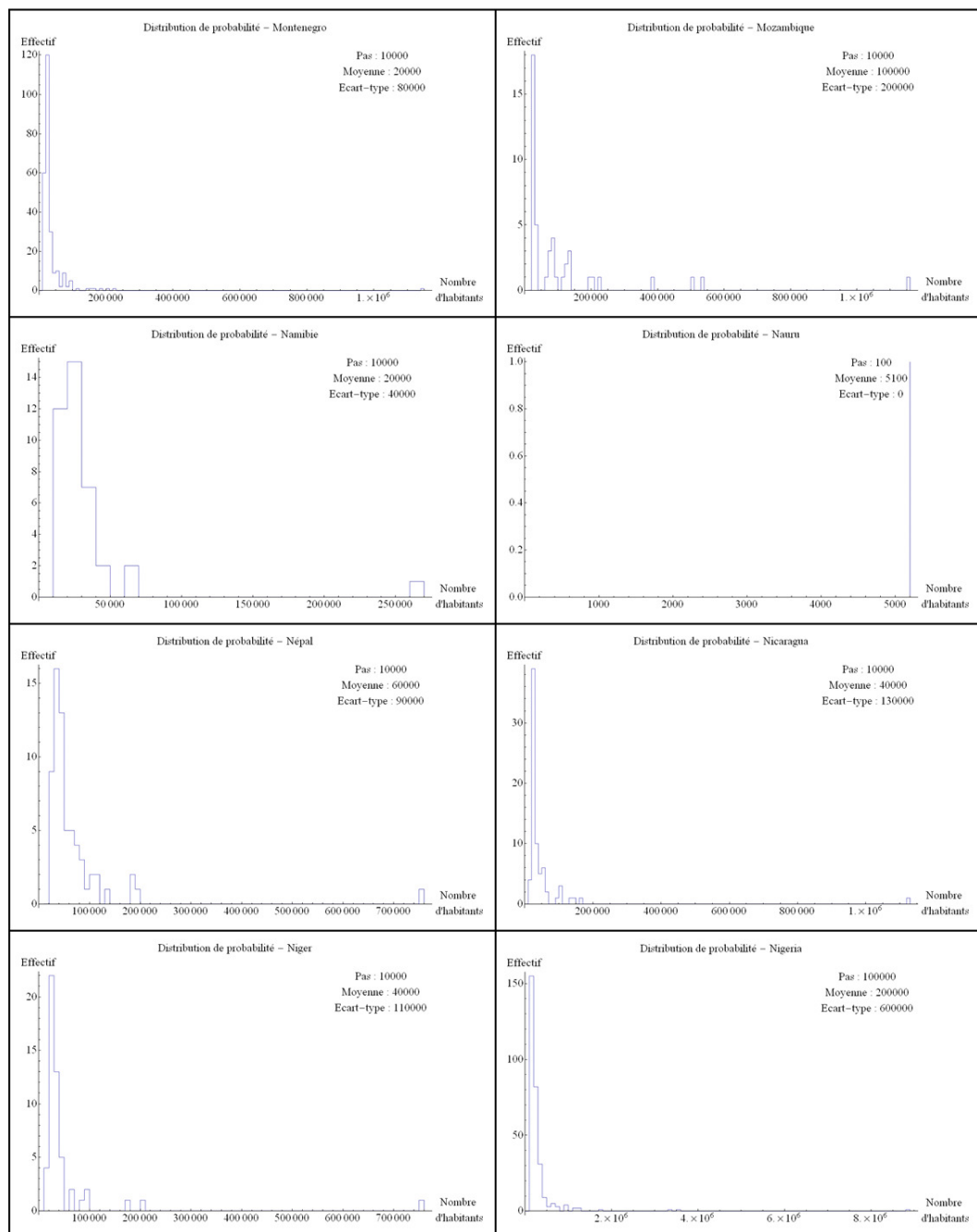


Figure 138-16. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

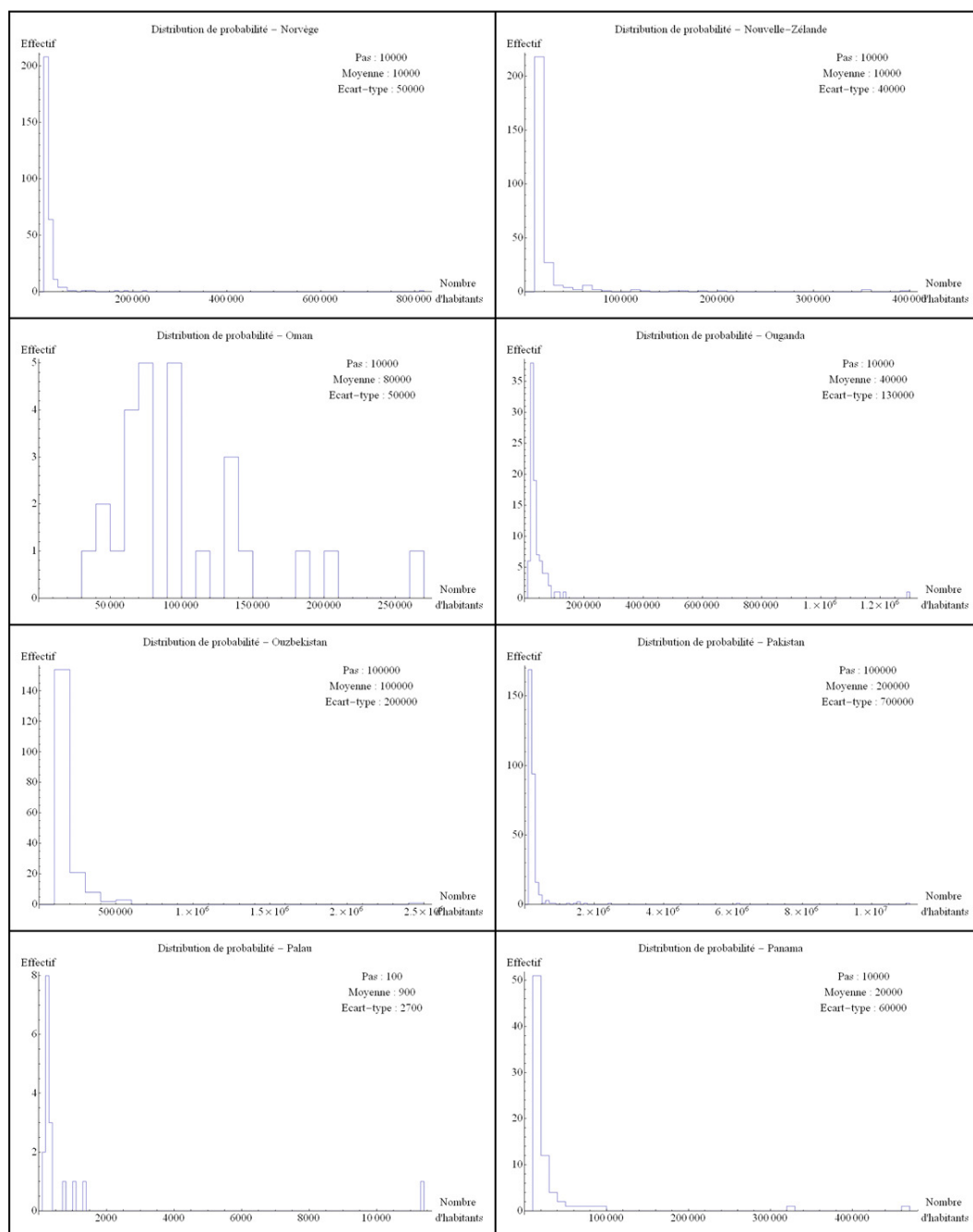


Figure 138-17. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

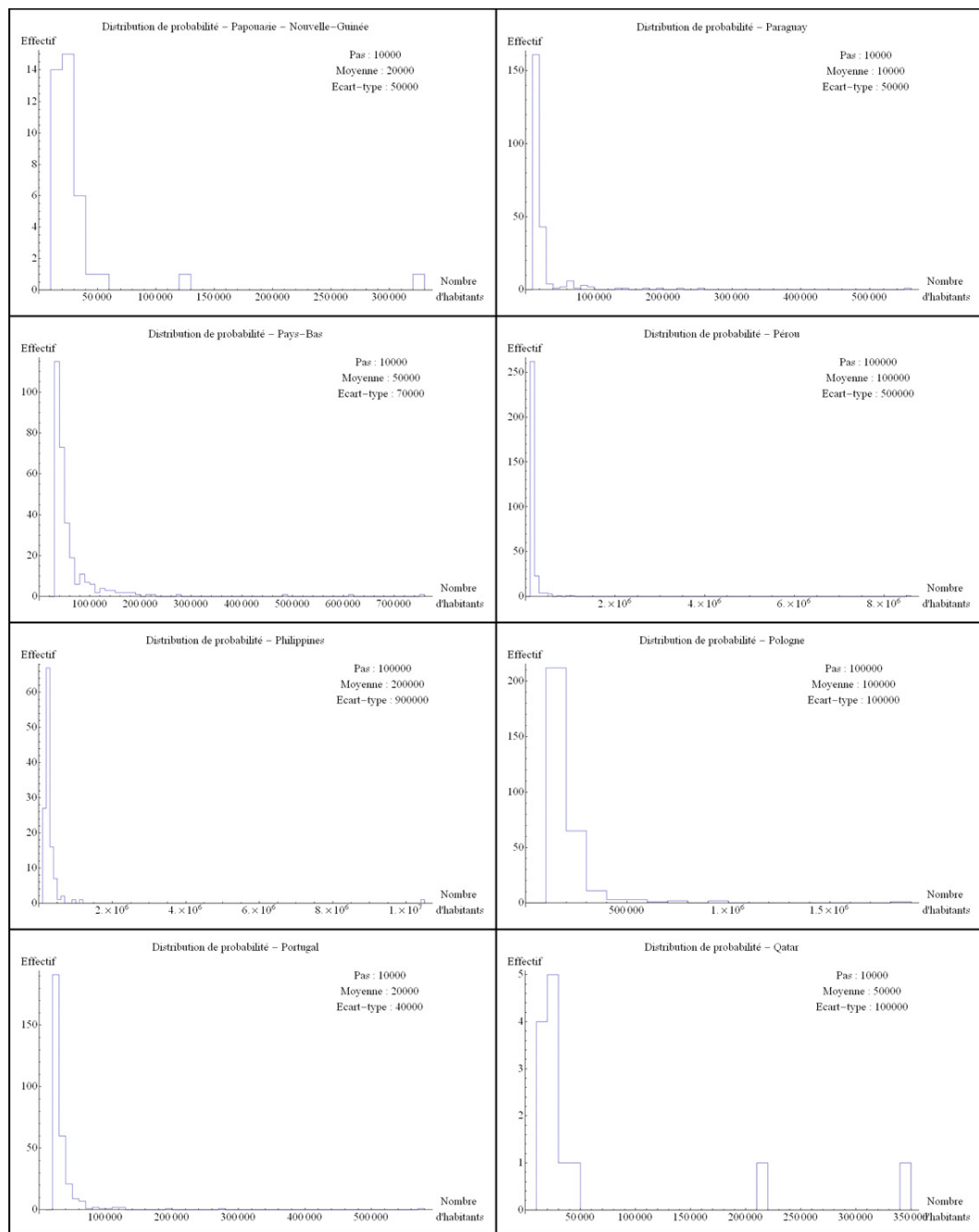


Figure 138-18. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

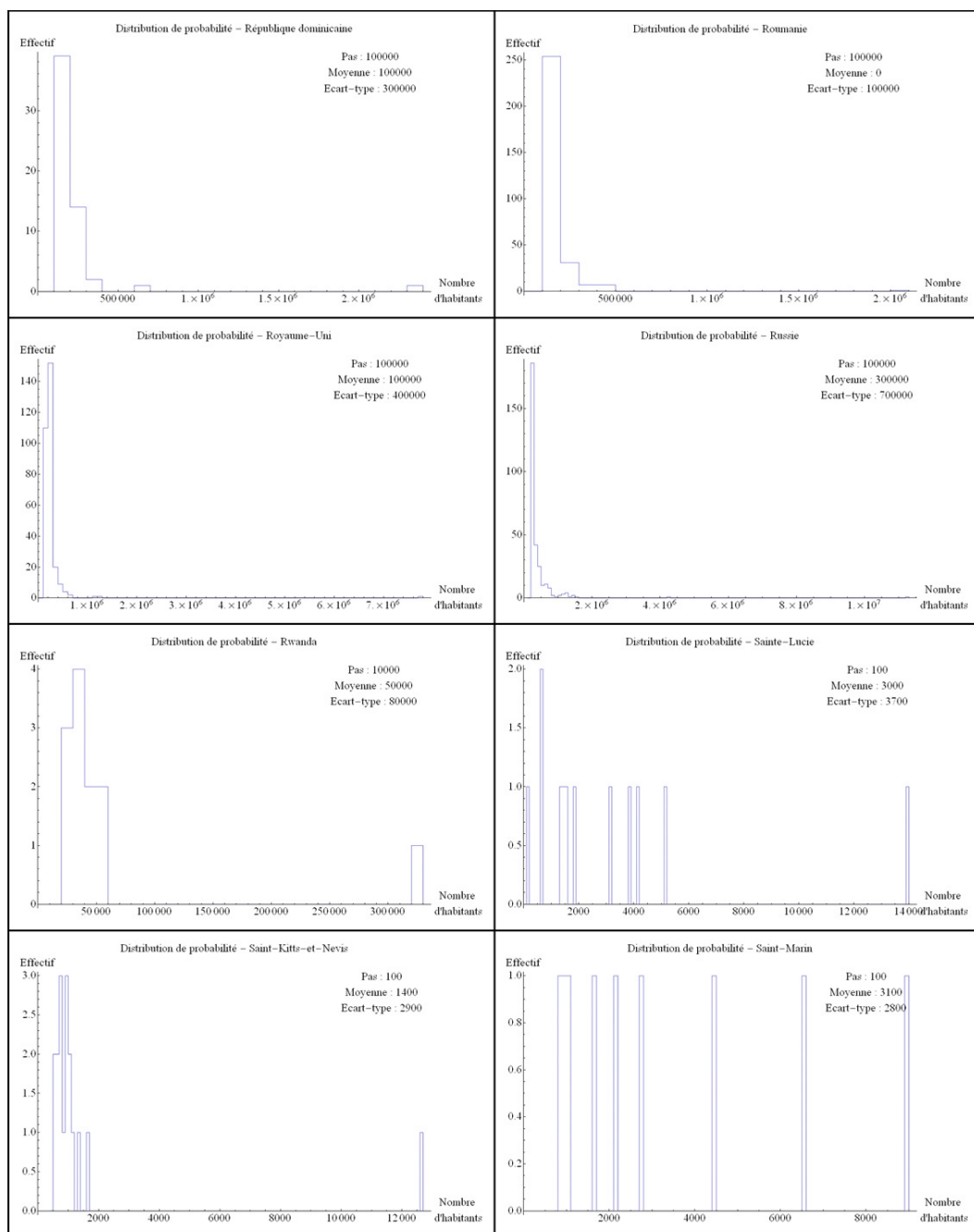


Figure 138-19. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

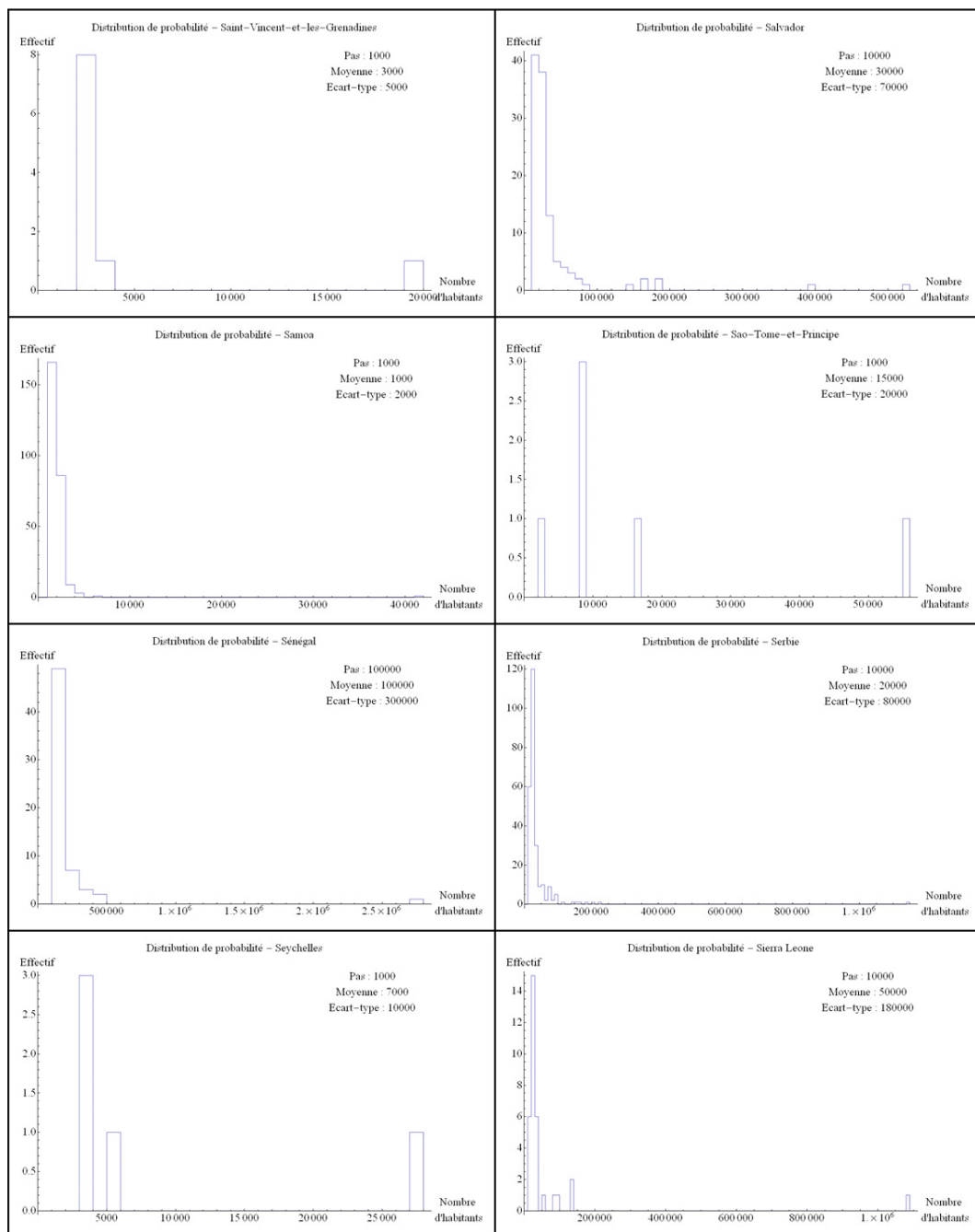


Figure 138-20. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

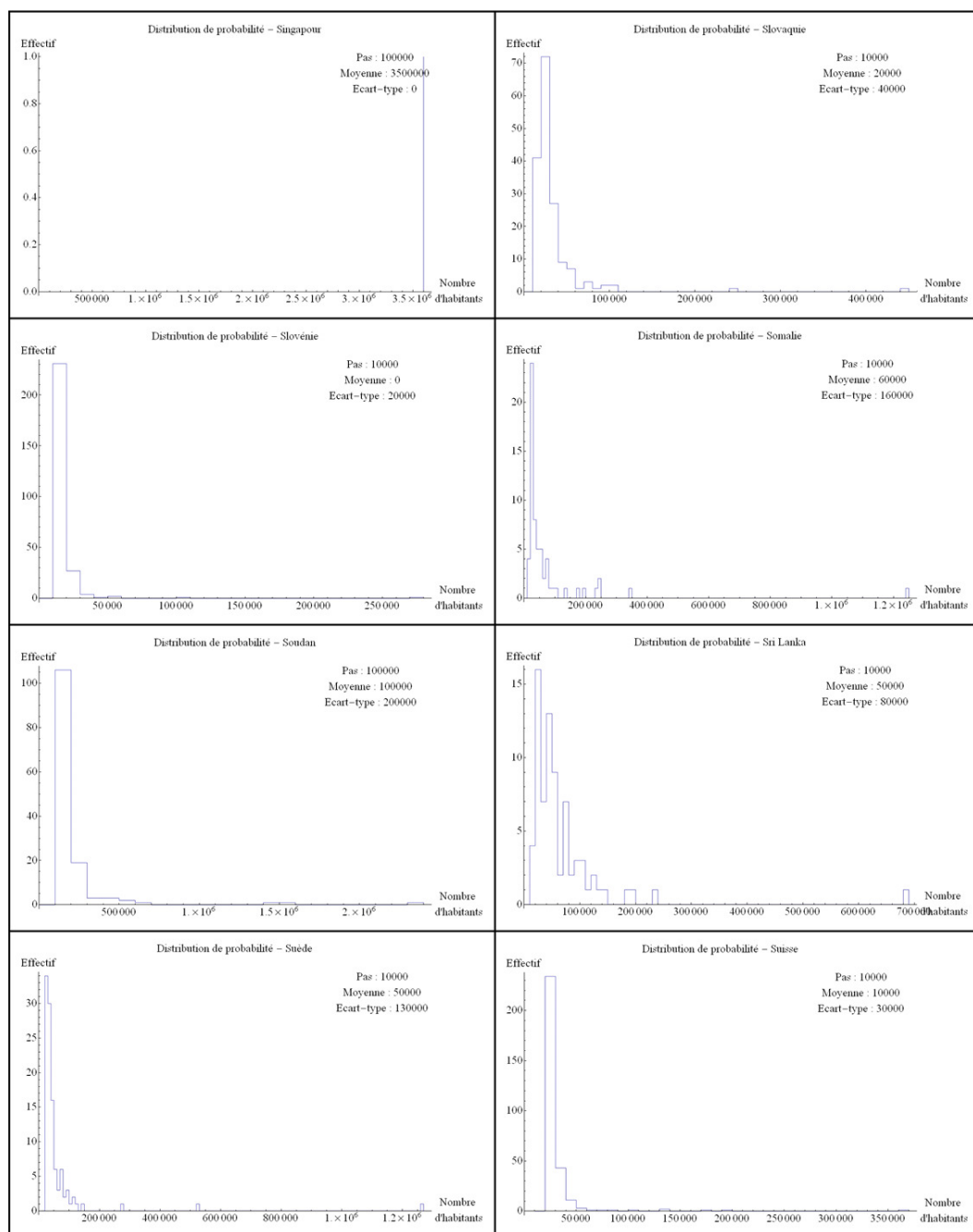


Figure 138-21. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

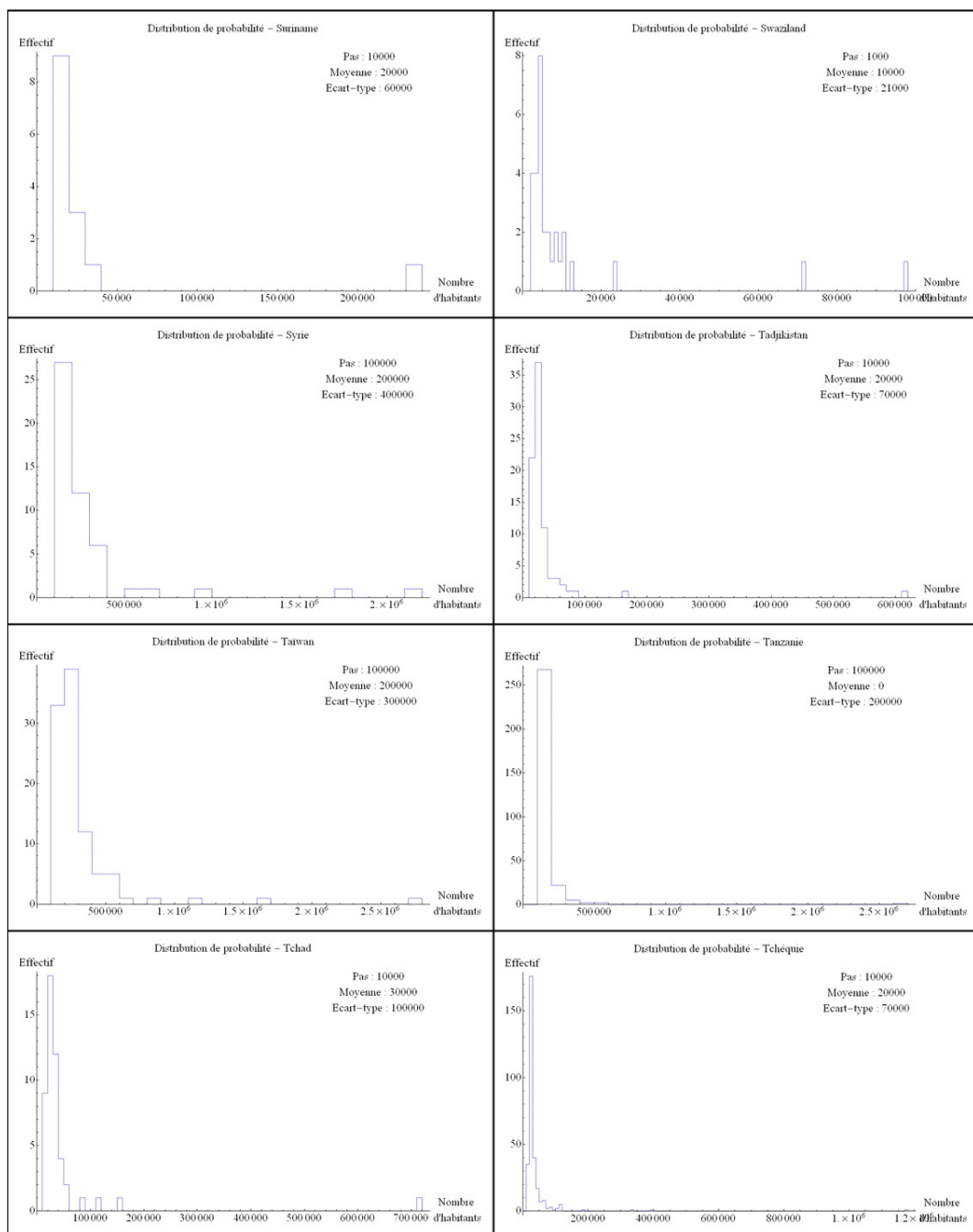


Figure 138-22. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

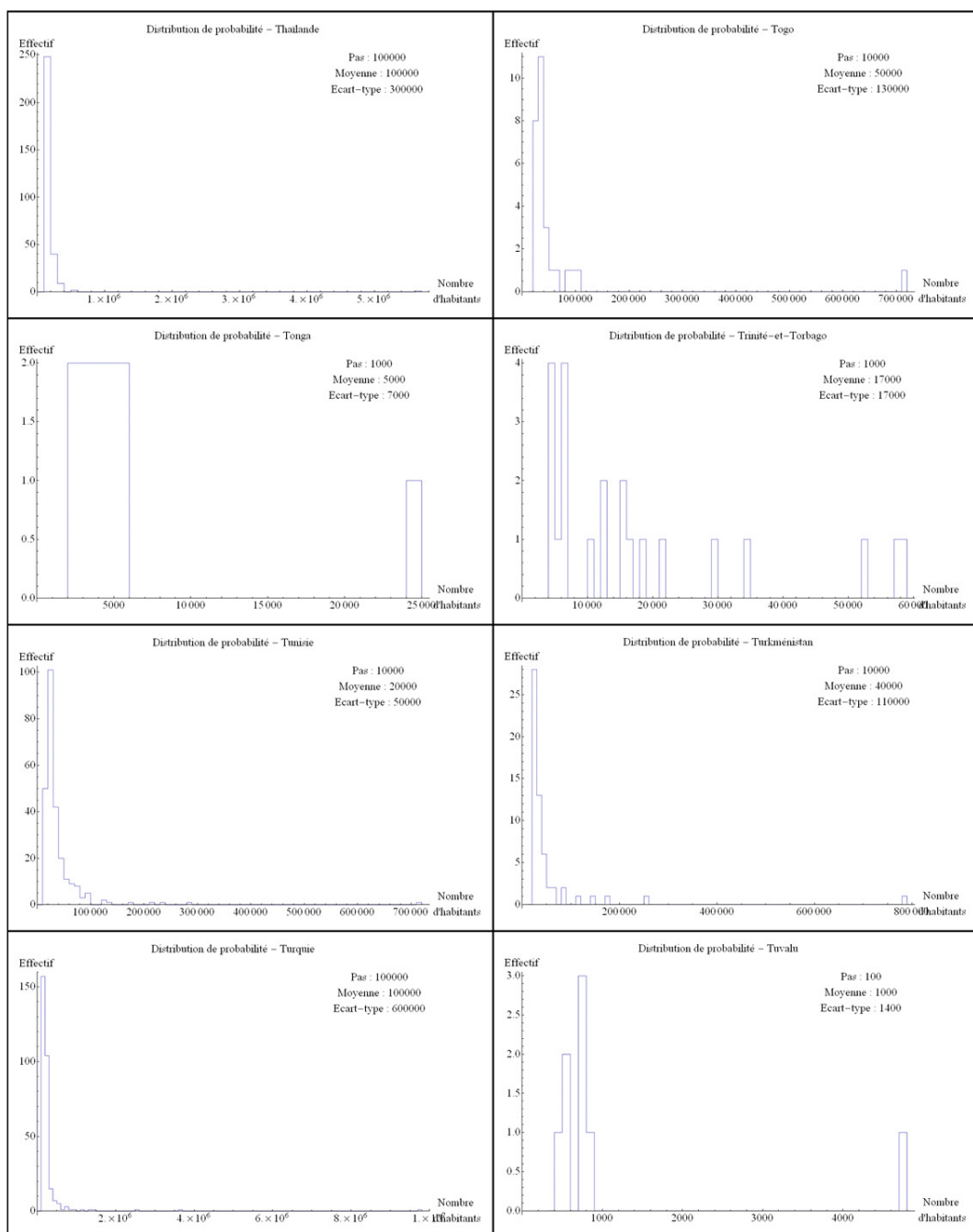


Figure 138-23. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

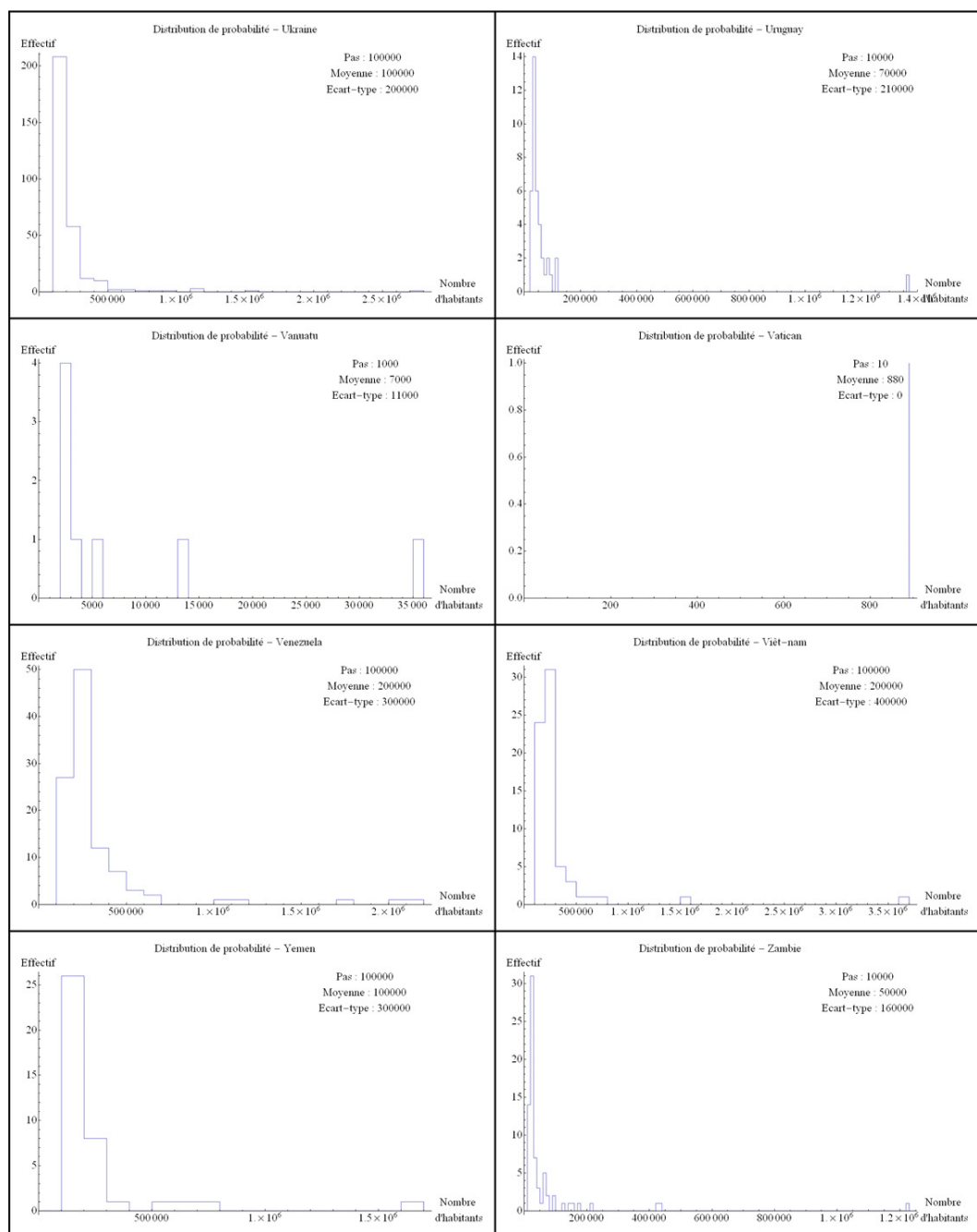


Figure 138-24. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

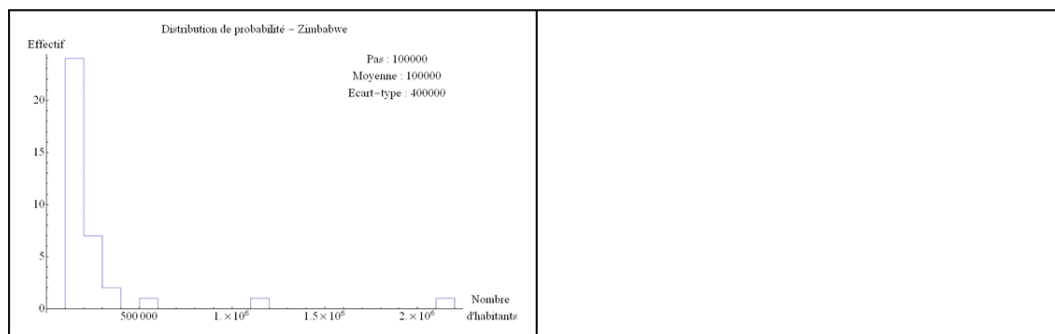


Figure 138-25. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde

On peut dès lors, comme avec la pente q , estimer la valeur moyenne du nombre α de Pareto (Figure 139 et Figure 140) : $\alpha = 0,811 \pm 0,032$. Il faut rappeler que $q = 1,117 \pm 0,026$. Même si les valeurs sont incompatibles, elles sont du même ordre de grandeur. D'autant plus que l'erreur sur les coefficients est plus élevée dans le cas de l'estimation de α par rapport à celui de q . Dans le cas de l'Afghanistan, par exemple, $q = 1,115 \pm 0,028$ et $\alpha = 1,168 \pm 0,397$, ou encore dans celui de l'Afrique du Sud, $q = 1,491 \pm 0,037$ et $\alpha = 1,376 \pm 0,209$, on remarque que q est systématiquement dans les barres d'erreur de α , ou plus exactement de $\frac{1}{\alpha}$. Toutefois, il existe des exceptions qui correspondent une nouvelle fois aux États dont le territoire est petit. Ces réserves formulées, ces estimations ont établi que, pour que l'exposant q de la loi rang - taille corresponde à l'exposant α de Pareto, deux conditions sont nécessaires. (1) Aucun doublon ne doit exister dans la série des données ; un simple lissage permet d'éviter ce désagrément en début de série (grandes villes), mais il est inévitable en fin de série (petites villes). (2) Il faut qu'il existe un ajustement linéaire dans l'espace bi-logarithmique de la loi rang - taille. Si ces deux conditions ne sont pas respectées, il faut impérativement établir en plus de la loi rang - taille, sa distribution statistique, comme cela sera montré dans le chapitre suivant, et dans ce cas $q = \frac{1}{\alpha}$ (Guérin-Pace, 1993, p. 44).

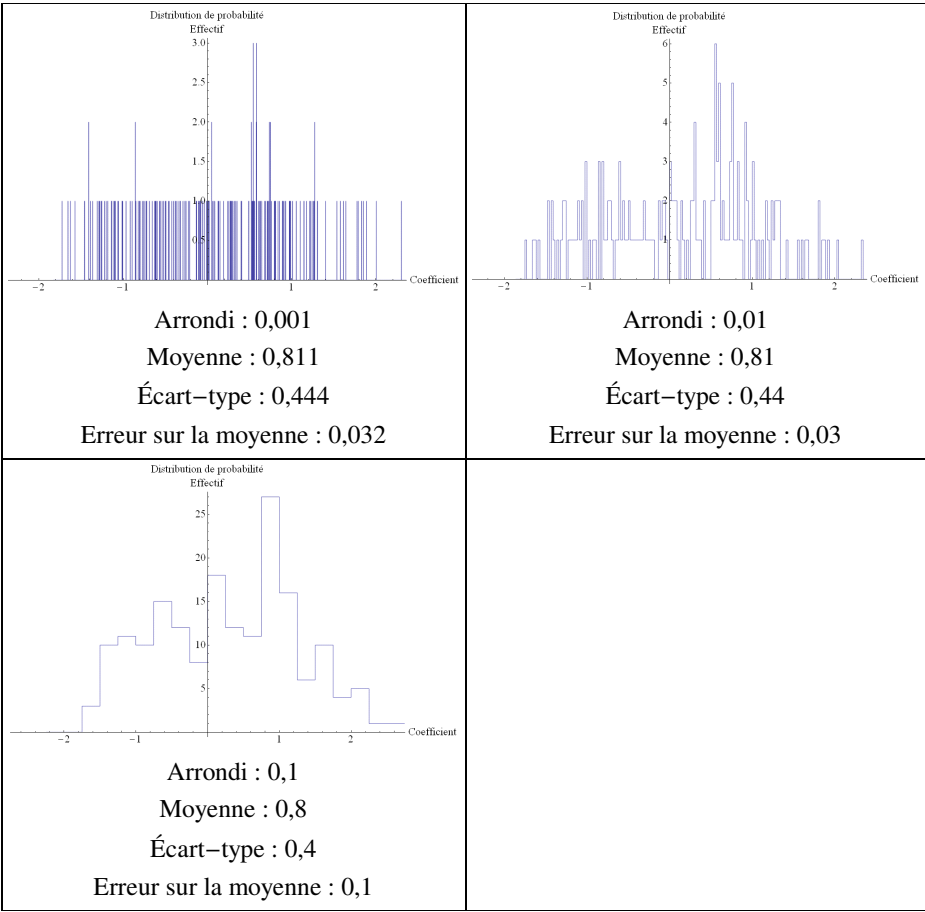


Figure 139. Distributions statistiques de l'exposant α de Pareto

État	Nombre α de Pareto	Erreur sur le nombre de Pareto	t de Student du nombre de Pareto	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Afghanistan	-1.168	0.397	-2.944	16.519	5.219	3.165
Afrique du Sud	-1.376	0.209	-6.574	19.998	2.85	7.017
Albanie	-0.933	0.236	-3.947	11.096	2.643	4.198
Algérie	-1.86	0.46	-4.047	25.923	6.049	4.286
Allemagne	-1.511	0.23	-6.557	21.957	3.115	7.05
Andorre	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Angola	-0.814	0.344	-2.366	11.769	4.555	2.584
Antigua-et-Barbuda	-0.277	0.279	-0.991	3.002	2.402	1.249
Arabie Saoudite	-0.82	0.16	-5.139	11.972	2.171	5.514
Argentine	-0.692	0.179	-3.874	10.369	2.458	4.219
Arménie	-0.896	0.297	-3.019	11.432	3.387	3.375
Australie	-1.059	0.226	-4.676	15.508	3.118	4.974
Autriche	-1.527	0.607	-2.517	21.429	7.914	2.708
Azerbaïdjan	-0.96	0.174	-5.527	12.472	2.005	6.219
Bahamas	-0.646	0.395	-1.634	7.704	4.371	1.762
Bahrain	-0.404	0.113	-3.581	4.743	1.262	3.758
Bangladesh	-1.057	0.221	-4.793	15.827	3.036	5.214
Barbade	-0.305	0.182	-1.674	3.404	1.747	1.949
Belgique	-1.19	0.232	-5.128	15.194	2.729	5.568
Belize	-0.185	0.156	-1.187	2.088	1.514	1.379
Bénin	-0.537	0.117	-4.602	6.826	1.37	4.982
Bhoutan	-0.431	0.109	-3.944	4.539	1.038	4.371
Biélorussie	-1.391	0.308	-4.524	19.358	4.024	4.811
Birmanie	-0.877	0.264	-3.319	13.016	3.577	3.639
Bolivie	-0.717	0.147	-4.875	9.368	1.769	5.295
Bosnie-Herzégovine	-1.137	0.254	-4.474	14.045	2.9	4.843
Botswana	-1.605	0.301	-5.33	18.861	3.295	5.724
Brésil	-1.209	0.19	-6.364	18.109	2.69	6.733
Brunei	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Bulgarie	-1.042	0.166	-6.28	13.204	1.93	6.843
Burkina Faso	-0.533	0.188	-2.832	6.988	2.155	3.242
Burundi	-0.446	0.171	-2.612	5.597	1.918	2.918
Cambodge	-0.25	0.134	-1.863	3.306	1.547	2.137
Cameroun	-0.682	0.105	-6.504	9.047	1.256	7.201
Canada	-1.126	0.255	-4.407	16.499	3.496	4.719
Cap Vert	-0.113	0.093	-1.215	1.351	0.876	1.542
Chili	-1.214	0.323	-3.757	18.03	4.325	4.169
Chine	-1.128	0.137	-8.222	17.428	1.975	8.822
Chypre	-1.333	0.461	-2.893	15.563	5.057	3.078

Figure 140-1. La valeur numérique des exposants α de Pareto obtenu

État	Nombre α de Pareto	Erreur sur le nombre de Pareto	t de Student du nombre de Pareto	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Vatican	0.	0.	0.	0.	0.	0.
Colombie	-1.148	0.237	-4.849	16.917	3.258	5.192
Comores	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Congo	-0.456	0.131	-3.466	6.173	1.543	3.999
Congo Zaïre	-0.931	0.247	-3.764	13.629	3.376	4.037
Corée du Nord	-0.322	0.215	-1.496	4.863	2.911	1.671
Corée du Sud	-0.845	0.148	-5.718	12.678	2.054	6.172
Costa Rica	-1.373	0.325	-4.226	16.848	3.577	4.71
Côte d'Ivoire	-1.028	0.254	-4.05	15.146	3.403	4.451
Croatie	-1.113	0.246	-4.52	13.764	2.796	4.923
Cuba	-1.353	0.336	-4.03	19.262	4.421	4.357
Danemark	-1.029	0.238	-4.325	13.074	2.732	4.785
Djibouti	-0.076	0.097	-0.784	1.015	1.128	0.9
Dominique	-0.558	0.191	-2.926	5.622	1.627	3.456
Égypte	-0.988	0.198	-4.98	14.916	2.742	5.439
Émirats Arabes Unis	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Équateur	-1.223	0.32	-3.825	17.413	4.248	4.099
Érythrée	-0.254	0.235	-1.081	3.217	2.6	1.237
Espagne	-1.54	0.319	-4.828	21.915	4.284	5.115
Estonie	-1.183	0.375	-3.158	14.223	4.186	3.398
États-Unis	-1.319	0.208	-6.35	19.727	2.915	6.768
Éthiopie	-1.07	0.499	-2.144	15.367	6.601	2.328
Fiji	-0.764	0.151	-5.055	9.034	1.634	5.527
Finlande	-1.138	0.187	-6.086	14.109	2.177	6.481
France	-1.7	0.338	-5.025	24.111	4.466	5.398
Gabon	-0.562	0.207	-2.717	7.113	2.336	3.044
Gambie	-0.339	0.265	-1.282	4.095	2.904	1.41
Georgie	-0.833	0.207	-4.028	10.536	2.382	4.423
Ghana	-1.35	0.269	-5.014	19.046	3.561	5.348
Grèce	-1.245	0.187	-6.663	15.735	2.158	7.29
Grenade	-0.164	0.168	-0.974	1.368	1.307	1.047
Guatemala	-1.068	0.202	-5.286	13.603	2.337	5.821
Guinée	-1.046	0.106	-9.896	15.162	1.402	10.815
Guinée équatoriale	-0.163	0.092	-1.769	1.801	0.866	2.078
Guinée-Bissau	-0.239	0.354	-0.675	3.103	3.919	0.792
Guyana	-0.87	0.352	-2.47	10.302	3.858	2.67
Haïti	-0.365	0.142	-2.57	4.754	1.657	2.87
Honduras	-1.222	0.255	-4.801	14.816	2.891	5.126
Hongrie	-1.623	0.406	-3.995	23.119	5.319	4.346

Figure 140-2. La valeur numérique des exposants α de Pareto obtenu

État	Nombre α de Pareto	Erreur sur le nombre de Pareto	t de Student du nombre de Pareto	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Îles Marshall	-1.242	0.464	-2.678	11.916	4.047	2.944
Îles Solomon	-0.194	0.098	-1.985	1.98	0.88	2.25
Inde	-1.052	0.15	-6.997	16.287	2.157	7.552
Indonésie	-1.086	0.168	-6.482	16.403	2.329	7.044
Iraq	-0.806	0.181	-4.442	11.747	2.473	4.751
Iran	-1.163	0.222	-5.233	17.114	3.053	5.605
Irlande	-0.867	0.258	-3.362	11.054	2.958	3.737
Islande	-0.711	0.189	-3.755	7.252	1.753	4.137
Israël	-1.208	0.14	-8.604	15.138	1.642	9.219
Italie	-1.649	0.3	-5.504	23.28	4.026	5.782
Jamaïque	-0.505	0.162	-3.115	6.21	1.842	3.37
Japon	-1.3	0.244	-5.329	19.275	3.425	5.628
Jordanie	-0.818	0.184	-4.443	10.543	2.148	4.908
Kazakhstan	-0.754	0.151	-5.005	9.707	1.795	5.409
Kenya	-1.137	0.412	-2.761	16.12	5.461	2.952
Kirgyzstan	-0.489	0.27	-1.81	6.386	3.073	2.078
Kiribati	-0.482	0.177	-2.722	5.084	1.558	3.263
Koweït	-1.091	0.158	-6.895	13.235	1.76	7.522
Laos	-0.475	0.259	-1.833	5.724	2.82	2.03
Lesotho	-0.641	0.145	-4.412	7.724	1.602	4.821
Lettonie	-0.752	0.225	-3.346	9.277	2.529	3.668
Liban	-0.326	0.106	-3.068	4.21	1.253	3.36
Liberia	-0.243	0.241	-1.009	3.231	2.688	1.202
Libye	-0.414	0.129	-3.22	5.533	1.516	3.649
Liechtenstein	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Lituanie	-0.945	0.194	-4.864	11.713	2.229	5.255
Luxembourg	-1.143	0.208	-5.505	11.89	1.897	6.269
Macédoine	-1.049	0.229	-4.587	12.86	2.559	5.026
Madagascar	-0.605	0.225	-2.695	7.848	2.637	2.976
Malaisie	-0.85	0.116	-7.308	11.124	1.418	7.843
Malawi	-0.546	0.157	-3.474	7.034	1.807	3.893
Maldives	-0.967	0.31	-3.114	9.862	2.799	3.524
Mali	-0.468	0.144	-3.246	6.078	1.651	3.681
Malte	-0.579	0.189	-3.064	6.22	1.704	3.651
Maroc	-1.054	0.27	-3.907	15.076	3.641	4.141
Maurice	-0.572	0.136	-4.202	6.563	1.324	4.957
Mauritanie	-0.206	0.174	-1.182	2.667	1.957	1.362
Mexique	-1.206	0.184	-6.548	18.051	2.541	7.104
Micronésie	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate

Figure 140-3. La valeur numérique des exposants α de Pareto obtenu

État	Nombre α de Pareto	Erreur sur le nombre de Pareto	t de Student du nombre de Pareto	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Moldavie	-0.656	0.189	-3.478	8.319	2.202	3.777
Monaco	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Mongolie	-0.431	0.209	-2.067	5.808	2.409	2.411
Montenegro	-1.07	0.19	-5.646	13.564	2.198	6.172
Mozambique	-0.52	0.131	-3.979	6.753	1.574	4.29
Namibie	-0.838	0.168	-4.979	10.317	1.838	5.613
Nauru	0.	0.	0.	0.	0.	0.
Népal	-0.772	0.151	-5.126	9.911	1.74	5.694
Nicaragua	-0.592	0.178	-3.319	7.713	2.047	3.768
Niger	-0.609	0.176	-3.468	7.833	2.009	3.899
Nigeria	-1.116	0.164	-6.818	16.858	2.27	7.426
Norvège	-1.08	0.248	-4.363	13.302	2.84	4.685
Nouvelle-Zélande	-1.166	0.198	-5.887	14.295	2.273	6.289
Oman	-0.307	0.275	-1.115	4.027	3.177	1.267
Ouganda	-0.633	0.177	-3.579	8.37	2.018	4.148
Ouzbekistan	-1.362	0.299	-4.554	19.566	3.936	4.971
Pakistan	-0.944	0.226	-4.168	14.118	3.159	4.47
Palau	-0.286	0.137	-2.089	2.446	0.965	2.533
Panama	-0.794	0.222	-3.58	9.605	2.499	3.844
Papouasie – Nouvelle-Guinée	-0.785	0.249	-3.157	9.519	2.749	3.463
Paraguay	-1.052	0.217	-4.857	12.905	2.492	5.179
Pays-Bas	-1.434	0.17	-8.45	18.341	2.025	9.057
Pérou	-0.935	0.295	-3.174	13.906	4.006	3.472
Philippines	-0.776	0.254	-3.056	11.816	3.463	3.412
Pologne	-1.833	0.301	-6.092	25.689	3.971	6.469
Portugal	-1.376	0.296	-4.643	17.065	3.42	4.99
Qatar	-0.361	0.158	-2.291	4.443	1.765	2.517
Centrafrique	-0.666	0.184	-3.619	8.613	2.097	4.106
République dominicaine	-1.052	0.311	-3.382	15.017	4.112	3.652
Roumanie	-1.632	0.254	-6.433	23.436	3.322	7.055
Royaume-Uni	-1.132	0.271	-4.174	17.015	3.688	4.614
Russie	-1.097	0.227	-4.835	16.666	3.17	5.257
Rwanda	-0.434	0.081	-5.338	5.487	0.912	6.019
Saint-Kitts-et-Nevis	-0.23	0.116	-1.982	2.058	0.851	2.418
Saint-Marin	0.	0.	Indeterminate	0.	0.	Indeterminate
Saint-Vincent-et-les-Grenadines	-0.588	0.444	-1.325	5.717	3.951	1.447
Sainte-Lucie	-0.045	0.044	-1.007	0.403	0.347	1.159
Salvador	-0.952	0.151	-6.323	11.987	1.723	6.958
Samoa	-1.26	0.368	-3.428	12.776	3.229	3.957

Figure 140-4. La valeur numérique des exposants α de Pareto obtenu

État	Nombre α de Pareto	Erreur sur le nombre de Pareto	t de Student du nombre de Pareto	Ordonnée	Erreur sur l'ordonné	t de Student de l'ordonnée
Sao-Tomé-et-Principe	-0.089	0.195	-0.454	1.073	1.897	0.566
Sénégal	-0.938	0.257	-3.646	13.598	3.396	4.004
Serbie	-1.07	0.19	-5.646	13.564	2.198	6.172
Seychelles	-0.342	0.236	-1.449	3.432	2.191	1.566
Sierra Leone	-0.453	0.173	-2.612	5.938	1.994	2.978
Singapour	0.	0.	0.	0.	0.	0.
Slovaquie	-1.17	0.225	-5.198	14.487	2.533	5.719
Slovénie	-1.37	0.401	-3.419	16.323	4.401	3.709
Somalie	-0.536	0.132	-4.05	6.912	1.542	4.482
Soudan	-1.279	0.253	-5.046	18.106	3.39	5.341
Sri Lanka	-0.698	0.146	-4.786	8.892	1.677	5.303
Suède	-0.807	0.174	-4.643	10.477	2.04	5.136
Suisse	-1.493	0.384	-3.891	18.054	4.388	4.114
Suriname	-0.54	0.234	-2.314	6.511	2.547	2.556
Swaziland	-0.382	0.109	-3.497	4.119	1.031	3.996
Syrie	-1.068	0.217	-4.915	15.079	2.905	5.19
Tadjikistan	-0.833	0.21	-3.976	10.404	2.357	4.415
Taïwan	-1.247	0.217	-5.742	17.846	2.912	6.128
Tanzanie	-1.39	0.385	-3.609	19.928	5.078	3.924
Tchad	-0.668	0.175	-3.822	8.493	1.984	4.282
Tchéquie	-0.992	0.188	-5.269	12.891	2.183	5.905
Thaïlande	-1.143	0.303	-3.769	17.357	4.098	4.235
Togo	-0.491	0.217	-2.263	6.143	2.48	2.477
Tonga	-0.318	0.047	-6.74	3.254	0.417	7.807
Trinité-et-Torbago	-0.364	0.119	-3.061	3.863	1.176	3.285
Tunisie	-1.249	0.151	-8.259	15.84	1.746	9.073
Turkménistan	-0.767	0.187	-4.104	9.697	2.175	4.459
Turquie	-1.042	0.228	-4.563	15.435	3.161	4.883
Tuvalu	-0.185	0.195	-0.951	1.606	1.388	1.157
Ukraine	-1.599	0.27	-5.926	22.712	3.625	6.266
Uruguay	-0.454	0.155	-2.935	6.098	1.789	3.408
Vanuatu	-0.268	0.184	-1.454	2.667	1.688	1.58
Venezuela	-1.32	0.168	-7.878	18.873	2.259	8.353
Viêt-nam	-0.924	0.253	-3.651	13.27	3.391	3.913
Yemen	-1.056	0.313	-3.379	14.51	4.106	3.534
Zambie	-0.623	0.133	-4.682	7.967	1.559	5.11
Zimbabwe	-0.918	0.236	-3.894	12.968	3.128	4.146

Figure 140-5. La valeur numérique des exposants α de Pareto obtenu

Au cours de ce chapitre, il a été montré, successivement à partir des données de la base *Tageo*, que l'on pouvait réaliser une étude complète des lois rang - taille et des distributions parétiennes établies à l'échelle étatique. Toutefois, ces analyses n'ont utilisé que le modèle linéaire sur des échantillons relativement limités en effectif puisqu'en règle générale les 300 premiers ne permettent pas d'étudier la totalité du réseau urbain sur un territoire donné. Ce chapitre fut l'occasion de rappeler à quelles conditions l'exposant q des lois rang - taille pouvait être équivalent à l'exposant α de Pareto. Dans ce type d'étude, la distinction entre les deux est nécessaire d'un point de vue pédagogique, mais pas d'un point de vue analytique puisque l'exposant q est, en règle générale, plus précis que l'exposant α de Pareto. Toutefois, ce n'est pas toujours le cas, comme cela sera montré dans le chapitre suivant.

De plus, il a été également rappelé que le lien entre les lois rang - taille et l'analyse spatiale est loin d'être évident. À part en passant par l'intermédiaire de la théorie des lieux centraux, il est difficile de percevoir le moindre rapport dans une répartition de lieux et la loi rang - taille lui correspondant. Le chapitre suivant essayera de proposer une solution à ce problème ainsi qu'à un ensemble de quatre questions résumant la problématique de la distribution des tailles de villes formulée par Denise Pumain (1982). (1) Quelle est la forme de la distribution des tailles de villes dans des systèmes urbains divers ? (2) De quelles distributions statistiques peut-elle être rapprochée, et par quelles méthodes ? (3) Quelles interprétations théoriques ont été proposées pour expliquer les régularités observées ? (4) Quel rapport existe-t-il entre ces formes de distribution de taille des villes et les processus de croissance qui les engendrent ? Des réponses sensiblement différentes à celles de cette auteure ont pu être proposées aux interrogations (1) et (2). Tout d'abord, la distribution des tailles de villes correspond, lorsque l'on possède un échantillon de données de taille suffisante, à une simple régression linéaire qui peut dans ce cas être rapprochée de la distribution statistique parétienne. Cela revient à prétendre que la distribution log-normale est exceptionnelle de ce point de vue. À la fin de ce chapitre, aucune réponse n'a été apportée aux questions (3) et (4).

Enfin, il reste le délicat problème de la correspondance entre répartition des lieux et loi rang - taille correspondante. Si l'analyse fractale des châteaux a pu établir la fractalité d'un nuage de points, il est logique de penser que la distribution de la répartition de la population à l'échelle du monde le soit également. Ainsi, on doit pouvoir conduire une analyse analogue à celle des châteaux sur la répartition ponctuelle de l'établissement humain à l'échelle planétaire. Cependant, peut-on montrer la fractalité de la structure statistique du nombre d'habitants ? Quelques pistes ont été lancées dans ce chapitre. Dans le suivant, il faudra les poursuivre et établir cette fractalité.

17

Structure multi-échelle de la répartition de la population

La loi rang - taille, à l'échelle de chaque État, peut facilement être étendue à l'échelle du monde ou à l'échelle continentale. Il en est de même pour les distributions parétiennes observées, ce qui permettra d'étudier ces lois avec un effectif beaucoup plus important, car l'échantillon n'est plus limité à 300 valeurs. À ces deux analyses, ce chapitre se propose d'introduire une dimension spatiale en calculant des dimensions fractales de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire ou continentale.

17.1. À l'échelle du monde

À l'échelle du monde, la répartition des habitants est contrainte par la position des trois océans, et, dans une moindre mesure, par les milieux climatiques, le domaine privilégié étant la zone tempérée et par les grands massifs (Figure 141), comme cela a largement été évoqué dans le chapitre 15. Une nouvelle fois, l'analyse des données *Tageo* révèle une structure très riche. Dans un premier temps, l'étude des données brutes permettra de poser les différentes techniques et méthodes. Chemin faisant, cela conduira à étudier la répartition de lieux et les distributions parétiennes en fonction d'un seuil de population.

17.1.1. Données brutes

La méthode des lois rang - taille ayant été détaillée dans le chapitre précédent, ce paragraphe débutera par l'explication de la méthode de calcul d'une dimension fractale à l'échelle planétaire. Une nouvelle fois, la méthode de calcul retenue est celle du comptage de boîtes carrées sur un planisphère représentant la répartition des géolocalisations de la base *Tageo* (Figure 141). La représentation retenue est une carte par points qui est la plus efficace pour percevoir les vides et les pleins du peuplement de la Terre (Noin et Thumerelle, 1993, p. 43).

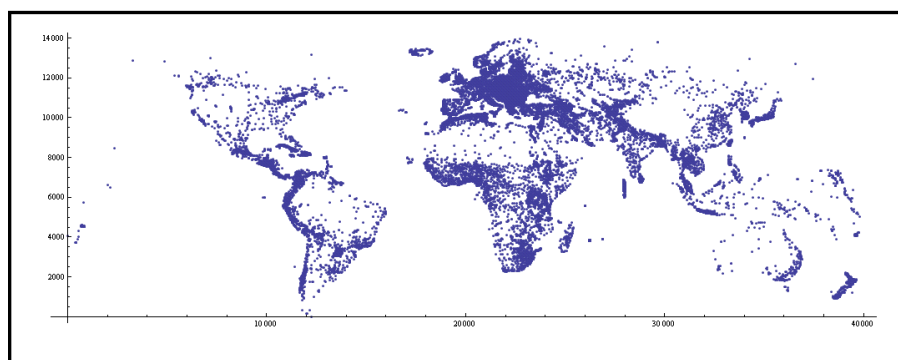


Figure 141. Répartition des géolocalisations de la base *Tageo*

17.1.1.1. Analyse fractale globale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire

La structure d'un planisphère est telle que deux biais apparaissent dans l'estimation de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées. Le premier concerne sa forme : le planisphère est clairement rectangulaire dans le sens où l'on peut y placer deux carrés d'environ 20 000 km de côté (dans le cas d'une projection cylindrique). Ainsi, si le carré mesurant la dimension fractale possède un côté dont la taille est supérieure à 20 000 km, il comptera systématiquement deux carrés. Ce biais est dû au fait que l'on travaille sur un objet qui, normalement, s'organise en trois dimensions (latitude, longitude, altitude) avec une projection en deux dimensions. Ainsi, le calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes cubiques éviterait ces deux biais. Toutefois, pour ne pas compliquer davantage le problème, dans tout ce chapitre, les dimensions fractales continueront à être mesurées sur des objets en deux dimensions. Le biais dû à la courbure de la Terre est donc systématiquement prégnant dans toutes les analyses fractales qui vont être réalisées, ce qui ne devrait pas poser problèmes pour interpréter les résultats.

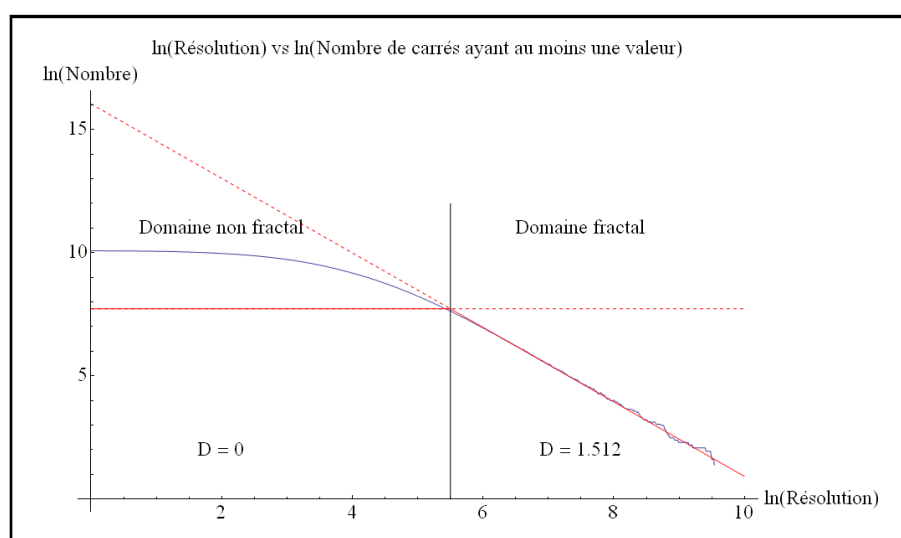


Figure 142. Analyse fractale globale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire

Remarque importante. Dans toutes les figures de ce chapitre, il existe une véritable « zone de transition » beaucoup plus importante que sur les autres cas présents dans cette thèse. Ainsi, dans ce chapitre, les échelles de coupure établies sur les graphiques ne correspondent pas à l'échelle de transition, mais à l'échelle à partir de laquelle la dimension fractale devient constante. Dans le cas de la figure 142, la zone de transition commence vers $\ln(\varepsilon) = 2,5$ et s'achève vers $\ln(\varepsilon) = 5,5$ (l'échelle de coupure retenue).

Nombre de localisation	24 272
Échantillon	98 % de la base de données
Nombre d'habitants	2 069 530 000
Échelle de coupure	245 km
Échelle maximale	16 318 km
Dimension fractale	$1,512 \pm 0,003$

Figure 143. Paramètres de la structure fractale globale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire

La Figure 142 et la Figure 143 présentent les résultats obtenus à partir de la Figure 141. Une nouvelle fois, la loi obtenue est une loi du type transition fractal - non fractal. Les deux régimes se distinguent clairement. D'une part, on observe un régime où la dimension fractale est nulle. D'autre part, après une longue transition, on obtient une dimension fractale constante d'environ 1,512. Il est évident que cette analyse peut être complétée par une étude locale, à l'instar de celle réalisée pour les châteaux.

17.1.1.2. Analyse fractale locale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire

La Figure 144 donne les paramètres de l'analyse de la dimension fractale locale. Contrairement à l'étude de la répartition des châteaux, dans ce chapitre, il sera systématiquement étudié la huitième grille afin d'avoir une grille suffisamment proche de l'échelle de coupure observée dans l'analyse globale. La Figure 145 montre les variations locales de la dimension fractale dans chacune de 1 520 carrés composant la grille d'analyse. Cette répartition ne montre qu'aucune structure particulière : aucun centre particulier ne ressort.

Taille de carrés	311 km
Nombre de carrés	1 520
Dimension fractale moyenne	0,225
Écart-type	0,263

Figure 144. Paramètres de la dimension fractale locale

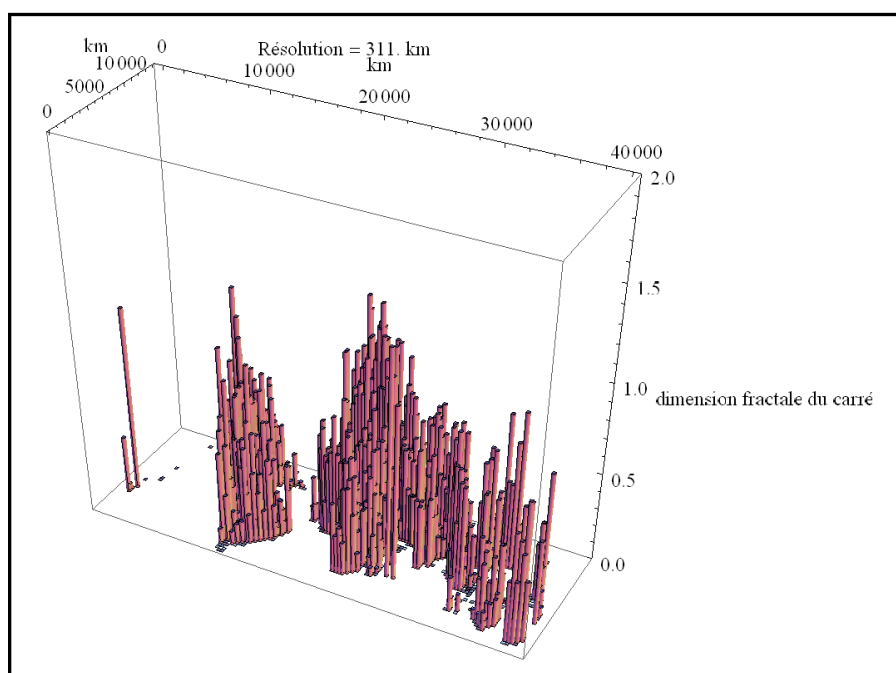


Figure 145. Dimension fractale locale contenue dans chaque carré

17.1.1.3. Analyse locale du nombre d'habitants à l'échelle planétaire

À l'instar du paragraphe précédent, on peut effectuer une analyse locale du nombre d'habitants contenu dans chacune des cases (Figure 146) qui est une méthode de représentation connue sous le nom de carte par prismes et reliefs statistique (Noin et Thumerelle, 1993, p. 36-37). Elle permet de trouver une structure largement connue puisque les pics de population correspondent aux grands foyers de peuplement à l'échelle du monde. Ainsi, une méthode d'agrégation relativement simple permet de construire une structure spatiale relativement complexe fait de « vides » et de « pleins ». Cela signifie que dans une analyse fractale, à l'échelle du monde, le maillage permet d'estimer le nombre d'habitants d'une agglomération carrée. Évidemment, pour éviter les biais, il faudrait connaître la répartition de la totalité de la population à l'échelle du monde, ce qui est à l'heure actuelle impossible.

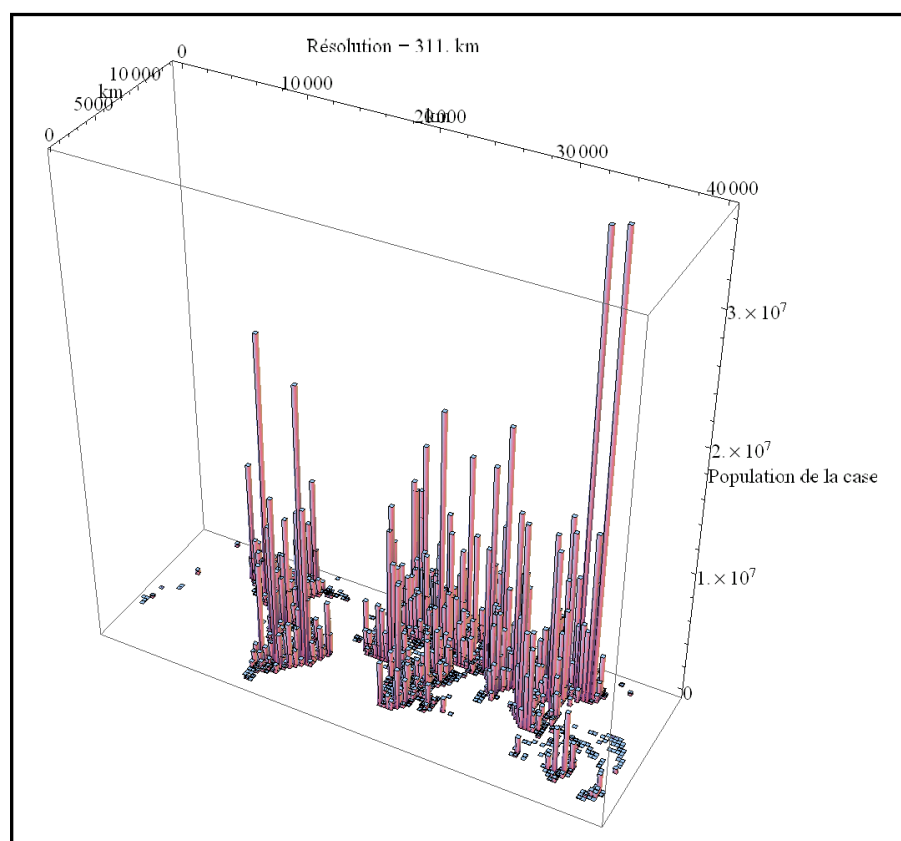


Figure 146. Structure locale de la répartition de la population à l'échelle du monde

Pour conclure, la Figure 147 montre que la dimension fractale locale et le nombre d'habitants local sont liées une nouvelle fois par une relation linéaire hautement significative. En effet, la dimension fractale travaille sur les lieux, et non sur le nombre d'habitants en ces lieux. Toutefois, on peut s'interroger sur la nature de la distribution du nombre d'habitants, n'est-elle pas fractale ?

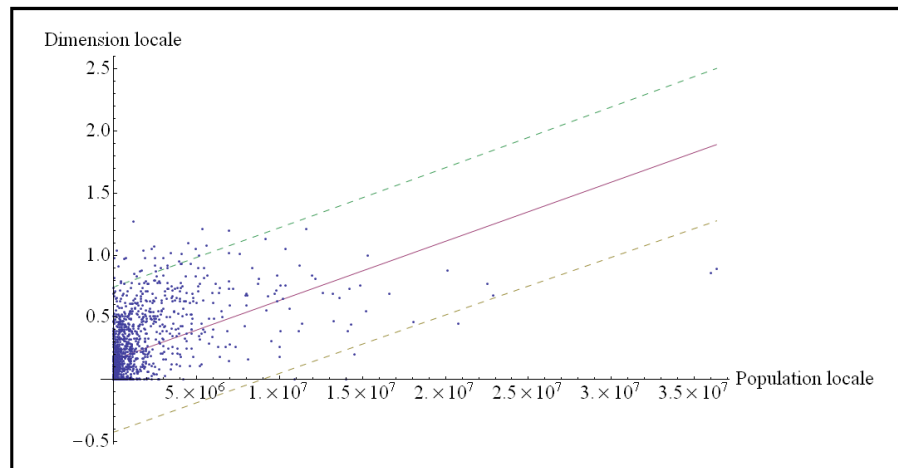


Figure 147. Projection du nuage de points de la population locale et de la dimension fractale locale

$$D = 4,766 \times 10^{-8} (\pm 0,207 \times 10^{-8}) P$$

avec $N = 1\,518$ carrés et une probabilité supérieure à 10^{-3} ($t = 23,050$)

17.1.1.4. Loi rang - taille et distribution parétienne

Pour répondre à cette interrogation, il faudra développer d'autres considérations. Dans le cas des données brutes, l'étude de la distribution statistique du nombre d'habitants est impossible, car si les séries rang - taille sont continues au niveau de chaque État, ce n'est plus le cas à l'échelle du monde. Ainsi, il ne suffit pas d'ordonner la totalité des données de la base *Tageo* pour obtenir une loi rang - taille et une distribution statistique parétienne à l'échelle du monde. Il faut nécessairement se munir d'un seuil de population à partir duquel on peut réaliser une telle étude à l'échelle planétaire.

17.1.2. Données avec un filtre de population à 144 000 habitants

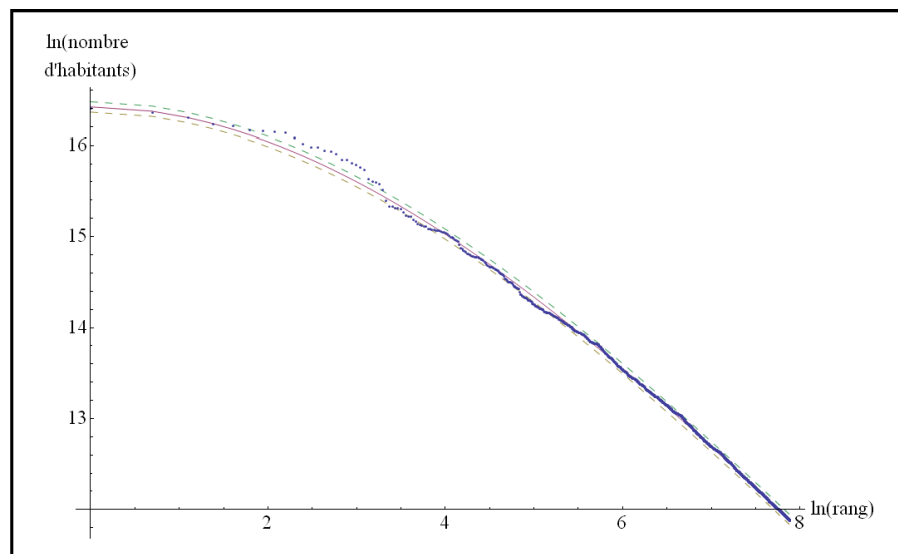
Il est difficile de fixer un seuil entre les structures urbaines et les structures rurales, même s'il apparaît clairement dans certaines distributions rang - taille (Pumain, 1982 ; Moriconi-Ébrard, 1994). Il n'est pas évident de les projeter à l'échelle du monde. Un exemple simple permet de le comprendre. Peut-on prendre le seuil de population urbain-rural de la Chine pour étudier le territoire du Belize ? La réponse est sans conteste négative. « Que ce soient 100 000, 500 000 ou 1 000 000 d'habitants, les seuils retenus sont de toute manière beaucoup plus élevés pour servir à une étude générale de l'urbanisation » (Moriconi-Ébrard, 1994, p. 9). Toutefois, la base *Tageo* permet d'obtenir une série continue sur une gamme importante de population urbaine à l'échelle mondiale. Le seuil de cette dernière correspond au nombre d'habitants le plus élevé au niveau des 300^e rangs. En effet, si l'on prend toutes les valeurs des rangs n°300 de la base, et que l'on prend la valeur maximale de cette série, on obtient le seuil à partir duquel la série est étudiable. Dans ce cas, ce seuil est fixé par le 300^e rang de la Chine, à savoir un nombre de 144 300 habitants. On peut donc étudier une série continue allant du rang 1 au rang 2 668 (qui est celui du seuil fixé). Cette série pourra bien évidemment être une nouvelle fois étudiée via une loi rang - taille et une distribution parétienne, mais en plus, on peut projeter la répartition des lieux correspondants à ces relations et en effectuer une analyse fractale.

17.1.2.1. Loi rang - taille et distribution parétienne

Le classement obtenu avec un seuil de 144 300 habitants comporte 2 668 villes. Ce paragraphe essaiera d'en décrire les principales caractéristiques à travers une loi rang - taille d'une part, une distribution parétienne d'autre part.

■ Loi rang - taille à un seuil de 144 300 habitants

La Figure 148 représente le classement rang - taille obtenu. Elle ne correspond pas à un ajustement linéaire, ni à un ajustement à un polynôme du second degré qui avait été observé sur les 435 premières conurbations du monde d'après le classement de l'ONU (Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009), mais à un polynôme du troisième degré de la forme $y = d + bx^2 + ax^3$. Bien que significatif, le terme en cx ne semble pas utile, car sa suppression permet d'obtenir un ajustement de meilleur qualité. Autrement dit, plus l'échantillon acquiert une certaine taille, plus le simple modèle linéaire est difficilement acceptable pour définir les relations rang - taille. Qu'en est-il de la relation entre loi rang - taille et distribution de Pareto dans ce cas ?



$$\ln P = 16,417(\pm 0,004) - 0,101(\pm 0,001)\ln^2 r + 0,004(\pm 0,001)\ln^3 r$$

Figure 148. Loi rang - taille à l'échelle du monde avec un seuil de 144 300 habitants

■ Distribution parétienne à un seuil de 144 300 habitants

Les données filtrées présentent un échantillon beaucoup plus important par rapport à ceux qui ont été étudiés dans le chapitre précédent. En effet, si la relation rang - taille est devenue plus complexe, ce n'est pas le cas de l'exposant α de Pareto. La relation observée (Figure 149) montre une loi de puissance (figure de gauche), confirmée par un ajustement linéaire de très bonne qualité (figure de droite).

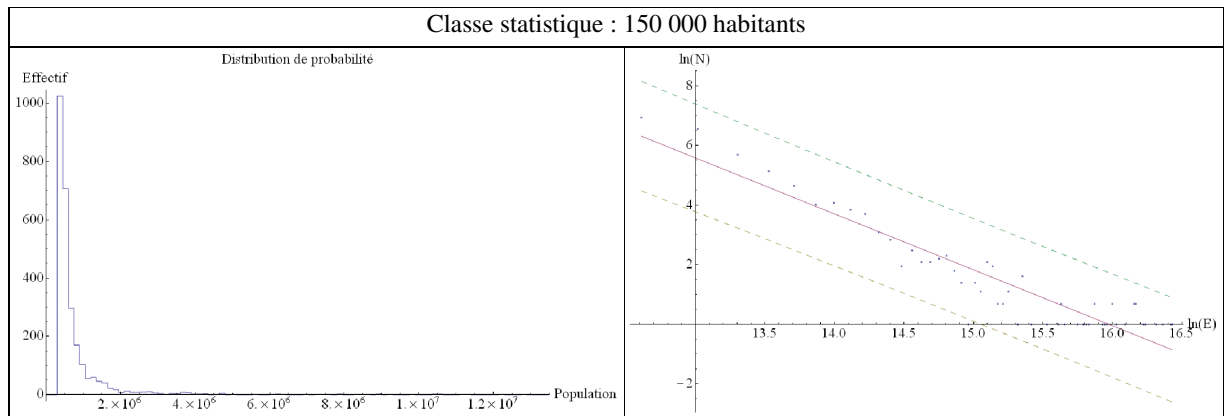


Figure 149. Distribution parétienne observée

Dès lors, on pourrait penser que l'exposant α de Pareto devait, en principe, être un meilleur indicateur que l'ajustement d'une loi rang - taille, car la relation linéaire se maintient à la différence de celle de la loi rang - taille. Malheureusement, les résultats présentés dans la Figure 150 montrent le contraire : les exposants α de Pareto varient en fonction du pas (ou de la classe statistique) choisi. Il faut remarquer que la classe statistique correspond ici à une résolution ε . Ce résultat est surprenant, car si les propriétés scalantes de la loi de Pareto sont connus depuis longtemps (Mandelbrot, 1963 ; Zajdenweber, 1976), le fait que l'exposant α de Pareto varie lui-même en fonction de la classe statistique à laquelle il a été estimée n'a fait l'objet d'aucun travail, du moins, si l'on prend pour référence la dernière publication de Daniel Zajdenweber (2009, p. 212-213). Les résultats ponctuels de la Figure 150 peuvent être améliorés en calculant toutes les valeurs de l'exposant α de Pareto entre 150 000 et 5 000 000 d'habitants en prenant un pas de 100 000 habitants (Figure 151). Il est clair que l'exposant α de Pareto varie explicitement en fonction de la résolution ε . Autrement dit, le cas observé ici n'est ni plus ni moins que celui de la « dynamique d'échelle » longuement détaillé dans l'étude de cas d'Avignon (cf. chapitre 8). Ainsi, il est plus pertinent de mettre l'exposant α de Pareto en fonction du logarithme de la résolution ε . Cependant, le modèle statistique est beaucoup plus difficile à établir, mais le choix peut se restreindre à quatre ajustements (Figure 151).

Classe statistique ε	Exposant α de Pareto
150 000 habitants	$1,877 \pm 0,095$
500 000 habitants	$2,355 \pm 0,162$
1 000 000 d'habitants	$2,725 \pm 0,189$
2 000 000 d'habitants	$3,530 \pm 0,213$

Figure 150. Classe statistique et exposant de Pareto

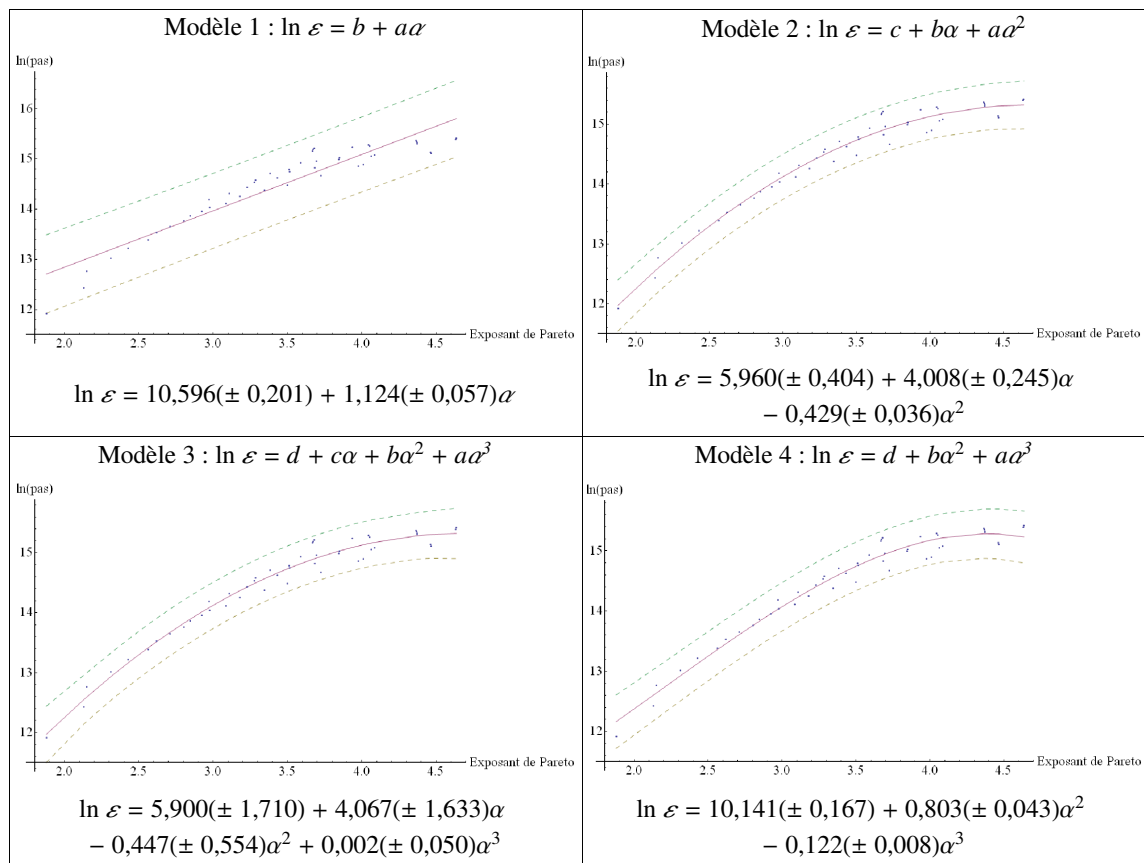


Figure 151. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto

Le modèle n°4 de Figure 151 semble être le plus séduisant, car son équation est d'une forme identique à celle de la Figure 148. Il paraît très audacieux d'essayer de mettre en correspondance, dans ce cas précis, la loi rang - taille et cette variation de l'exposant α de Pareto. Il demeure cependant possible d'affirmer que lorsque la loi rang - taille ne correspond plus à un modèle linéaire, cela signifie certainement que l'exposant α de Pareto suit lui-même un processus fractal de type « dynamique d'échelle ». Ce qui permet de comprendre, du moins en partie, pourquoi la répartition spatiale de l'établissement humain est elle-même fractale. Autrement dit, la correspondance entre la loi rang - taille et les distributions parétiennes s'effectue, non pas par un exposant α de Pareto, mais par la variation de cet exposant α de Pareto en fonction de la classe du nombre d'habitants choisie.

17.1.2.2. Analyse fractale de la répartition de l'établissement humain à un seuil de 144 300 habitants

L'analyse fractale des données brutes était un essai critiquable. Ainsi, une nouvelle analyse fractale avec un seuil de 144 300 habitants est également nécessaire pour homogénéiser les répartitions (Figure 152). Si l'on compare cette carte avec la Figure 141, on constate que l'Afrique subsaharienne et que l'Amérique du Sud étaient surreprésentées dans le premier calcul. En toute logique, la structure fractale ne change pas (Figure 153 et Figure 154). Les deux dimensions fractales observées sont du même ordre de grandeur. Une nouvelle fois, seule l'échelle de coupure est différente, car la qualité des données a été dégradée. Ainsi, on passe d'une échelle de coupure valant 245 km (Figure 143) à une autre valant 403 km (Figure 154).

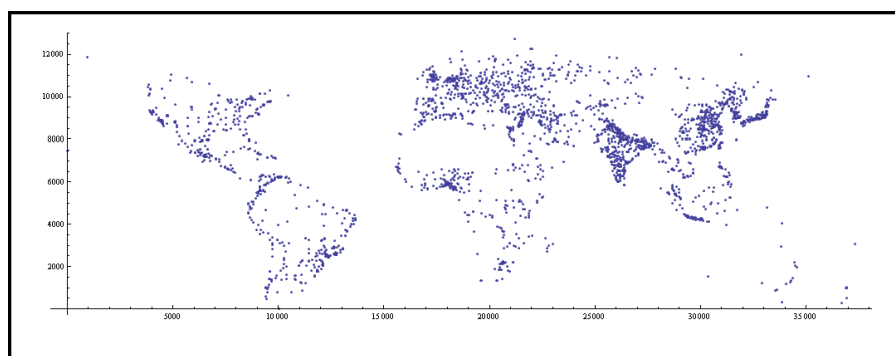


Figure 152. Répartition de l'établissement humain avec un seuil de 144 300 habitants

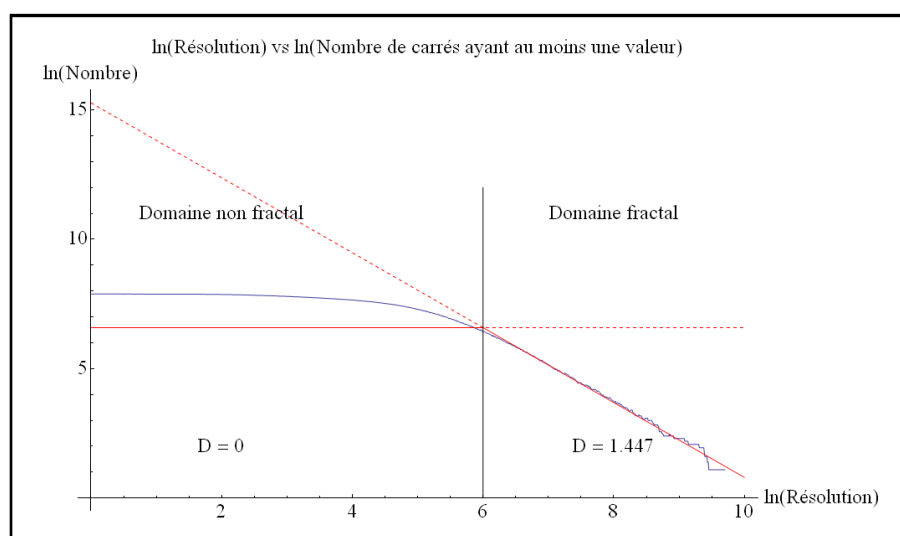


Figure 153. Analyse fractale globale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 144 300 habitants

Nombre de localisation	2 668
Échantillon	11 % de la base de données
Nombre d'habitants	1 492 590 000
Échelle de coupure	403 km
Échelle maximale	16 318 km
Dimension fractale	1,447 \pm 0,005

Figure 154. Paramètres de la structure fractale globale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 144 300 habitants

L'analyse fractale locale avec un seuil de 144 300 habitants (Figure 155 et Figure 156) est beaucoup plus lisible que celle réalisée avec les données brutes. Les principaux centres du monde apparaissent à l'instar de l'analyse effectuée sur les châteaux. Les pics de dimensions fractales observés correspondent aux foyers de peuplement évoqués dans le chapitre 15 (Figure 155 et Figure 157). La Figure 158 établit qu'il existe une relation linéaire entre la dimension fractale locale et le nombre d'habitants local. Ainsi, les résultats obtenus sur les données brutes sont confirmés dans le cas d'une répartition filtrée.

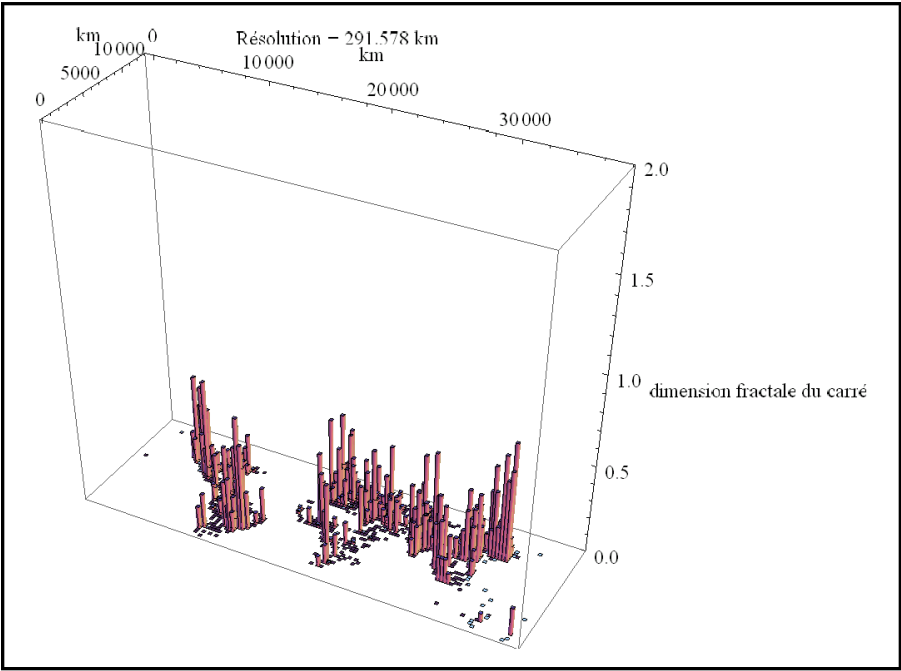


Figure 155. Dimension fractale locale contenue dans chaque carré avec un seuil de 144 300 habitants

Taille de carrés	291,578 km
Nombre de carrés	878
Dimension fractale moyenne	0,052
Écart-type	0,106

Figure 156. Paramètres de la dimension fractale locale avec un seuil de 144 300 habitants

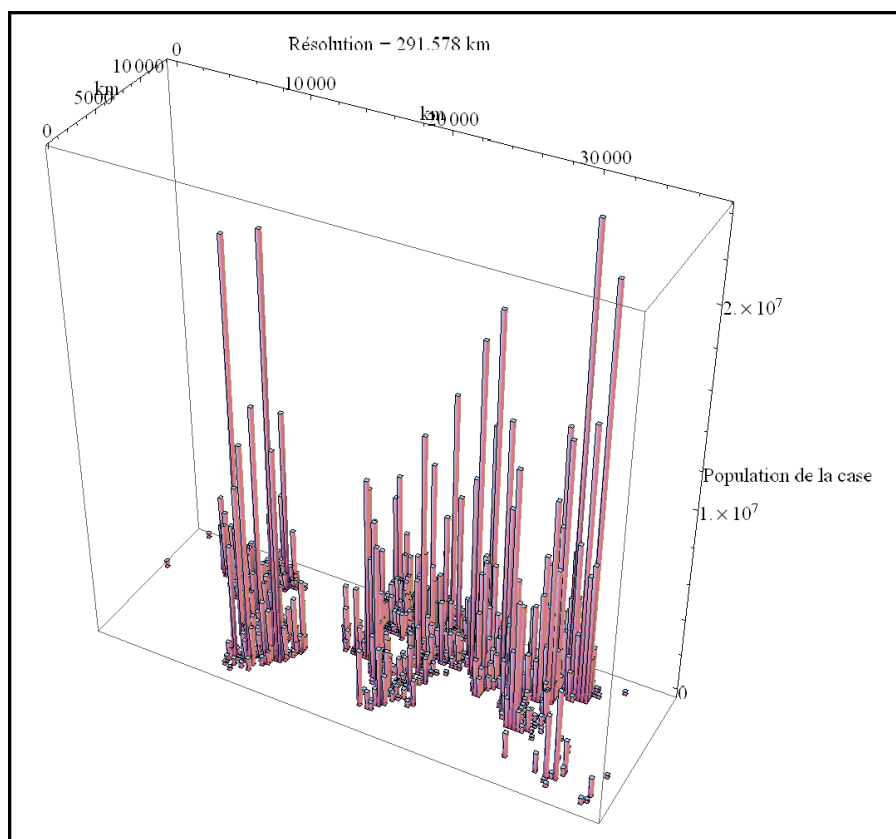


Figure 157. Structure locale de la répartition de la population à l'échelle du monde avec un seuil de 144 300 habitants

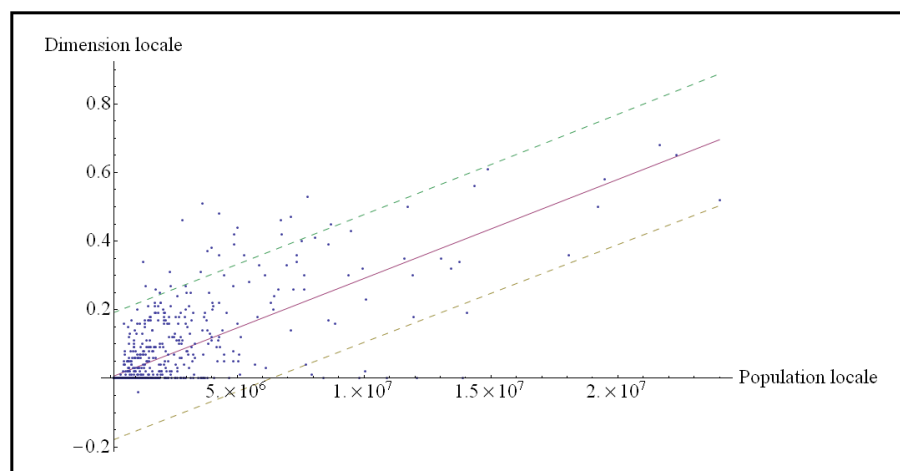


Figure 158. Projection du nuage de points de la population locale et de la dimension fractale locale avec un seuil de 144 300 habitants

$$D = 2,887 \times 10^{-8} (\pm 0,089 \times 10^{-8}) P$$

avec $N = 877$ carrés et une probabilité supérieure à 10^{-3} ($t = 32,391$)

17.1.3. Données avec un filtre de population à 1 million d'habitants

Avant de passer à la conclusion de cette partie et d'analyser la structure fractale de chaque continent, il semble très intéressant de montrer les résultats de l'analyse avec un seuil fixé à 1 million d'habitants (Figure 159). En effet, cette répartition correspond aux grands foyers de population antiques : le bassin méditerranéen, la Perse, les vallées de l'Indus et du Gange, les vallées des fleuves Jaune et Bleu, la vallée du Nil, le Nigeria, les Grands lacs africains, les Andes et le Mexique. À ceux-ci, il faut ajouter les foyers médiévaux et modernes : les grands lacs nord-américains, la Russie européenne et le Rio de la Plata. Autrement dit, la position des grandes agglomérations actuelles correspond à une inertie historique pluri-millénaire masquée par la mobilité apparente du monde contemporain et par la croissance importante des villes dites moyennes (Pumain, 1982 ; Baudelle, 2003).

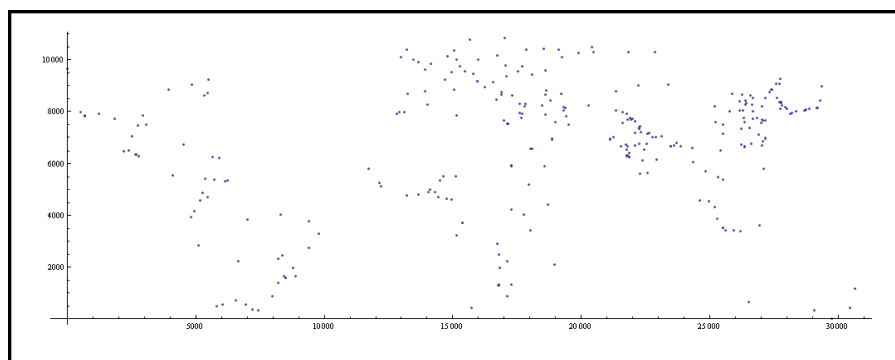
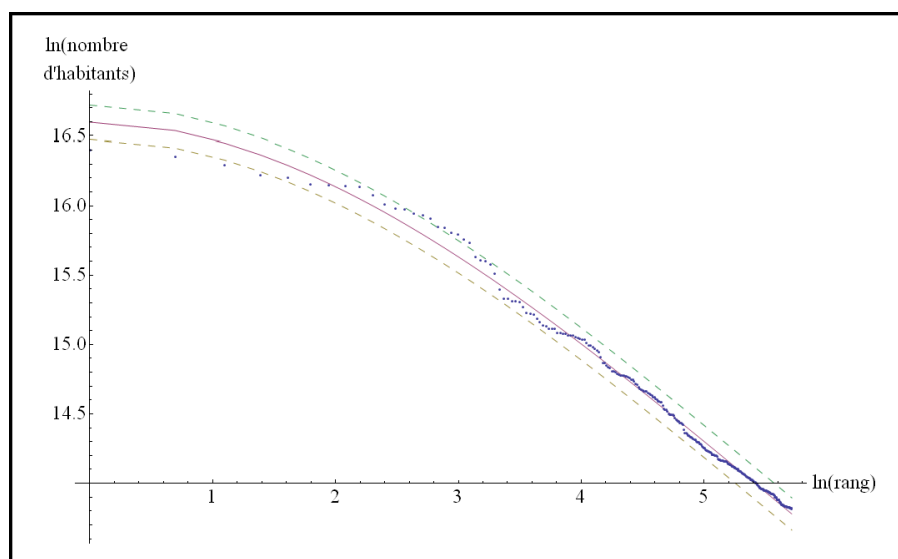


Figure 159. Répartition de l'établissement humain avec un seuil de 1 000 000 habitants

17.1.3.1. Loi rang - taille et distribution parétienne à un seuil de 1 000 000 habitants

Avec ce seuil, la nouvelle loi rang - taille contient les 303 premiers rangs. On aurait pu espérer une linéarisation de la loi comme le laisser suggérer la Figure 148, ou au moins un polynôme du second degré (Forriez et Martin, 2007 ; Forriez et Martin, 2009). Il n'en est rien (Figure 160). Le meilleur ajustement est obtenu avec un polynôme du troisième degré de la forme $y = d + bx^2 + ax^3$. Cela entraîne un exposant α de Pareto variable dont les paramètres d'étude sont précisés dans la Figure 161. La Figure 162 donne les modèles possibles. Comme dans le cas précédent, le choix va se porter sur le modèle n°4 pour conserver une unité de forme dans les équations.



$$\ln P = 16,597(\pm 0,016) - 0,013(\pm 0,003)\ln^2 r + 0,008(\pm 0,001)\ln^3 r$$

Figure 160. Loi rang - taille à l'échelle du monde avec un seuil de 1 000 000 habitants

Classe minimale	150 000 habitants
Classe maximale	2 000 000 habitants
Intervalle	100 000 habitants

Figure 161. Paramètres de l'exposant de Pareto

Modèle 1	$\ln \varepsilon = 10,190(\pm 0,301) + 1,405(\pm 0,119)\alpha$
Modèle 2	$\ln \varepsilon = 5,959(\pm 0,716) + 4,980(\pm 0,592)\alpha - 0,727(\pm 0,120)\alpha^2$
Modèle 3	$\ln \varepsilon = 7,470(\pm 3,181) + 3,020(\pm 4,060)\alpha + 0,092(\pm 1,683)\alpha^2 - 0,111(\pm 0,227)\alpha^3$
Modèle 4	$\ln \varepsilon = 9,827(\pm 0,271) + 1,340(\pm 0,129)\alpha^2 - 0,278(\pm 0,033)\alpha^3$

Figure 162. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto

17.1.3.2. Analyse fractale de la répartition de l'établissement humain à un seuil de 1 000 000 habitants

On retrouve une nouvelle fois une dimension fractale du même de grandeur que les deux précédentes avec une nouvelle dégradation de l'échelle de coupure (Figure 163). En effet, on est successivement passé de 245 à 403 km, puis de 403 à 1 097 km. Dans ce cas, l'estimation de dimensions fractales locales permet de retrouver les grands bassins de peuplement : Nigeria, Mexique, Andes, Inde, Chine, *etc.* (Figure 164).

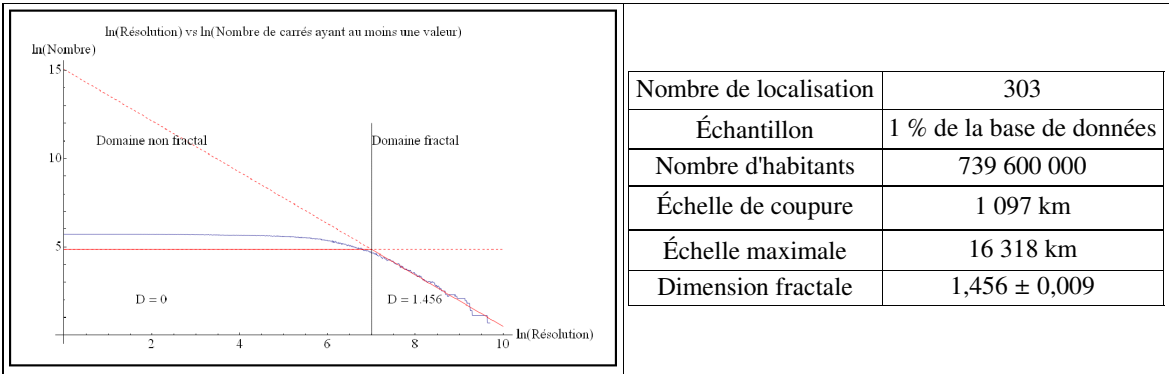


Figure 163. Dimension fractale globale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 1 000 000 habitants

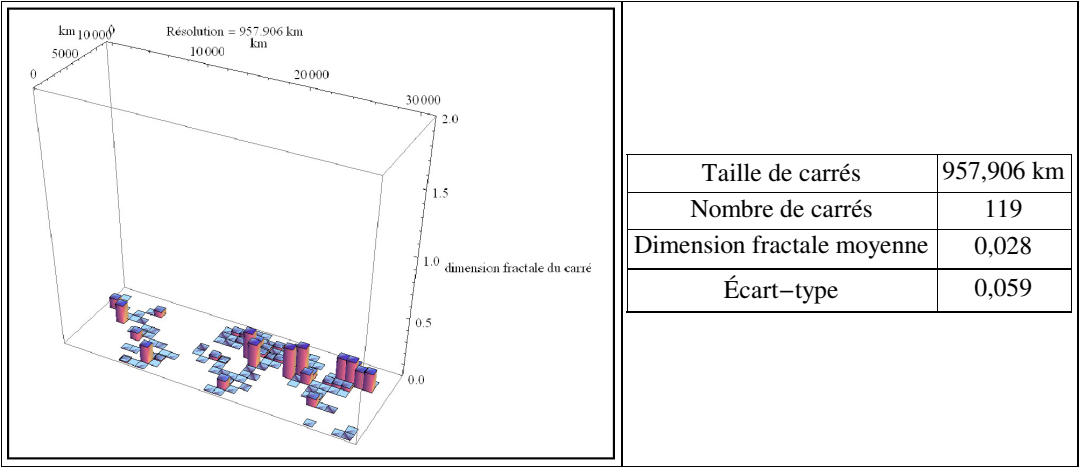


Figure 164. Dimension fractale locale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 1 000 000 habitants

De plus, une nouvelle fois, il existe une relation linéaire entre la dimension fractale locale et le nombre d'habitants du carré telle que $D = 0,751 \times 10^{-8} (\pm 0,051 \times 10^{-8}) P$ avec un effectif de 118 cases et une variable t de Student valant 14,754 (soit une probabilité associée supérieure à 10^{-3}). Si on compare ce résultat avec ceux présentés dans les Figures 147 et 158, on remarque qu'en fonction du filtre, la valeur de la pente est plus forte avec les données brutes qu'avec les données filtrées. Analogiquement, cette relation ressemble à la loi d'Ohm qui associe la tension et l'intensité d'un courant électrique avec une constante appelée résistance. Malheureusement, ici, on ne peut pas établir qui joue le rôle de la tension et qui joue le rôle de l'intensité. Toutefois, les pentes obtenues pourraient s'appeler « résistance en échelle » ou « inverse de la résistance en échelle ».

La structure multi-échelle du monde est donc doublement scalaire. Elle concerne à la fois l'exposant de Pareto caractérisant les distributions de probabilité d'avoir des lieux avec un certain nombre d'habitants, ainsi que la répartition spatiale de ces lieux. La robustesse de la forme des équations concernant les lois rang - taille et les variations de l'exposant de Pareto est tout à fait remarquable à plus d'un titre. Tout d'abord, elle prouve la fractalité intrinsèque des données concernant la population agglomérée. Ensuite, cela peut être un indice expliquant la fractalité de la répartition des lieux que l'organisation de ces populations induit. Afin de compléter l'étude, une approche par continent semble être intéressante.

17.2. À l'échelle continentale

On peut aisément appliquer les méthodes précédentes à l'échelle continentale qui présente un double intérêt. Il s'agit d'abord de diviser les lois rang - taille avec des seuils de continuité plus petit, chaque continent possédant son propre seuil. Ainsi, le seuil de continuité identifié précédemment va varier en fonction de l'ensemble continental considéré, donc de ses spécificités de peuplement. Enfin, cette échelle permet d'estimer des dimensions fractales sans le biais introduit par l'océan. Quatre grands ensembles ont été choisis : l'Eurasie, l'Amérique, l'Afrique et l'Océanie.

17.2.1. L'Eurasie

Le découpage continental permet d'atteindre des seuils de population beaucoup plus bas par rapport à l'échelle mondiale, en suivant le même raisonnement que celui qui a permis la construction du seuil à 144 300 habitants à l'échelle du monde. Ce n'est pas le cas ici, car le seuil mondial est fixé par la Chine. Par conséquent, le seuil du continent eurasiatique est le même que celui du monde. Il est étonnant de constater que la dimension fractale globale de ce continent soit celle estimée pour le monde (Figure 165). Les dimensions fractales locales permettent une nouvelle fois de retrouver les grands foyers historiques de population sur ce continent (Figure 166).

Par contre, la structure fractale de la population est légèrement différente. En effet, dans ce cas, un polynôme du second degré est le meilleur ajustement estimé pour la loi rang - taille (Figure 167). Autrement dit, le meilleur ajustement pour la variation de l'exposant de Pareto (dont les paramètres sont résumés au sein de la Figure 168) semble être le modèle n°2 de la Figure 169. Pour finir, on peut ajouter que la relation entre la dimension fractale locale et le nombre d'habitants local est toujours de la même nature que pour l'analyse à l'échelle mondiale. Dans ce cas, on observe $D = 2,978 \times 10^{-8} (\pm 0,104 \times 10^{-8}) P$ avec un effectif de 905 cases et une variable t de Student valant 28,655 (soit une probabilité associée supérieure à 10^{-3}).

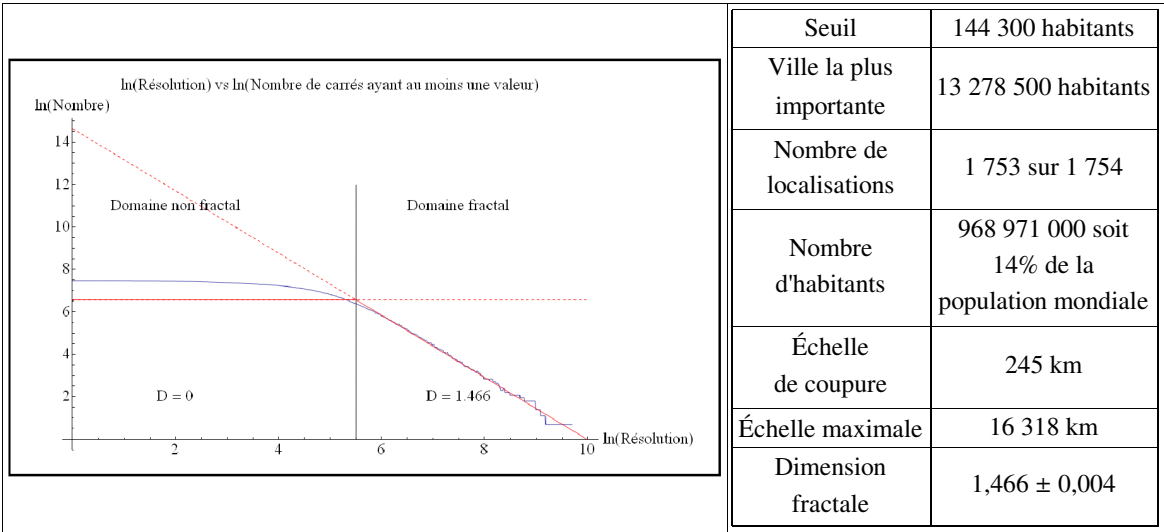


Figure 165. Dimension fractale globale du continent eurasiatique

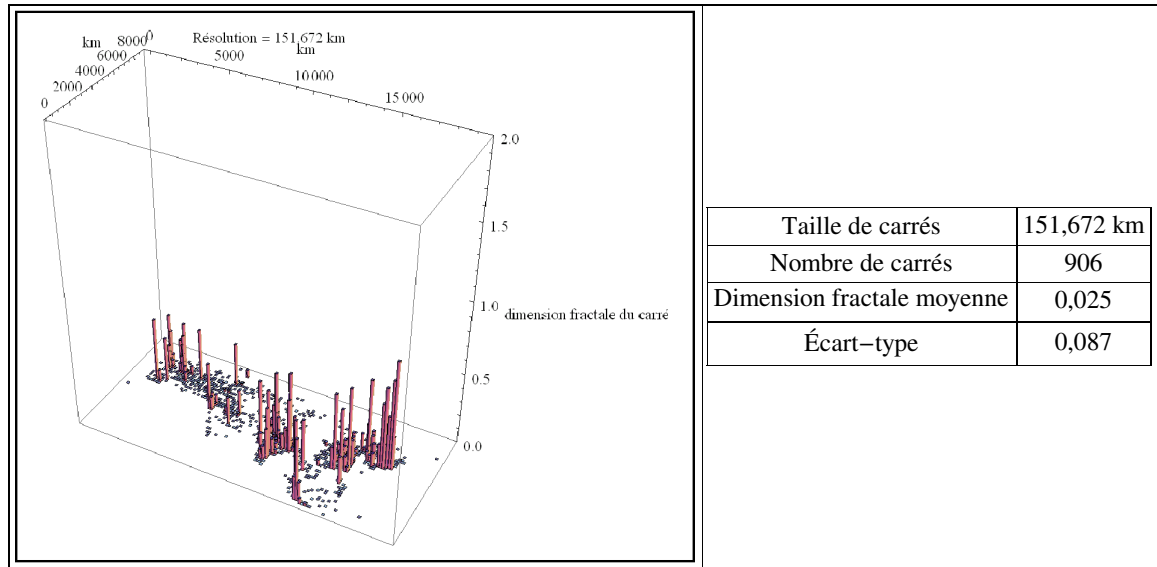
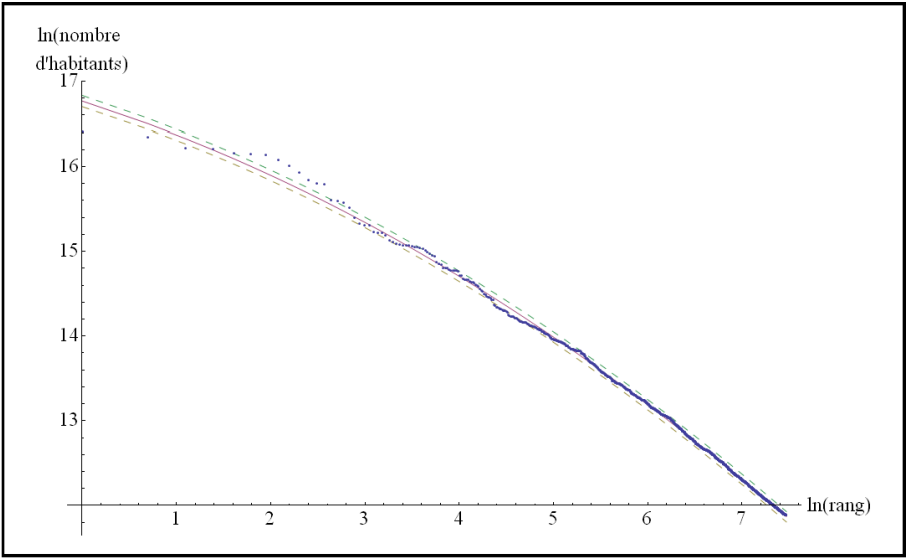


Figure 166. Dimensions fractales locales du continent eurasiatique



$$\ln P = 16,766(\pm 0,010) - 0,353(\pm 0,004)\ln r - 0,041(\pm 0,001)\ln^2 r$$

Figure 167. Loi rang - taille sur la répartition des établissements humains à l'échelle du continent eurasiatique

Classe minimale	150 000 habitants
Classe maximale	4 000 000 habitants
Intervalle	100 000 habitants

Figure 168. Paramètres de l'exposant de Pareto

Modèle 1	$\ln \varepsilon = 10,845(\pm 0,195) + 1,093(\pm 0,054)\alpha$
Modèle 2	$\ln \varepsilon = 6,810(\pm 0,377) + 3,626(\pm 0,229)\alpha - 0,378(\pm 0,034)\alpha^2$
Modèle 3	$\ln \varepsilon = 8,998(\pm 1,326) + 1,487(\pm 1,265)\alpha + 0,285(\pm 0,388)\alpha^2 - 0,066(\pm 0,038)\alpha^3$
Modèle 4	$\ln \varepsilon = 10,546(\pm 0,738) + 0,738(\pm 0,037)\alpha^2 - 0,110(\pm 0,007)\alpha^3$

Figure 169. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto

La suite de cette partie propose de poser les résultats obtenus sur les trois autres ensembles continentaux.

17.2.2. L'Amérique

L'Amérique est le seul continent qui possède la totalité des sites anthropiques géolocalisés au seuil fixé. Toutefois, il faut remarquer que la Guyane française, ainsi que les différentes îles européennes des Antilles ne font pas parties du classement. Par exemple, la population de la Guyane a été « noyée » dans les statistiques françaises. Ce complément à apporter à la base de données est minime. Aussi, on suppose qu'il n'intervient pas dans les résultats présentés.

La Figure 170 montre que la dimension fractale globale du continent américain est nettement inférieure à celle du monde. Cela est sans nul doute dû à son peuplement tardif par rapport au reste du monde. Malgré tout, la Figure 171 établit bien les foyers de populations primitifs (Amérique centrale et Rio de la Plata).

L'ajustement de la loi rang - taille est un polynôme du second degré (Figure 172) comme dans le cas de l'Eurasie. On peut donc considérer que le meilleur ajustement pour la variation de l'exposant de Pareto (dont les paramètres sont résumés dans la Figure 173) est le modèle n°2 de la Figure 174.

De plus, pour ce cas la relation entre la dimension fractale locale et le nombre d'habitants local, on observe $D = 4,206 \times 10^{-8} (\pm 0,222 \times 10^{-8}) P$ avec un effectif de 548 cases et une variable t de Student valant 18,962 (soit une probabilité associée supérieure à 10^{-3}).

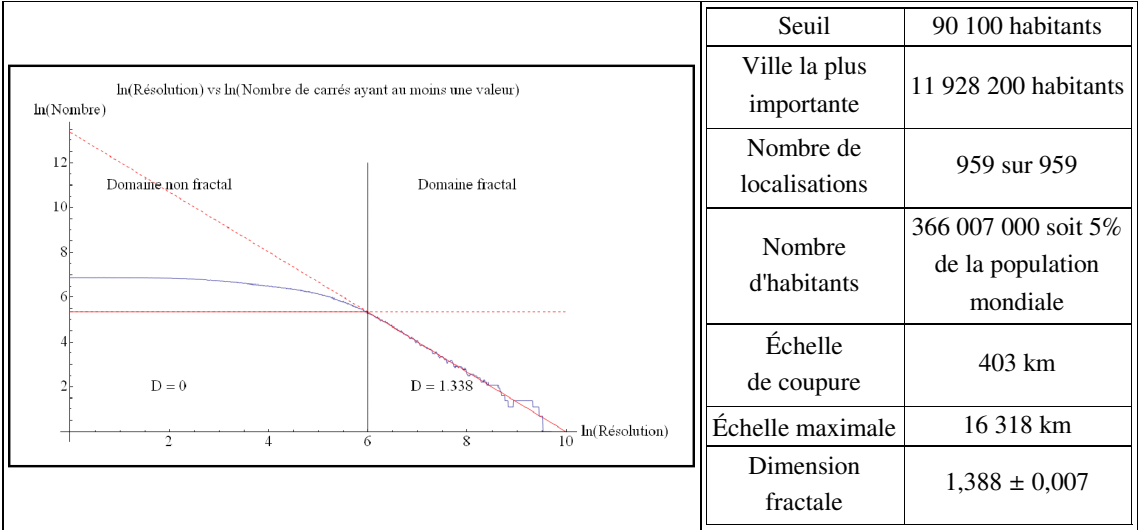


Figure 170. Dimension fractale globale du continent américain

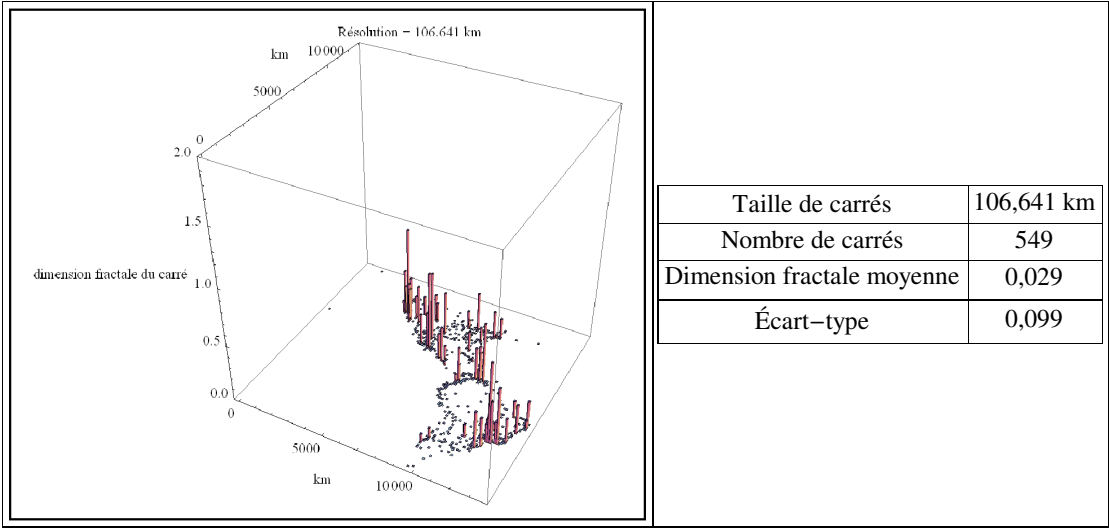
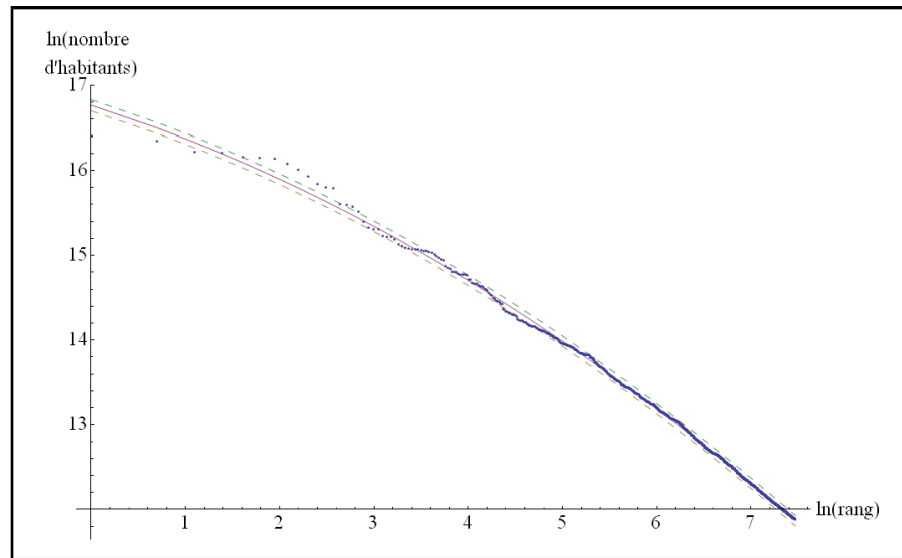


Figure 171. Dimensions fractales locales du continent américain



$$\ln P = 16,403(\pm 0,017) - 0,487(\pm 0,007)\ln r - 0,034(\pm 0,001)\ln^2 r$$

Figure 172. Loi rang - taille sur la répartition des établissements humains à l'échelle du continent américain

Classe minimale	150 000 habitants
Classe maximale	5 000 000 habitants
Intervalle	100 000 habitants

Figure 173. Paramètres de l'exposant de Pareto

Modèle 1	$\ln \varepsilon = 10,811(\pm 0,139) + 1,112(\pm 0,041)\alpha$
Modèle 2	$\ln \varepsilon = 8,397(\pm 0,248) + 2,840(\pm 0,170)\alpha - 0,286(\pm 0,028)\alpha^2$
Modèle 3	$\ln \varepsilon = 7,364(\pm 0,754) + 4,035(\pm 0,836)\alpha - 0,709(\pm 0,293)\alpha^2 + 0,048(\pm 0,033)\alpha^3$
Modèle 4	$\ln \varepsilon = 10,963(\pm 0,125) + 0,695(\pm 0,039)\alpha^2 - 0,108(\pm 0,008)\alpha^3$

Figure 174. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto

17.2.3. L'Afrique

Berceau de l'humanité, le réseau africain a une dimension fractale globale très proche de celle à l'échelle du monde, malgré sa faible population totale (Figure 175). La Figure 176 établit une nouvelle fois les grands foyers de population : Afrique du Nord, le bassin du Nil, les Grands Lacs africain et le Nigeria.

L'ajustement de la loi rang - taille (Figure 177) est encore un polynôme du second degré. On peut donc considérer que le meilleur ajustement pour la variation de l'exposant de Pareto (dont les paramètres sont résumés dans la Figure 178) est encore le modèle n°2 de la Figure 179.

Une nouvelle fois, il existe une relation linéaire entre la dimension fractale locale et le nombre d'habitants local. Dans ce cas, on observe $D = 5,086 \times 10^{-8} (\pm 0,381 \times 10^{-8}) P$ avec un effectif de 1 116 cases et une variable t de Student valant 13,362 (soit une probabilité associée supérieure à 10^{-3}).

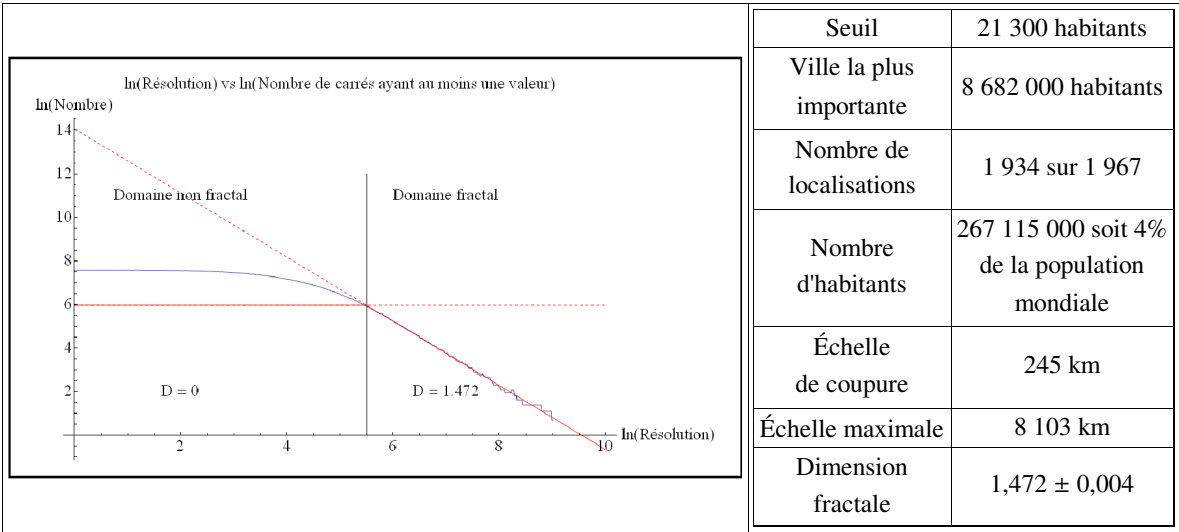


Figure 175. Dimension fractale globale du continent africain

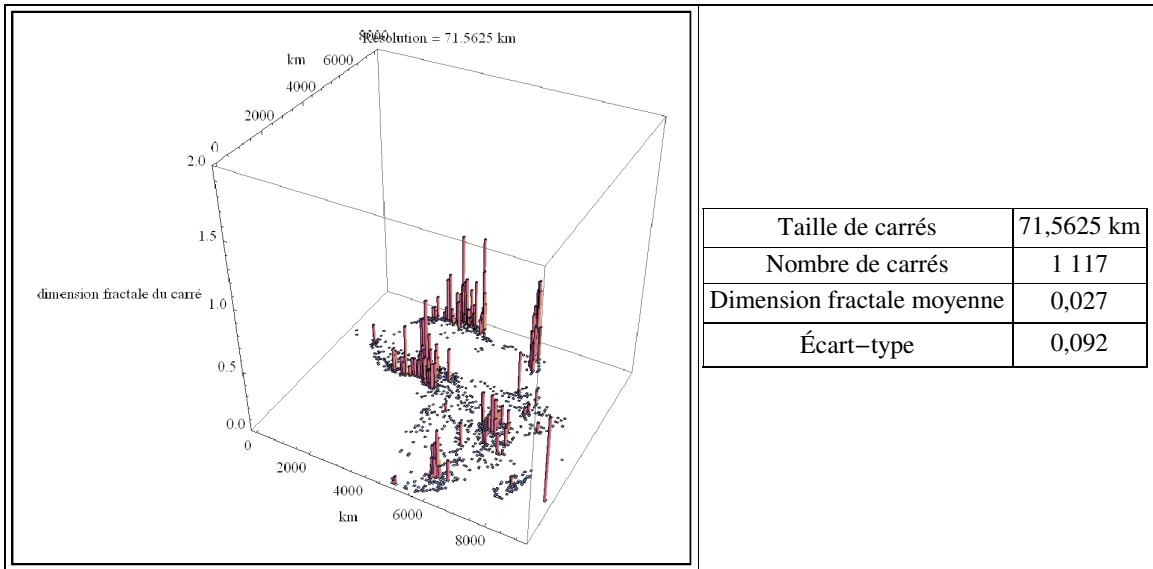
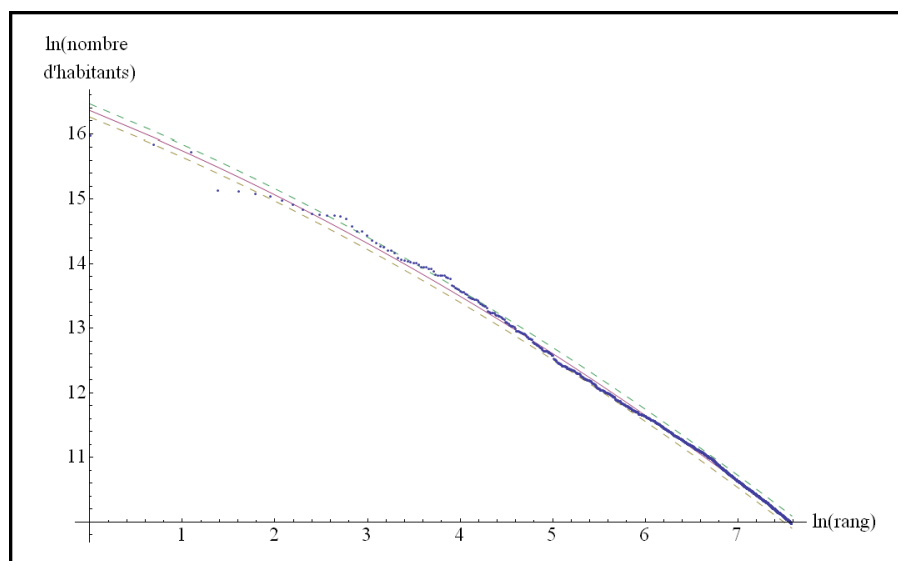


Figure 176. Dimensions fractales locales du continent africain



$$\ln P = 16,362(\pm 0,015) - 0,580(\pm 0,005)\ln r - 0,034(\pm 0,001)\ln^2 r$$

Figure 177. Loi rang - taille sur la répartition des établissements humains à l'échelle du continent africain

Classe minimale	25 000 habitants
Classe maximale	4 000 000 habitants
Intervalle	100 000 habitants

Figure 178. Paramètres de l'exposant de Pareto

Modèle 1	$\ln \varepsilon = 10,552(\pm 0,211) + 0,967(\pm 0,054)\alpha$
Modèle 2	$\ln \varepsilon = 7,605(\pm 0,302) + 2,887(\pm 0,186)\alpha - 0,282(\pm 0,027)\alpha^2$
Modèle 3	$\ln \varepsilon = 3,759(\pm 0,446) + 7,039(\pm 0,459)\alpha - 1,638(\pm 0,147)\alpha^2 + 0,137(\pm 0,015)\alpha^3$
Modèle 4	$\ln \varepsilon = 10,510(\pm 0,204) + 0,597(\pm 0,050)\alpha^2 - 0,084(\pm 0,009)\alpha^3$

Figure 179. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto

17.2.4. L'Océanie

La structure de l'Océanie qui compte environ 1 700 îles dont 500 habitées (Dumont, 2004), est incomplète, car elle comporte des milliers d'îles dépendant de la France, du Royaume-Uni et des États-Unis, pour ne citer que les principaux, que la base *Tageo* ne prend pas en compte puisqu'elles ne sont pas souveraines, ce qui fait que le nombre de leurs habitants est rattaché à la métropole dont elles dépendent. Le problème apparaît clairement : que pèse le nombre d'habitants à Papeete par rapport à celui d'une ville moyenne de la métropole française ? Ainsi, toutes ces données sont absentes de la base. En ayant conscience de ce problème, une analyse continentale de l'Océanie peut être menée.

Malgré tout, la dimension fractale globale du réseau océanien est beaucoup plus proche de celle à l'échelle du monde que ne l'est celle à l'échelle de l'Amérique (Figure 180). On aurait pu penser que la structure insulaire spécifique à ce continent allait perturber les résultats que l'on a obtenus jusqu'à présent sur les autres continents. La Figure 181 montre le contraire : on établit les différents foyers de populations : la côte est de l'Australie, la Nouvelle-Zélande, les Fiji et la Polynésie.

L’ajustement obtenu pour la loi rang - taille est très particulier. En effet, contrairement aux autres continents, l’Océanie possède un seuil très bas de 227 habitants, ce qui permet d’observer vraisemblablement la rupture entre l’urbain et le rural. La Figure 182 illustre à ce propos que deux ajustements linéaires peuvent être établis, marquant bien deux régimes, à l’instar des transitions observées sur différentes lois d’échelle. Le « rang de coupure » est le numéro 244 ; il correspond à une population de 7 300 habitants. Cette information permet de mieux paramétrer la courbe de la variation de l’exposant de Pareto en choisissant une classe minimale proche de la valeur de la population au rang critique (Figure 183). Le choix du modèle dans la Figure 184 est donc beaucoup évident que dans les autres continents. Cependant, il ne semble pas déraisonnable de penser qu’il s’agit encore une fois du modèle n°2 (Figure 184), car l’alignement des points ne forme pas une droite (Figure 184). De plus, il s’agit du modèle que l’on a systématiquement rencontré dans les trois autres continents. Tous ces résultats sont bien sûr à confirmer en ajoutant les données manquantes.

L’Océanie est le seul cas où la relation linéaire entre la dimension fractale locale et le nombre d’habitants local n’est pas significatif puisque l’on observe $D = 2,092 \times 10^{-8} (\pm 0,213 \times 10^{-8}) P$ avec un effectif de 341 cases et une variable t de Student valant 0,981 (soit une probabilité associée inférieure à 10^{-1}).

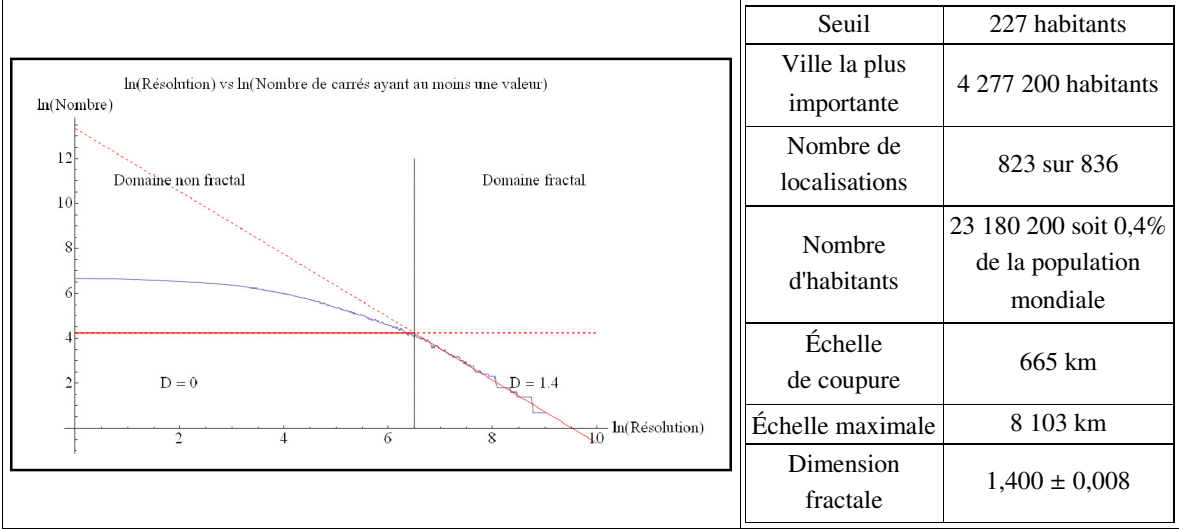


Figure 180. Dimension fractale globale du continent océanien

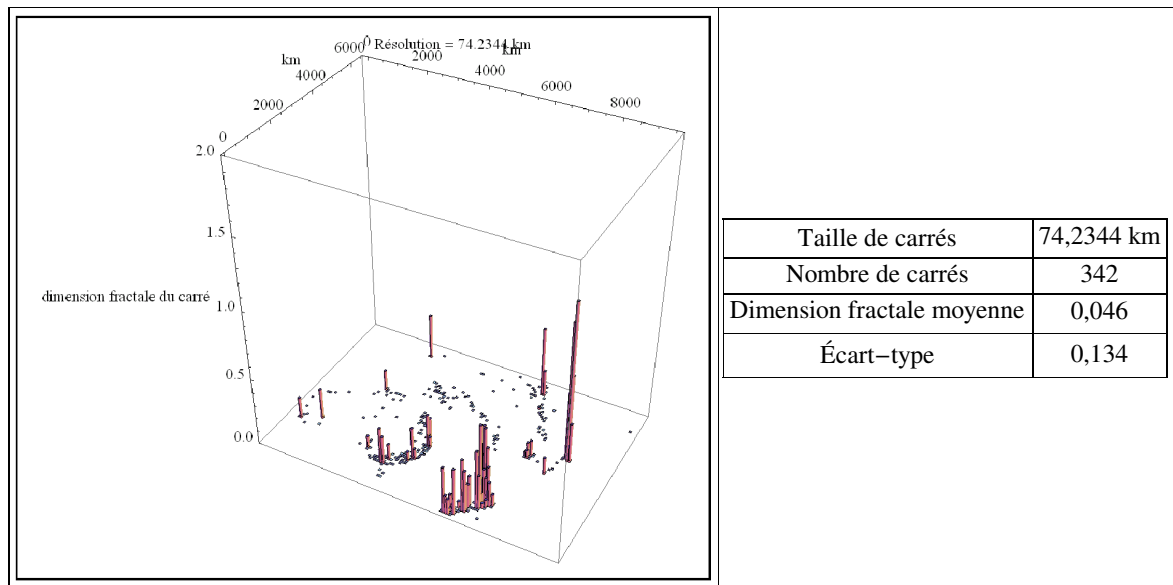
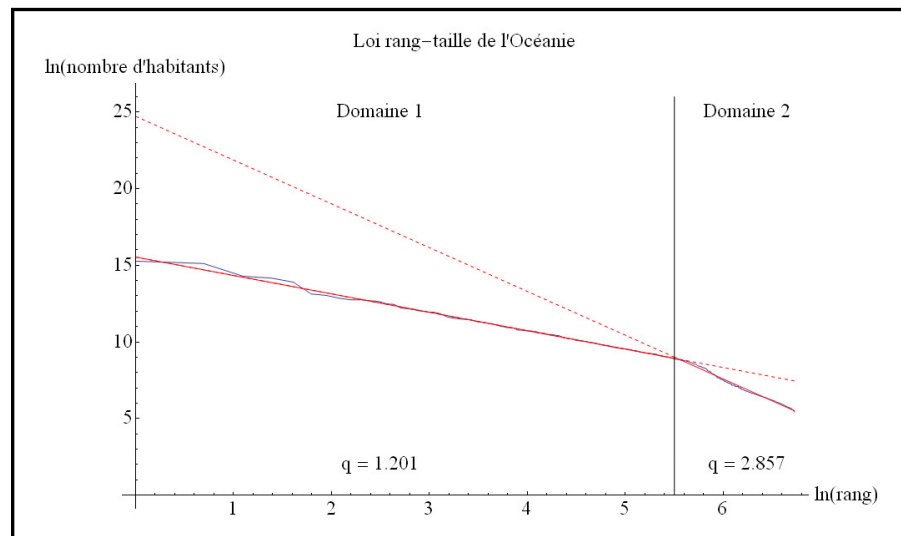


Figure 181. Dimensions fractales locales du continent océanien



Domaine n°1 : $\ln P = 15,536(\pm 0,017) - 1,201(\pm 0,004)\ln r$ (taille de l'échantillon : 244)

Domaine n°2 : $\ln P = 24,721(\pm 0,063) - 2,857(\pm 0,010)\ln r$ (taille de l'échantillon : 592)

Transition observée : $r = 244$ et $P = 7\,300$ habitants

Figure 182. Loi rang - taille sur la répartition de l'établissement humain à l'échelle du continent océanien

Classe minimale	100 000 habitants
Classe maximale	2 000 000 habitants
Intervalle	10 000 habitants

Figure 183. Paramètres de l'exposant de Pareto

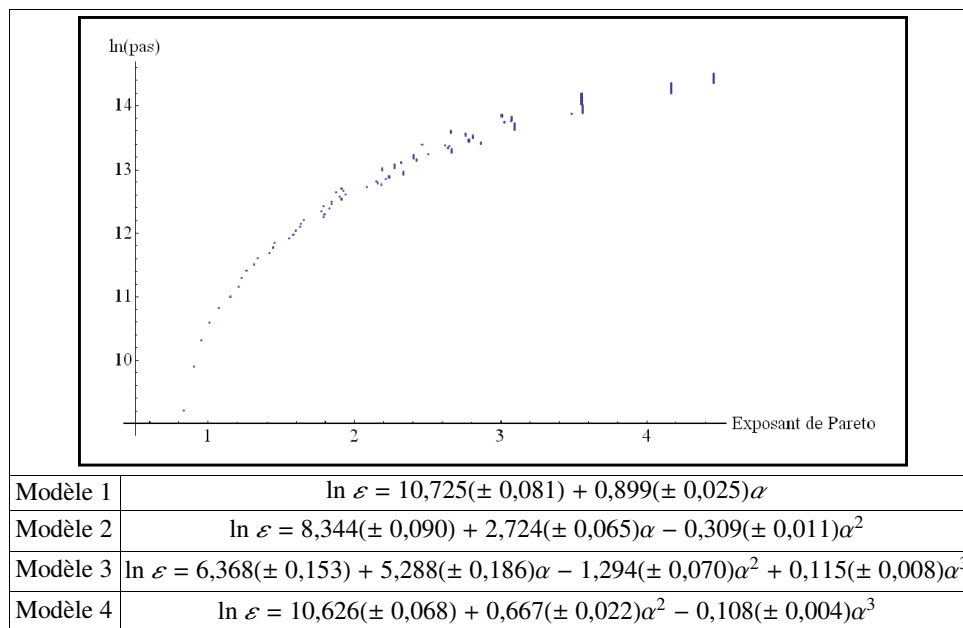


Figure 184. Représentation graphique de la variation de l'exposant de Pareto en fonction de la classe statistique et estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » de cet exposant dans le cas océanien

17.2.5. Conclusion

Ni le seuil de population, ni le seuil spatial imposé par le découpage en continent ne modifient les structures multi-échelles observées à l'échelle du monde. Certes, il existe des écarts au niveau des dimensions fractales globales, mais ils ne sont pas suffisamment significatifs. De plus, la structure rang - taille observée à l'échelle des continents montre une robustesse du point de vue de la forme des équations absolument remarquable, même s'il ne s'agit pas de la même forme des équations à l'échelle du monde dont la complexité est peut être due à l'espacement introduit par les océans. Que deviendrait cette structure si l'on recréait artificiellement la Pangée ?

L'analyse par continents a permis de préciser la localisation des foyers de peuplement historiques que l'on n'avait entre aperçus à l'échelle du monde. En effet, l'ajustement des seuils de continuité de population a permis un meilleur positionnement des lieux, avec pour conséquence d'améliorer l'approche des dimensions fractales locales. De plus, cette analyse a permis de confirmer à des échelles plus fines la fractalité des données concernant la population des lieux considérés. Ainsi, que l'on utilise le nombre d'habitants contenu dans une agglomération administrative, ou que l'on utilise le nombre d'habitants contenu dans une agglomération morphologique, au sens de François Moriconi-Ébrard (1994), la nature fractale des données a pour conséquence que le choix de la limite n'influe pas sur la localisation ponctuelle des lieux, puisque, ensuite, une analyse par comptage de boîtes carrées peut permettre une agglomération de population aussi efficace que l'agglomération morphologique. En effet, on étudie la dégradation du nombre d'habitants en fonction d'un maillage prédéterminé. Dans ce cas, la position des lieux détermine la limite de cette information. On peut donc mener une étude assez détaillée sur la structure de la répartition du nombre d'habitants en des lieux donnés à un autre niveau que l'agglomération morphologique. Ce niveau avait été appelé « niveau 5 » dans le chapitre 9. Ce niveau est donc fondamental pour l'étude de l'organisation scalo-spatiale de l'établissement humain.

Avant de conclure ce chapitre, il faut effectuer quelques calculs de dimensions fractales de la répartition de l'établissement humain à l'échelle étatique afin de vérifier la portée de ce « niveau 5 ».

17.3. À l'échelle étatique

À l'instar de l'étude sur les châteaux, on peut estimer des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique, soit 193 territoires. La Figure 185 donne les caractéristiques des mesures effectuées. Il faut noter que quatre Etats n'ont pas de dimensions fractales calculables. Il s'agit du Vatican, de Monaco, de Nauru et de Singapour, où la dimension fractale est nulle soit parce qu'il n'y a qu'un point, soit parce que les points sont si proches qu'il est impossible d'estimer une autre dimension que la dimension topologique. Tout comme avec les châteaux, on constate qu'il n'y a aucun lien entre le nombre de lieux et la dimension fractale territoriale, entre l'échelle de coupure et la dimension fractale territoriale et entre l'étendue et la dimension fractale territoriale.

La Figure 186 dresse la statistique de cette valeur. Une nouvelle dimension fractale caractéristique apparaît autour de 1,2. Cela montre une nouvelle fois que la dimension fractale a varié en fonction de la résolution, puisqu'à l'échelle du monde et à l'échelle continentale, elle valait environ 1,5. Néanmoins, à l'échelle continentale, il existait des écarts par rapport à l'échelle du monde. La Figure 187 confirme ces écarts : chaque continent possède une dimension fractale territoriale propre. Sur un pied d'égalité, on trouve l'Afrique et l'Amérique avec une dimension fractale d'environ 1,1 ; l'Eurasie possède la dimension fractale la plus élevée et l'Océanie la plus faible. Le cinquième niveau est donc loin d'être homogène. Si on prend le cas de l'Afrique, à l'échelle du monde, elle est incluse dans la dimension fractale globale d'environ 1,5 ; à l'échelle continentale, elle possède une dimension fractale globale d'environ 1,5 ; à l'échelle étatique, une dimension fractale moyenne d'environ 1,1. Le cas de l'Océanie est plus spectaculaire : 1,5 à l'échelle du monde ; 1,4 à l'échelle continentale et 0,7 à l'échelle étatique. Dans ce cadre, la dimension fractale permet la quantification de différents niveaux de l'espace géographique, mais il faut toujours garder à l'esprit que ces valeurs sont relatives à l'état d'échelle du système, dans ce cas, la résolution valant 1 km. Autrement dit, si on passait à une résolution valant 1 m, les dimensions fractales calculées changeraient.

Quoi qu'il en soit, l'articulation multi-échelle de l'espace mondial ne peut se comprendre sans la notion de « foyers historiques de population », puisque ces derniers déterminent la position des grandes agglomérations à l'échelle planétaire. Plus il y a de foyers, plus la dimension fractale semble être élevée, comme le confirme le lien formel entre la dimension fractale et le nombre d'habitants en un lieu donné. Si l'on parcourt le globe, on constate, qu'en Eurasie, il y en a au moins quatre (Balkans, Mésopotamie, Inde et Chine) ; en Amérique, au moins trois (Grands Lacs, Amérique centrale, Rio de la Plata) ; en Afrique, au moins trois (Nil, Nigeria, Grands lacs) ; en Océanie, au moins deux (Australie de l'est ; Polynésie). Les pistes de recherche sont donc nombreuses et prometteuses.

État	Nombre de lieux	Échelle de coupure (km)	Étendue (km)	Dimension fractale territoriale	Erreur	Variable <i>t</i> de Student
Afghanistan	117.	90.	812.4	1.445	0.008	172.031
Afrique du Sud	293.	90.	1352.9	1.448	0.009	163.737
Albanie	67.	33.1	170.7	1.385	0.014	99.194
Algérie	285.	54.6	1176.1	1.155	0.005	210.696
Allemagne	300.	90.	788.4	1.509	0.013	117.556
Andorre	7.	4.5	11.	0.874	0.052	16.805
Angola	36.	148.4	1107.7	1.086	0.013	83.587
Antigua-et-Barbuda	15.	2.7	19.3	0.727	0.015	50.074
Arabie Saoudite	51.	148.4	1510.2	1.179	0.013	93.248
Argentine	86.	148.4	1844.6	1.137	0.009	121.3
Arménie	300.	20.1	259.8	1.352	0.007	188.183
Australie	212.	148.4	3463.4	1.147	0.008	148.713
Autriche	287.	33.1	257.2	1.437	0.011	130.695
Azerbaïdjan	192.	33.1	365.	1.4	0.009	163.951
Bahamas	24.	90.	652.	1.075	0.018	60.508
Bahrain	11.	2.7	16.6	0.691	0.016	42.433
Bangladesh	155.	33.1	454.9	1.448	0.007	216.051
Barbade	11.	4.5	19.9	0.939	0.021	44.095
Belgique	300.	20.1	210.6	1.54	0.006	237.079
Belize	9.	33.1	127.7	0.659	0.026	25.269
Bénin	33.	33.1	252.1	0.969	0.017	56.949
Bhoutan	20.	33.1	119.1	1.017	0.028	36.264
Biélorussie	102.	90.	441.4	1.4	0.017	82.075
Birmanie	67.	90.	742.5	1.19	0.009	136.347
Bolivie	125.	148.4	1248.9	1.287	0.013	101.228
Bosnie-Herzégovine	231.	33.1	275.9	1.538	0.01	156.368
Botswana	234.	54.6	906.9	1.327	0.007	179.307
Brésil	300.	148.4	3641.	1.257	0.007	169.652
Brunei	5.	12.2	37.7	0.384	0.042	9.179
Bulgarie	240.	33.1	304.9	1.59	0.009	176.665
Burkina Faso	52.	90.	502.7	1.391	0.013	111.216
Burundi	15.	33.1	157.6	1.182	0.021	56.941
Cambodge	24.	90.	387.6	1.267	0.018	69.603
Cameroun	88.	90.	692.3	1.41	0.01	135.689
Canada	300.	148.4	2392.3	1.11	0.006	180.52
Cap Vert	17.	12.2	239.8	0.565	0.009	64.707
Chili	297.	54.6	854.1	1.11	0.005	224.214
Chine	299.	244.7	3229.2	1.309	0.007	187.426
Chypre	265.	4.5	109.9	1.243	0.004	291.588

Figure 185-1. Estimation des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique

État	Nombre de lieux	Échelle de coupure (km)	Étendue (km)	Dimension fractale territoriale	Erreur	Variable <i>t</i> de Student
Vatican	1.	22026.5	109.9	0.	0.	0.
Colombie	300.	54.6	1525.4	1.182	0.004	306.868
Comores	5.	12.2	97.5	0.264	0.015	17.995
Congo	31.	90.	685.4	1.073	0.014	76.319
Congo Zaïre	124.	244.7	1998.2	1.405	0.01	135.347
Corée du Nord	15.	148.4	473.4	1.044	0.04	26.32
Corée du Sud	135.	33.1	343.8	1.414	0.01	139.858
Costa Rica	199.	33.1	287.1	1.427	0.013	112.567
Côte d'Ivoire	78.	90.	620.2	1.434	0.014	100.959
Croatie	296.	33.1	645.5	1.187	0.006	210.514
Cuba	142.	33.1	357.8	1.258	0.009	147.039
Danemark	300.	33.1	340.4	1.353	0.009	157.116
Djibouti	5.	44.7	94.6	0.028	0.11	0.252
Dominique	22.	7.4	22.2	1.349	0.032	41.843
Égypte	195.	33.1	828.8	1.141	0.009	133.747
Émirats Arabes Unis	9.	20.1	172.4	0.546	0.011	50.169
Équateur	116.	90.	626.4	1.225	0.012	103.667
Érythrée	18.	33.1	295.9	0.745	0.012	62.573
Espagne	300.	90.	1719.9	1.259	0.008	152.01
Estonie	300.	33.1	214.9	1.5	0.007	204.653
États-Unis	300.	244.7	4402.8	1.132	0.006	182.133
Éthiopie	141.	90.	1188.	1.32	0.01	135.487
Fiji	22.	33.1	632.7	0.674	0.008	81.841
Finlande	103.	90.	765.1	1.339	0.01	128.488
France	300.	90.	1002.2	1.457	0.007	222.813
Gabon	35.	90.	601.8	1.193	0.014	82.425
Gambie	20.	12.2	49.9	0.593	0.021	28.18
Georgie	114.	33.1	228.1	1.295	0.011	114.968
Ghana	76.	54.6	411.6	1.191	0.012	98.273
Grèce	300.	54.6	713.4	1.374	0.008	182.501
Grenade	7.	7.4	30.9	0.605	0.024	25.644
Guatemala	300.	20.1	347.2	1.378	0.006	243.406
Guinée	38.	90.	550.	1.316	0.016	83.003
Guinée équatoriale	16.	33.1	566.8	0.785	0.01	76.911
Guinée-Bissau	14.	33.1	134.3	0.959	0.02	47.333
Guyana	42.	54.6	383.8	1.02	0.013	77.179
Haïti	38.	33.1	192.5	1.145	0.016	72.586
Honduras	281.	20.1	365.	1.4	0.006	235.329
Hongrie	300.	33.1	281.5	1.549	0.007	213.067

Figure 185-2. Estimation des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique

État	Nombre de lieux	Échelle de coupure (km)	Étendue (km)	Dimension fractale territoriale	Erreur	Variable t de Student
Îles Marshall	90.	148.4	765.1	1.306	0.014	92.809
Îles Solomon	9.	54.6	533.8	0.404	0.012	34.099
Inde	300.	148.4	2643.9	1.37	0.007	192.107
Indonésie	299.	244.7	1737.1	1.222	0.011	110.395
Iraq	81.	90.	788.4	1.262	0.011	110.669
Iran	267.	90.	1587.6	1.461	0.006	234.436
Irlande	156.	33.1	411.6	1.437	0.009	153.719
Islande	103.	90.	343.8	1.305	0.015	87.649
Israël	227.	12.2	167.3	1.216	0.007	184.444
Italie	300.	90.	1085.7	1.363	0.009	152.379
Jamaïque	26.	33.1	68.7	1.204	0.045	26.599
Japon	300.	90.	1844.6	1.126	0.007	155.699
Jordanie	90.	12.2	350.7	0.932	0.005	193.819
Kazakhstan	161.	244.7	1556.2	1.445	0.012	118.005
Kenya	149.	90.	871.3	1.326	0.01	128.113
Kirgystan	91.	90.	395.4	1.475	0.011	130.137
Kiribati	24.	54.6	837.1	0.534	0.007	75.1
Koweït	72.	4.5	67.4	0.994	0.008	122.143
Laos	23.	90.	626.4	1.054	0.015	71.672
Lesotho	11.	33.1	177.7	0.745	0.014	52.035
Lettonie	77.	54.6	223.6	1.469	0.015	98.975
Liban	19.	33.1	130.3	1.007	0.023	43.345
Liberia	18.	54.6	403.4	0.978	0.018	54.276
Libye	44.	90.	962.9	0.867	0.012	75.203
Liechtenstein	11.	2.	4.5	0.771	0.035	21.777
Lituanie	111.	33.1	257.2	1.55	0.008	185.709
Luxembourg	300.	4.5	75.9	1.498	0.009	158.903
Macédoine	117.	33.1	139.8	1.548	0.019	81.828
Madagascar	72.	90.	727.8	1.304	0.009	139.092
Malaisie	169.	54.6	626.4	1.064	0.007	145.646
Malawi	34.	54.6	304.9	1.078	0.018	60.539
Maldives	201.	20.1	113.3	1.27	0.012	102.636
Mali	38.	148.4	1274.1	1.089	0.018	60.363
Malte	67.	2.7	26.6	1.131	0.011	100.267
Maroc	137.	90.	871.3	1.359	0.012	115.516
Maurice	143.	4.5	91.8	1.121	0.013	86.371
Mauritanie	20.	148.4	837.1	1.063	0.017	62.08
Mexique	300.	148.4	1958.6	1.343	0.009	152.487
Micronésie	6.	7.4	464.1	0.1	0.004	23.078

Figure 185-3. Estimation des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique

État	Nombre de lieux	Échelle de coupure (km)	Étendue (km)	Dimension fractale territoriale	Erreur	Variable <i>t</i> de Student
Moldavie	37.	33.1	281.5	1.262	0.011	114.507
Monaco	4.	1.1	1.1	0.	0.	0.
Mongolie	25.	148.4	735.1	0.952	0.022	44.08
Montenegro	254.	33.1	424.1	1.469	0.011	133.049
Mozambique	45.	148.4	1141.4	1.037	0.011	91.286
Namibie	39.	244.7	1152.9	1.169	0.02	59.018
Nauru	1.	22 026.5	1152.9	0.	0.	0.
Népal	57.	54.6	376.2	1.154	0.013	89.055
Nicaragua	74.	54.6	399.4	1.256	0.011	116.292
Niger	51.	90.	765.1	1.102	0.012	95.048
Nigeria	300.	90.	982.4	1.523	0.009	171.804
Norvège	300.	90.	1436.6	1.158	0.01	119.944
Nouvelle-Zélande	275.	33.1	1248.9	1.231	0.008	152.673
Oman	26.	90.	601.8	1.014	0.022	45.528
Ouganda	90.	90.	544.6	1.326	0.019	70.061
Ouzbekistan	189.	54.6	720.5	1.239	0.008	151.546
Pakistan	294.	54.6	1261.4	1.237	0.006	191.611
Palau	17.	20.1	391.5	0.516	0.008	63.914
Panama	75.	33.1	239.8	1.299	0.012	105.88
Papouasie – Nouvelle-Guinée	39.	148.4	943.9	1.168	0.019	61.602
Paraguay	229.	33.1	837.1	1.18	0.006	200.922
Pays-Bas	295.	20.1	281.5	1.5	0.006	256.443
Pérou	291.	90.	1352.9	1.401	0.007	209.528
Philippines	123.	90.	837.1	1.197	0.011	106.727
Pologne	300.	90.	589.9	1.634	0.012	140.755
Portugal	300.	33.1	1022.5	1.005	0.008	125.559
Qatar	13.	33.1	90.9	1.01	0.057	17.735
Centrafrique	43.	148.4	749.9	1.209	0.02	60.287
République dominicaine	57.	33.1	200.3	1.392	0.015	95.092
Roumanie	300.	54.6	497.7	1.586	0.009	182.688
Royaume-Uni	300.	33.1	804.3	1.274	0.006	215.296
Russie	300.	244.7	3041.2	1.102	0.008	145.396
Rwanda	12.	33.1	120.3	1.101	0.024	45.429
Saint-Kitts-et-Nevis	17.	7.4	30.9	0.912	0.033	27.46
Saint-Marin	9.	2.7	5.6	1.313	0.082	16.101
Saint-Vincent-et-les-Grenadines	10.	2.7	16.6	0.469	0.016	30.25
Sainte-Lucie	12.	4.5	19.9	0.686	0.026	26.118
Salvador	113.	33.1	125.2	1.371	0.014	99.558
Samoa	251.	4.5	67.4	1.181	0.006	185.376

Figure 185-4. Estimation des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique

État	Nombre de lieux	Échelle de coupure (km)	Étendue (km)	Dimension fractale territoriale	Erreur	Variable <i>t</i> de Student
Sao-Tomé-et-Principe	6.	7.4	130.3	0.256	0.01	26.377
Sénégal	62.	90.	459.4	1.309	0.019	68.057
Serbie	254.	33.1	424.1	1.469	0.011	133.049
Seychelles	5.	4.5	7.8	0.124	0.129	0.961
Sierra Leone	33.	54.6	247.2	1.208	0.016	75.677
Singapour	1.	22 026.5	247.2	0.	0.	0.
Slovaquie	167.	33.1	206.4	1.533	0.008	193.12
Slovénie	264.	12.2	130.3	1.476	0.007	200.016
Somalie	63.	148.4	1043.1	1.252	0.014	88.35
Soudan	133.	244.7	1685.8	1.359	0.011	120.336
Sri Lanka	74.	54.6	221.4	1.277	0.021	61.229
Suède	108.	90.	1130.	1.143	0.01	117.238
Suisse	300.	33.1	206.4	1.39	0.01	133.905
Suriname	14.	20.1	102.5	0.59	0.016	36.989
Swaziland	29.	33.1	107.8	1.321	0.023	57.546
Syrie	50.	90.	502.7	1.28	0.019	69.017
Tadjikistan	81.	33.1	407.5	1.046	0.009	114.506
Taïwan	98.	20.1	301.9	1.13	0.008	146.384
Tanzanie	241.	90.	1118.8	1.499	0.01	157.491
Tchad	49.	148.4	888.9	1.2	0.012	98.124
Tchéquie	300.	33.1	249.6	1.517	0.009	177.491
Thaïlande	296.	90.	757.5	1.326	0.009	139.982
Togo	28.	54.6	151.4	1.252	0.034	37.008
Tonga	9.	4.5	162.4	0.177	0.005	32.453
Trinité-et-Torbago	22.	12.2	103.5	0.777	0.011	69.71
Tunisie	211.	33.1	368.7	1.468	0.009	167.651
Turkménistan	58.	148.4	772.8	1.194	0.014	82.709
Turquie	300.	90.	658.5	1.633	0.009	183.83
Tuvalu	8.	90.	407.5	0.74	0.026	28.612
Ukraine	300.	90.	828.8	1.546	0.007	222.167
Uruguay	39.	90.	512.9	1.228	0.021	57.186
Vanuatu	8.	54.6	247.2	0.385	0.02	19.591
Venezuela	105.	90.	665.1	1.329	0.012	114.019
Viêt-nam	68.	90.	692.3	1.197	0.011	109.412
Yemen	39.	90.	459.4	1.121	0.015	74.757
Zambie	73.	148.4	1032.8	1.328	0.016	83.392
Zimbabwe	36.	90.	626.4	1.268	0.012	109.711

Figure 185-5. Estimation des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique

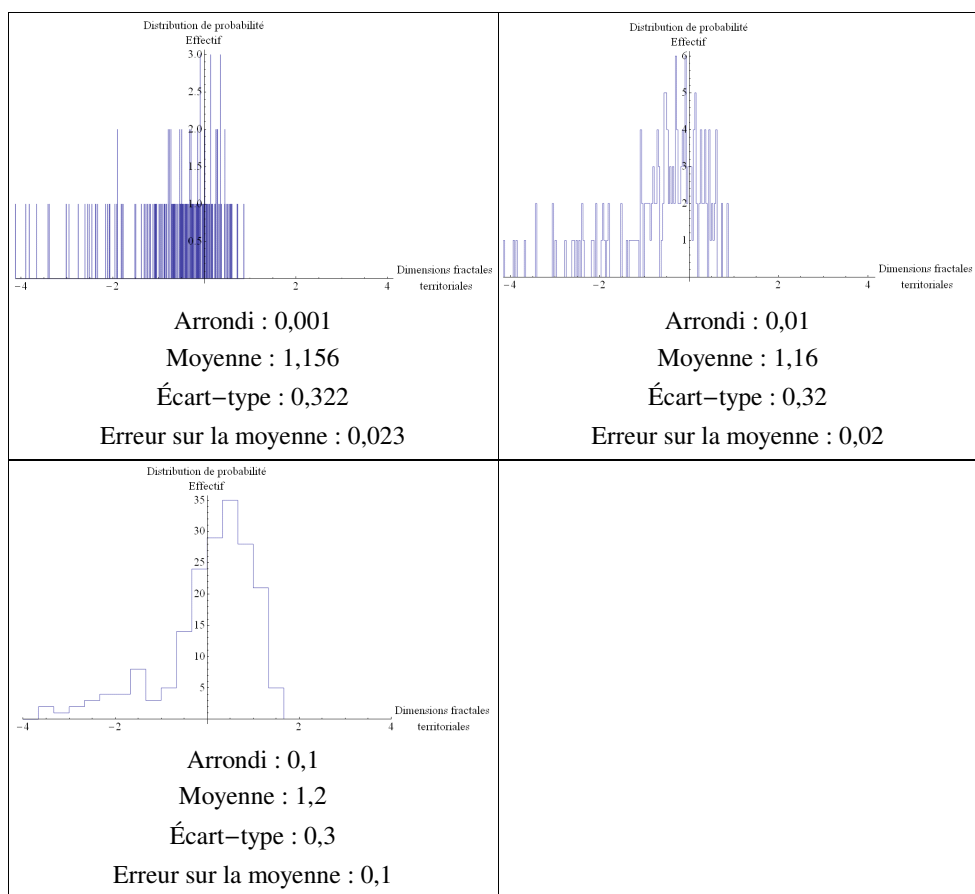


Figure 186. Statistique des dimensions fractales territoriales centrées et réduites

Continent	Nombre d'États	Dimension fractale territoriale moyenne	Écart-type	Erreur sur la moyenne
Afrique	53	1,097	0,349	0,048
Amérique	35	1,110	0,270	0,046
Eurasie	91	1,229	0,326	0,034
Océanie	14	0,683	0,458	0,121

Figure 187. Dimension fractale territoriale moyenne en fonction des continents

Les distributions du nombre d'habitants suivent une loi de nature fractale démontrée par le fait que l'exposant de Pareto varie lui-même en fonction de la résolution avec laquelle on filtre les données statistiques. De plus, les répartitions spatiales de l'établissement humain se structurent également en échelle. Cela revient à dire que le processus de conquête, d'appropriation ou d'humanisation d'un lieu par une population est fractal, et que la morphologie engendrée par la constitution d'un réseau entre ces lieux l'est également. Bien que le processus et la morphologie n'aient pu être étudiés autrement que de manière indépendante, cette double nature fractale n'est sans doute pas un hasard. La fractalité de l'un devrait expliquer celle de l'autre (et *vice versa*). Le système urbain entendu comme le contenant du système de peuplement et de la répartition spatiale, est donc un système multi-échelle par construction spontanée, comme on a pu le vérifier par une approche territoriale à l'échelle étatique. Tout cela explique, en partie, la structure fractale des éléments bâtis et des réseaux de connexion entre les lieux qu'ils soient terrestres, fluviaux ou maritimes à bien plus grande échelle. L'établissement humain se caractérise donc avant tout par son continuum scalaire, ce qui n'a pas assez été perçu jusqu'alors. Ceci ouvre des perspectives fondamentales dans la mesure où une telle régularité relevant de processus sans sujet ne peut être dépendante que de règle dépassant l'humanité elle-même.

18

Conclusion générale

L'échelle, en géographie, est plus qu'un concept : c'est une catégorie générale au même titre que le mouvement. Tout au long de cette thèse, il fut montré qu'une variable d'échelle était relative à un état de référence. Ceci revient à dire que, si cet état est mal défini, l'ensemble des mesures opérées sur un objet géographique n'aura pas de sens. Dans chaque cas étudié dans cette thèse, cet état fut décrit de manière aussi précise que possible. Cependant, chacune des mesures opérées dépend bien de cet état : si on le modifie, les mesures peuvent changer, mais il est impossible de s'en extraire. On ne peut alors comparer deux séries de mesures qu'avec la connaissance de leurs états. Les fractales sont donc fondamentales en géographie, car elles montrent qu'une mesure aussi précise soit-elle n'est jamais absolue ; elle dépend de l'échelle de résolution et de l'échelle de référence. La fractalité enseigne même que plus une mesure est précise, plus elle risque de n'avoir aucun sens, si on ne prend pas en compte cette structure multi-échelle.

Ceci dit, deux solutions pratiques ont toujours permis aux géographes de contourner empiriquement le problème de la fractalité :

1. travailler à la même échelle de mesure pour tous les objets d'étude cartographiés ;
2. préciser les échelles auxquelles le calcul a été effectué, en ayant compris que sans cette indication, la mesure n'avait aucun sens.

Cette thèse a montré qu'il était possible de définir et de quantifier un objet multi-échelle pour lui-même, et ainsi montrer qu'il est possible d'intégrer toutes les échelles possibles d'une structure géographique donnée.

L'échelle n'est donc pas un accessoire. Qu'elle soit qualitative (ordre de grandeur), ou qu'elle soit quantitative (échelles numériques), elle renvoie aux idées de taille et d'information. En effet, il convient toujours de trouver un compromis entre la taille réelle de l'objet et les informations qu'il contient. D'un point de vue plus technique, les structures multi-échelles sont omniprésentes en géographie, mais il est difficile de les quantifier. La raison est double, soit il y a trop d'informations, ce qui rend les calculs impossibles, soit il n'y a pas assez d'informations sur tous les niveaux, car il existe un niveau privilégié (état de référence), niveau où l'on analyse habituellement tel ou tel objet, empêchant la mise en évidence de la structure multi-échelle.

Quoi qu'il en soit, un objet géographique possède deux échelles limites : sa résolution et son étendue. Si, en géographie, il est possible de définir une étendue maximale (la surface de la terre), il est plus difficile de caractériser une résolution minimale. Est-ce le kilomètre ? Est-ce le mètre ? Est-ce le millimètre ? Le choix de cette dernière dépend apparemment de l'objet étudié, et au fond du projet que se donne la géographie. Ce dernier, dans ses caractéristiques, doit comporter une définition d'une gamme scalaire. Personne en géographie ne soutiendra que le micromètre est géographique, personne non plus ne prétendra que le parsec est géographique. L'échelle de référence en géographie semble être celle autour de laquelle tout se combine, celle de l'Homme. Reste à connaître l'étendue de la gamme vers les grandes et vers les petites échelles, en géographie humaine, ce pourrait être 10^0 et 10^7 m ; en géographie physique, 10^{-4} et 10^8 m sur ces bases des résolutions plus opérationnelles vis-à-vis du projet peuvent être définies. Par exemple, pour les structures urbaines, le mètre semble être le plus approprié. Par contre, pour le réseau de ces structures urbaines, le kilomètre semble être un bon compromis, car si l'on conservait le mètre, la structure en échelle serait probablement incalculable. De plus, même si elle l'était, il n'est pas certain que cela apporte beaucoup d'informations sur l'état d'échelle de la structure spatiale.

C'est tout le problème du M.A.U.P. (*Modifiable area unit problem*) qui constate qu'une surface pour un objet géographique donné change en fonction de la résolution. Toutefois, ce n'est un problème que si l'on cherche une surface absolue. En effet, ce constat n'est que la définition d'une fractale, ce qui revient à prétendre que la solution recherchée par le M.A.U.P. ne peut aboutir qu'à une impasse. Cependant, les fractales réelles possèdent, en général, une ou des transitions fractal - non fractal. Dans ce cadre, si on effectue une mesure dans le domaine non fractal, aucune variation de mesure de la surface ne sera significative, alors que dans le domaine fractal, les variations de surfaces seront telles que trouver une surface constante devient impossible. Le M.A.U.P. n'est donc pas un problème si l'on se place dans un cadre fractal. De plus, les graphes bi logarithmiques permettent de définir une échelle de coupure correspondant à une résolution « optimale » qui définit la dernière agrégation sans perte d'informations.

L'espace de contrôle de l'espace géographique recherché en introduction est donc l'espace des échelles. En effet, s'il existe une infinité de configurations spatiales qui se déploient dans l'espace terrestre, il n'existe que quelques configurations scalaires, ce qui rend objectivables toutes les études morphologiques en géographie. Les trois objectifs fixés en introduction ont donc été atteints. Toutefois, il convient de distinguer les objectifs 1 et 2 de l'objectif 3.

L'objectif 1 qui souhaitait montrer le lien entre l'étude des formes géographiques et la relativité d'échelle, et l'objectif 2 qui voulait définir un cadre multi-scalaire théorique général capable d'explicitier les structures scalaires existant en géographie, ont largement été éprouvés. Par exemple, les expressions « système d'échelle », « généralisation cartographique », *etc.*, renvoient toutes à l'idée de fractalité des objets géographiques, mais surtout à celle de relativité d'échelle puisqu'il n'existe aucune échelle absolue les caractérisant, au mieux il n'y a que des niveaux privilégiés. De ce point de vue, la théorie de la relativité d'échelle a permis d'explicitier, c'est-à-dire de se poser en cadre de compréhension, d'un certain nombre de phénomènes observés ou observables en géographie.

Si les objectifs 1 et 2 ont été atteints, l'objectif 3 qui consistait en l'articulation du temps et de l'espace, et de leurs échelles respectives dans une démarche géographique, a été partiellement atteint. Il faudrait arriver à construire systématiquement un espace à cinq dimensions complet (dimension temporelle, trois dimensions spatiales et dimension d'échelle). Au minimum, si l'espace est isotrope, il y a six variables : le temps, la résolution temporelle, l'espace en trois dimensions avec une résolution spatiale identique pour la longueur, la largeur et la hauteur (Nottale, 2010). Toutefois, dans le cas d'une anisotropie, au minimum, il existe huit variables : le temps, la résolution temporelle, la largeur, la résolution de la largeur, la longueur, la résolution de la longueur, la hauteur et la résolution de la hauteur (Nottale, 2010). S'il existe de nombreux développements dans la théorie de la relativité d'échelle permettant cela, leur complexité est un frein à leur éventuel développement en géographie (Nottale, 2010). En revanche, il est fondamental de poser le problème, car la construction d'une théorie générale de la géographie ne peut se réaliser qu'à travers une médiation entre les variables du mouvement et celles d'échelles. Toutefois, la troisième partie de cette thèse qui étudiait l'évolution de la répartition des châteaux dans le temps et dans la construction territoriale, a montré que s'il était rarement possible de construire un espace à cinq dimensions en géographie, il demeure possible d'en réaliser des coupes qui complètent l'approche historique et l'approche spatiale. De ces faits, cet objectif reste largement prospectif tant dans le champ phénoménal que dans le champ théorique.

Pour conclure, toutes ces considérations ne signifient pas que les variables relatives à la catégorie du mouvement doivent être négligées dans une analyse géographique, bien au contraire. Toutefois, il semble qu'il soit préférable de commencer toute analyse géographique par une analyse en échelle, puis par une analyse spatiale ou temporelle, et enfin, par une combinaison entre échelles et mouvement, mais est-ce suffisant pour caractériser un objet géographique ? Il semble que la réponse soit négative.

Pour y remédier, trois grands projets peuvent être proposés pour ouvrir cette thèse vers de nouvelles perspectives de recherches.

18.1. Projet 1. De la nécessité de rapprocher l'information et l'échelle

L'échelle est une catégorie qui se distingue, entre autres, du mouvement (Forriez *et alii*, 2009). Cependant, une autre notion a été largement évoquée sans être clairement définie : l'information. Jean-Paul Delahaye (1999, p. 14) précisait que l'information n'a jamais été définie de manière absolue. Par contre, il existe au moins trois grandes théories qui font appel à cette notion : la théorie des jeux de John von Neumann (en 1944) (Guerrien, 1995 ; Giraud, 2009), la théorie de l'information de Claude Shannon (en 1948) et la théorie algorithmique de l'information d'Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (dans les années 1960), mais aucune ne définit clairement le terme. Il est vrai toutefois qu'il existe des variables mesurant le contenu brut d'information ou la valeur de l'information. Jean-Paul Delahaye a défini la première comme étant « le nombre minimal de questions oui/non à poser pour trouver la valeur donnée » ; la seconde est fixée par l'objectif porté par cette information. En géographie, ces deux notions sont rarement quantifiables. Il faut donc généralement se contenter d'une description littéraire.

Pour insister sur l'aspect fondamental de cette notion, on peut rappeler que lorsque l'on définit littérairement une fractale, l'obligation d'utiliser le terme « information » est presque naturelle. Un objet fractal se caractérise par le fait que, lorsque l'on lui applique un facteur d'échelle, le contenu de son information change. Cette définition pourrait faire croire qu'information est synonyme de résolution, mais celle-ci possède une définition beaucoup trop restreinte par rapport à celle que l'on souhaiterait donner au mot « information ». Autrement dit, pour avoir une information, il faut une résolution (Delahaye, 1999, p. 23), mais une information peut exister sans résolution. La meilleure approche du concept serait de prétendre que l'information, comme l'échelle, est une catégorie dans laquelle différentes variables existent ou coexistent. Ainsi, à l'instar de la résolution, de la dimension fractale et de l'accélération d'échelle sont des variables entrant dans la catégorie « échelle », l'entropie de Claude Shannon ou la valeur de l'information (mesurée par l'inverse de la probabilité) sont des variables caractérisant la catégorie « information ».

La Commission européenne qualifia notre société, il y a une dizaine d'années, de « société de l'information ». Bernard Stiegler et l'association *Ars Industrialis* (2006) montrent à quel point cette expression est dangereuse, car ces auteurs pensent qu'ils existent une confusion non innocente entre information, savoir et connaissance. En effet, ces trois termes ne sont absolument pas synonymes. L'objectif de cette thèse a été d'essayer de comprendre l'organisation des objets géographiques, ou, en d'autres termes, et même si l'expression est maladroite, de produire de la connaissance géographique. Cependant, il est évident que, pour y parvenir, cela nécessite des informations et des savoirs (savoir-faire, savoir-vivre, savoir-être, etc.).

18.1.1. L'information

En règle générale, l'information fait référence aux données brutes ou aux données prétraitées. L'information géographique est diverse et variée ; cette thèse l'a montrée, mais, quelque part, les données utilisées sont-elles dignes de confiance ? La classification des qualificatifs du mot « information » par la théorie des jeux fournit des éléments de réponse.

18.1.1.1. Le contenu brut de l'information

La théorie des jeux opère le classement suivant :

1. les jeux à information complète et parfaite ;
2. les jeux à information complète, mais imparfaite ;
3. les jeux à information incomplète

Avant de poursuivre, une précision s'impose : le terme « jeu » ne sera pas débattu ; seule l'information sera analysée. Lorsqu'il y a information complète, chaque joueur connaît toutes les données du problème pour lui et pour les autres (Guerrien, 1995). Dans le cas où il n'y a aucun coup simultané, le déroulement du jeu se fait de manière strictement séquentielle ; dans ce cas, l'information est parfaite. Dans le cas contraire, l'information est dite imparfaite, puisque les coups simultanés introduisent un certain flou. Toutefois, le nombre de combinaisons possibles est limité. Enfin, l'information est dite incomplète lorsqu'il existe trop d'incertitudes, ou des lacunes au niveau du contenu de l'information.

Si on analyse le contenu de l'information des données utilisées pour opérer les différentes mesures multi-échelles dans cette thèse, on s'aperçoit que seules deux bases de données possèdent une information parfaite et complète ; trois bases ont une information parfaite, mais incomplète ; deux bases, une information imparfaite et complète ; une base, une information imparfaite et incomplète (Figure 188). Ainsi, du point de vue du contenu brut d'information, les données utilisées ne présentent aucun problème.

	Complète	Incomplète
Parfaite	<ul style="list-style-type: none"> • Réseau hydrographique des Gardons – RESEAU 2 • Structures bâties de l'agglomération de Monbéliard 	<ul style="list-style-type: none"> • Réseau hydrographique des Gardons – RESEAU 1 • Base <i>Catiau</i> – Aspect spatial • Base <i>Tageo</i>
Imparfaite	<ul style="list-style-type: none"> • Catalogue des images <i>Landsat</i> utilisé pour mesurer les taches urbaines • Images <i>Mappy</i> de la « ville d'Avignon » 	<ul style="list-style-type: none"> • Base <i>Catiau</i> – Aspect temporel

Figure 188. Tableau résumant les données utilisées dans cette thèse en termes d'information

18.1.1.2. La valeur de l'information

Néanmoins, si l'on s'interroge sur les sources des informations utilisées, le problème de l'information se pose différemment. En effet, on se place dans la position d'une critique historique qui correspond à un ensemble de procédés techniques permettant de peser la valeur des sources. Il existe deux types de critiques : la critique externe, renvoyant à des informations extérieures à la source utilisée, et la critique interne, renvoyant aux informations fournies par la source utilisée (Popper, 1998).

La critique externe commence d'abord par dresser la critique d'identité de la source en répondant aux trois questions suivantes : « Qui ou quoi ? Quand ? Où ? ». Toutes les données utilisées ont des réponses à ces questions, même dans le cas de la base *Tageo*. Ensuite, la critique de véracité intervient. Toutefois, il faut bien la distinguer de celle d'authenticité. La première répond à la question suivante : « Les données sont-elles vraies ou fausses ? ». Quant à l'authenticité, elle est garantie, en principe, par une autorité. Ainsi, des données fausses peuvent être authentiques sans aucune difficulté. C'est à travers ces deux problèmes qu'un certain nombre de données peuvent être problématiques à l'instar de la base *Tageo* (cf. chapitre 16). Enfin, la critique de restitution pose la question suivante : « Travaille-t-on sur la donnée originale ou sur une copie ? » En règle générale, le chercheur est amené à formuler une telle question lorsqu'il y a eu des erreurs de traduction évidente d'un texte anglais en un texte français, par exemple, ou encore, lorsqu'il y a une erreur de saisie flagrante. Quoi qu'il en soit, aucun chercheur, mis à part l'historien, ne travaille avec des originaux, ce sont généralement des copies de copies. Cela se transcrit par le niveau de la copie à travers ce que l'on appelle un *stremma codium* qui correspond à un arbre remontant à la source originale. L'information, même complète et parfaite, est donc difficilement maîtrisable. Aussi, il faut généralement faire avec ce que l'on a (Figure 189). Par ailleurs, la critique interne des sources apporte d'autres problèmes.

	Critique d'identité	Critique de véracité	Critique de restitution
Gardons – RESEAU 1	Extrait de la base CARTHAGE (réalisée par le Ministère de l'Écologie et du Développement Durable (MEDD) et par l'IGN)	618 branches du réseau (2006)	La restitution se situe au moins au 3 ^e niveau. Ce sont des images vectorielles gérées à partir d'un fond de carte au 1 / 50 000 ^e (2 ^e niveau). Le 1 ^{er} niveau correspond à l'esquisse de la carte dessinée par un ingénieur IGN.
Gardons – RESEAU 2		1 694 branches du réseau (2006)	
Images Landsat des taches urbaines	Base organisée par Christopher Small Base organisée par Ann Bryant Données capturées par la NASA	101 images utilisables sur 131 images	La restitution se situe au moins au 2 ^e niveau puisque que ce sont des images modifiées à partir des captures opérées par un satellite <i>Landsat</i> (5 ou 7).
Images Mappy de la « ville d'Avignon »	Entreprise privée	6 images capturées en mars 2008	?
Répartition des structures bâties de l'agglomération de Montbéliard	Communauté d'agglomération de Montbéliard	?	La position des bâtiments est certainement issue d'une numération du cadastre des différentes communes composant l'agglomération (3 ^e niveau).
Base Catiau – Aspect spatial	Carte Blay <i>Quid</i>	Carte datant de 2004	?
Base Catiau – Aspect temporel	Charles-Laurent Salch, Jean-Pierre Babelon, Yvan Christ, MCFAPH, <i>Quid</i>	La documentation utilisée est relativement ancienne. Seul le <i>Quid</i> est régulièrement remis à jour, mais il ne cite pas ses références.	La restitution se situe au moins au 3 ^e niveau pour les dictionnaires ou 4 ^e niveau pour le <i>Quid</i> , le 1 ^{er} niveau correspondant aux sources historiques ou archéologiques et le 2 ^e aux différentes publications portant sur ce 1 ^{er} niveau.
Base <i>Tageo</i>	Nicos Bourbaki	?	La restitution se situe au moins au 3 ^e niveau, puisque les différents organismes ont récoltées les données (1 ^{er} niveau), puis les ont saisies (2 ^e niveau).

Figure 189. Critique externe des données utilisées dans la thèse

La critique interne commence d'abord par une critique d'interprétation : « Quel est le sens de ces sources ? Pourquoi et comment les a-t-on créées ? ». Aujourd'hui, répondre à ces questions est relativement facile mais fastidieux. Ensuite, vient la critique d'exactitude, la source se trompe-t-elle ? Seule une comparaison avec d'autres données peut fournir une réponse à cette question. Enfin, l'analyse critique s'achève par une critique de sincérité, la source nous trompe-t-elle ? Il est souvent extrêmement difficile de répondre à ces deux dernières questions. Pour trancher, il faut s'interroger sur la raison d'une quelconque erreur volontaire. Pourquoi nous fournirait-on des données fausses ? Si l'on reprend l'exemple de la base *Tageo*, il existe des erreurs d'inattention que l'on peut expliquer par le non renouvellement des données rang-taille au cours des années, ou par des erreurs de saisie, mais les erreurs intentionnelles semblent inexistantes. Ainsi, ces informations sont malgré tout utilisables (Figure 190).

	Critique d'interprétation	Critique d'exactitude	Critique de sincérité
Gardons – RESEAU 1	Obtenir une meilleure approche de l'aménagement du territoire	Quelques erreurs dans la saisie des nœuds entre les différentes branches.	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.
Gardons – RESEAU 2			
Images Landsat des taches urbaines	Objectif inconnu	?	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.
Images Mappy de la « ville d'Avignon »	Constituer un itinéraire de voyage	Aucune erreur visible	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.
Répartition des structures bâties de l'agglomération de Montbéliard	Objectif fiscal	Aucune erreur visible	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.
Base Catiau – Aspect spatial	Dresser une carte routière et touristique	Aucune erreur visible	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.
Base Catiau – Aspect temporel	Données réalisées dans un but de synthèse	Aucune erreur visible, mise à part celles découvertes par la confrontation de la documentation	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.
Base <i>Tageo</i>	Données synthétisées dans un but inconnu	Base incomplète dans la localisation des lieux qu'elle cite	<i>A priori</i> , les données n'ont aucune raison d'être malhonnêtes.

Figure 190. Critique interne des données utilisées dans la thèse

Si ces critiques des sources de données sont indispensables, il est bon de rappeler que « l'information ne se transformera pas en connaissances ou en savoir-faire, mais en accumulation de données intraitables » (Stiegler et *Ars Industrialis*, 2006). D'ailleurs, le chemin est long et parsemé d'embûches pour arriver à la connaissance géographique. Cependant, une étape intermédiaire est nécessaire : transformer l'information en savoirs (savoir-faire, savoir-vivre, *etc.*).

18.1.2. Les savoirs

Les savoirs sont une synthèse organisée des informations. Ils correspondent à des informations vérifiées, c'est-à-dire maîtrisées. Finalement, ce sont des clés ouvrant la porte de l'instrumentalisation des informations. Ainsi, on parle de savoir-faire, de savoir-vivre, de savoir-être, *etc.* De plus, les savoirs sont de deux natures : les « savoirs empiriques » que l'on ne peut acquérir que par l'expérience, la pratique, dans tel ou tel domaine, et les « savoirs théoriques » que l'on acquiert au fur et à mesure au contact des autres qui narrent leurs propres expériences. Pour finir, dans le cadre des savoirs, il est possible de formuler des prédictions qui fonctionnent bien et qui soient correctement quantifiées (Thom, 1993). Autrement dit, les savoirs peuvent satisfaire des objectifs, ce qui n'est pas le cas de la connaissance.

18.1.3. La connaissance

La théorie de la connaissance (ou gnoséologie) est une branche de la philosophie extrêmement importante. La connaissance correspond à la maîtrise des savoirs par un individu. Platon donne une définition complémentaire : la connaissance est l'intersection entre les vérités (scientifiques) et les croyances (populaires). De ce fait, la connaissance propose une explication, c'est-à-dire un cadre de compréhension qui ne peut ni être quantifié, ni être prédictif (Thom, 1993). La combinaison de la gnoséologie avec la philosophie des sciences définit l'épistémologie.

S'il ne fait aucun doute que la géographie possède des savoirs, ceux-ci manquent cruellement d'organisation. C'est à ce niveau qu'intervient la relativité d'échelle qui permet de construire une théorie scalaire et spatiale générale en géographie. Qu'est-ce qu'une connaissance géographique alors ? La meilleure réponse à cette question a sans doute été formulée par Eric Dardel. « La géographie est, selon l'étymologie, la « description » de la Terre ; plus rigoureusement, le terme grec suggère que la Terre est une écriture à déchiffrer, que le dessin du rivage, les découpures de la montagne, les sinuosités des fleuves forment les signes de cette écriture. La connaissance géographique a pour objet de mettre en clair ces signes, ce que la Terre révèle à l'homme sur sa condition humaine et son destin » (Dardel, 1952, p. 2). Même si l'approche d'Eric Dardel reste très phénoménologique, les signes de l'écriture de la Terre peuvent être formulés de manière mathématique (Galilée, 1979). De plus, ceux-ci correspondent aux différentes catégories générales identifiées : le mouvement, l'information, et l'échelle (Figure 191).

Catégorie	Mouvement	Information	Échelle
Variable définissant le système de coordonnées	Temps Statique ou dynamique	Contenu de l'information	Dimension fractale
	Espace Stationnaire ou non stationnaire	Valeur de l'information	Logarithme de la longueur sur une fractale
Variable caractérisant l'état du système de coordonnées	Vitesse	Entropie	Logarithme de la résolution
	Accélération	Inverse de la probabilité	Accélération d'échelle
Objet géographique	Transformation dans le temps Transformation dans l'espace	Attribut	Transformation en échelles

Figure 191. Système de connaissance de l'objet géographique

L'objectif de la connaissance est de proposer un cadre de compréhension qui ne quantifie rien et ne prédit rien (Thom, 1993). Une formule qui fonctionne correctement pour un phénomène donné et qui permet des prédictions, même si celles-ci sont correctes, si le cadre est inexistant, le modèle ne peut être qualifié de scientifique. En effet, « l'essence même de la réflexion, c'est de comprendre qu'on n'avait pas compris. Les pensées non baconiennes, non euclidiennes, non cartésiennes sont résumées dans ces dialectiques historiques qui présentent la rectification d'une erreur, l'extension d'un système, le complément d'une pensée » (Bachelard, 1934, p. 178). De ce fait, la relativité d'échelle offre un cadre de compréhension dans lequel la géographie peut s'inscrire ; elle permet la construction d'une véritable théorie géographique qui articule échelle et mouvement. Ainsi, tous les objets et les concepts géographiques peuvent être définis par une méthode d'objectivation intégrant une approche multi-échelle. Pour être complet, il faut ajouter l'intelligence qui peut correspondre à une mise en œuvre de manière stratégique de ses connaissances dans le but d'en créer de nouvelles.

La théorie de l'information est au cœur de l'approche géographique. En règle générale, son exploitation a été plutôt qualitative, car c'est un héritage de sa discipline mère, l'histoire. Cependant, cette théorie demeure insuffisamment exploitée tant du point de vue qualitatif que quantitatif. Tout au long de cette partie, il fut défendu l'idée que l'information était une catégorie à part entière. Toutefois, une question reste largement ouverte : « L'information est-elle une catégorie relativiste ? ».

Avant d'achever définitivement cette ouverture, il faut insister sur un projet qui peut paraître usité à l'heure de la mondialisation, mais qui mérite tout de même une attention particulière.

18.2. Projet 2. De la nécessité de redevenir français en géographie

« Français, unissez-vous contre la pensée unique anglo-saxonne », tel est le cri que j'aimerais lancer à la fin de cette thèse. Afin d'éviter toute ambiguïté, il ne s'agit ni de faire du chauvinisme, ni de réorienter la pensée décriée vers une autre pensée unique, mais de faire partager une certaine inquiétude face au triomphe de la pensée anglo-saxonne dans le domaine des sciences.

Depuis l'époque moderne, le monde de la science, au sens large du terme, oscille entre les héritages de la pensée baconienne (anglo-saxonne) et ceux de la pensée cartésienne (française). Aujourd'hui, si l'on interprète ce qu'écrivait Karl Popper (1998), la pensée anglo-saxonne est très largement devenue une pensée unique, dans le sens où l'empirisme a triomphé du rationalisme, où le matérialisme prédomine l'idéalisme, et où le raisonnement inductif tend à s'imposer sur le raisonnement déductif. De plus, les pressions économiques qu'induisent les sciences, conduisent celles-ci à se retrancher dans un utilitarisme social malsain, à tel point qu'un observateur ne comprend l'intérêt de telle ou telle étude que si elle est directement applicable.

Ce qu'il y a d'étrange, c'est que la géographie française a commencé à rejeter son héritage cartésien à partir des années 1960. D'un rationalisme fondé sur de nombreuses disciplines connexes (la géologie, l'écologie, la météorologie, voire l'histoire), la géographie, en général, est passée à un empirisme total, excluant la possibilité même de construire des lois, alors que le projet initial de l'analyse spatiale était de trouver les lois de l'espace géographique. Bien avant la géographie marxiste d'après-guerre, le matérialisme était déjà au cœur de l'approche, car la géographie est avant tout une science descriptive où l'idéalisme n'a pas sa place. Toutefois, cette thèse a montré un certain nombre de récurrences dans des analyses géographiques fondées sur des abstractions comme l'espace des échelles, donc une forme d'idéalisme. Cela est donc possible pour la géographie de construire un raisonnement abstrait, source de toutes connaissances (Popper, 1998). En ce qui concerne la nature du raisonnement géographique, il reste de nature abductive (Martin, 2004) que l'on se place en géographie humaine ou en géographie physique. Il s'agit d'une logique qui, à partir des effets observés et observables, recherche à établir les causes qui les ont produits. Par exemple, pour expliquer la morphologie urbaine (l'effet), on va rechercher les causes à travers les différents acteurs, la topographie du site, *etc.* Il faudrait donc essayer de construire un raisonnement déductif en géographie qui ne peut s'épanouir que par des abstractions ; l'espace des échelles en est un archétype de ce point de vue. Toutefois, ces abstractions ne peuvent être totales : toute loi doit être vérifiable, c'est-à-dire réfutable, (pour éviter d'utiliser l'anglicisme « falsifiable ») à travers des cas empiriques, et c'est une nouvelle fois l'intérêt des lois d'échelle, mais la possibilité de vérifier celles-ci n'est possible que si l'on ne s'interdit pas de s'inscrire dans une démarche idéaliste, ce que la géographie marxiste a empêché. Le dernier point concerne l'utilité sociale de la géographie. Comme toute science, la géographie ne sert qu'à produire des connaissances que les ingénieurs exploiteront ou n'exploiteront pas, mais en aucun cas, la géographie, et en particulier l'analyse spatiale, ne doit sombrer dans l'ingénierie. Elle possède suffisamment d'atouts pour ne pas rentrer, par exemple, dans la spirale des systèmes d'information géographique qui ne font que limiter la géographie à une « science presse-bouton », à une science impensée et impensable, puisque le terme « information » est lourd de conséquences comme cela a été développé dans le projet 1. La géographie mérite mieux, mais il faut qu'elle prenne le risque du changement, comme en leur temps, Roger Brunet, François Durand-Dastès, et bien d'autres l'ont entrepris pour rebâtir une « Nouvelle géographie » à la fin des années 1960. Cependant, le problème se pose aujourd'hui différemment, car la relecture des travaux de Paul Vidal de la Blache montre qu'il fut précurseur d'un certain nombre de développements de cette « Nouvelle géographie ». L'heure est donc à la synthèse et la recomposition de la connaissance géographique, du moins dans l'école française qui doit refonder son unité (Chouquer, 2000).

Cette unification ne peut être, dans le cadre de cette thèse, qu'un projet à partir duquel il faut débattre.

18.3. Projet 3. De l'unification de la connaissance en géographie

La géographie française a conservé une trace durable de la géomorphologie. Celle-ci fut impériale sur l'ensemble des autres domaines pendant environ un siècle (années 1870 - années 1960). Elle se décompose en deux grands sous-ensembles : la géomorphologie structurale et la géomorphologie dynamique. La première étudie l'inertie spatiale des formes du relief ; la seconde, leur évolution, leur transformation. Cette disposition duale est restée dans toutes les autres branches de la géographie qui ont foisonné ces cinquante dernières années, qu'elles soient humaines ou physiques. En effet, si on ne regarde que la géographie humaine française qui s'est reconstituée dans les années 1960, l'analyse est fondée sur un espace dit support (la structure) et un espace dit relatif (qui est dynamique). Ce constat est effectif dans l'ensemble des branches de la géographie humaine. Si on reprend la répartition des Hommes sur la surface de la Terre, deux grandes disciplines existent : la géographie du peuplement qui étudie la structure (ou l'inertie spatiale) et la géographie de la population qui étudie la dynamique démographique dans des territoires bien définis. Systématiquement, la géographie sépare le statique du dynamique. On peut donc redéfinir la géographie, non plus par l'approche duale géographie physique - géographie humaine, mais par une séparation entre géographie structurale et géographie dynamique.

En ce qui concerne la géographie structurale, ce projet a été initié par Gaétan Desmarais et Gilles Ritchot (2000), mais il n'existe pas de géographie dynamique clairement définie.

La géographie structurale que ce projet propose, est plus beaucoup générale que ce à quoi renvoie l'expression dans le sens des auteurs cités précédemment. D'ailleurs, il vaudrait peut-être mieux l'appeler géographie structurelle (Martin, 2004) qui renvoie à l'étude générale des inerties spatiales observées en géographie. *A contrario*, la géographie dynamique serait la géographie du changement, de la transformation, de la métamorphose, de l'évolution, de la mutation, *etc.*, soit un sens beaucoup plus large que son sens physique. Toutefois, comment montrer qu'un objet géographique change ? Une nouvelle fois le principe de relativité permet d'éclairer cette question. Tout dépend du système de référence. Le problème des analyses géographiques est que, mis à part les champs de la géographie physique et de la géographie historique, les gammes temporelles sont très courtes puisqu'elles sont de l'ordre de la centaine d'années. Peut-on donc démontrer un changement structurel profond sur un pas de temps si court ? La question reste ouverte.

Les liens entre géographie structurale et géographie dynamique sont donc indissolubles. Quelque part, la géographie en affirmant une approche par la catégorie mouvement, s'est fixée un objectif impossible à atteindre, si bien que la seule possibilité pour obtenir un discours scientifique indéniable est la reconstruction de la discipline autour de l'approche complémentaire qu'est la relativité d'échelle. Il faut donc construire directement une géographie dont la connaissance serait fondée sur ces deux catégories (Figure 192). De ce point de vue, cette thèse n'a fait qu'entrouvrir quelques portes extrêmement prometteuses.

		Géographie structurale	Géographie dynamique
Mouvement	Temps	État stable	État instable
	Espace	État stationnaire	État non stationnaire
Échelle	Dimension fractale	État stable d'échelle	État instable d'échelle
	Logarithme de la longueur sur la fractale	État stationnaire en échelle	État non stationnaire en échelle

Figure 192. Tableau résumant la combinaison entre mouvement et échelle vs. géographie structurale et géographie dynamique

On peut toutefois construire cette double géographie en mouvement et en échelles à partir de la notion de lieu, car qu'est-ce qu'un lieu sinon un « point structuré » (Nottale *et alii*, 2009, p. 11) ? Si on reprend l'exemple géohistorique des châteaux, il est impossible d'aller au-delà de la résolution d'étude (le kilomètre). Si on imagine que l'on zoome sur l'un des lieux représentant un des châteaux, et que l'on passe à une résolution en mètre, le « point » représentant ledit château, deviendrait une étendue d'un kilomètre à l'intérieur de laquelle on trouverait d'autres entités que le château comme l'église, les magasins, les habitats, *etc.* De plus, grâce à cette précision supplémentaire dans la résolution, la position du château deviendrait elle-même beaucoup plus précise. De même, si l'on zoome sur ce château en passant à une résolution au centimètre, par exemple, on apercevrait que ce qui a toujours été représenté par un cercle ou par un carré, ne correspond en rien à une forme euclidienne parfaite, mais à une combinaison de formes euclidiennes. On pourrait répéter l'opération en allant vers les grandes échelles géographiques à l'infini, on ne trouverait jamais de points, au sens mathématique du terme.

Ce type de raisonnement, même s'il est souvent mal posé, domine l'approche spatiale des lieux en géographie. Par contre, le raisonnement inverse qui consiste à lier les lieux entre eux par l'intermédiaire de l'objet « territoire », est rarement perçu en géographie. En effet, si les points n'existent pas et s'il n'existe que des « points structurés », n'importe quelle entité géographique très étendue peut devenir un point, donc un lieu. N'importe quel territoire, montagne, lac, agglomération d'habitats, *etc.* peut devenir un lieu. On peut donc construire une « théorie générale du lieu » à partir de la relativité d'échelle, en fusionnant des concepts qui ne sont liés qu'à une certaine échelle d'observation, comme le territoire (au sens large), la région (au sens large), *etc.* Cette approche fractale du lieu permet en plus de conserver, sans contradiction, toutes les approches spatiales développées en géographie depuis les années 1960 : n'importe quel lieu s'exprimant à une échelle n peut devenir l'espace réceptacle d'autres lieux s'exprimant à une échelle $n - 1$. Le lieu commande donc les vides et les pleins, les diffusions et les concentrations d'un espace à une échelle donnée par rapport à une autre. Un lieu n'est donc pas un point, mais un espace caractérisé par une échelle particulière. On constate donc que l'opposition faite entre lieux et espace en géographie est complètement non fondée dans le sens où n'importe quel lieu est susceptible de par un changement d'échelle de devenir un espace.

Toutefois, pour justifier l'existence d'un lieu (d'un point), il faut nécessairement que ce dernier soit porteur d'attributs (Martin, 2003b, p. 184-186), de caractéristiques propres. Si on reprend de nouveau l'exemple des châteaux : une ville ou un village en possèdent un ou pas. L'attribut « château » n'existe donc que dans un schéma binaire oui-non. Il entre alors dans le champ de l'information. Que sait-on sur les lieux du lieu « ville » (ou « village ») ? Cette simple question permet de comprendre la nécessité de faire de l'information une catégorie, car un lieu n'existe que par les attributs qu'il possède qu'ils soient physiques ou humains.

L'objet scientifique de la géographie est donc le lieu, et non l'espace (Figure 193). Le projet de la géographie est donc bien celui de Paul Vidal de la Blache, comprendre la position relative des lieux dans l'espace terrestre (Vidal de la Blache, 1913), projet auquel il faut ajouter « à toutes les échelles ». Il faut préciser que, si on reprend l'interprétation des résultats de l'analyse fractale de l'agglomération de Mont-

béliard, on peut très bien concevoir une explication de la dynamique urbaine en faisant abstraction de l'élément humain, ce qui correspond bien à l'idée même que Paul Vidal de la Blache se faisait de la géographie humaine. « La géographie humaine ne s'oppose donc pas à une géographie d'où l'élément humain serait exclu ; il n'en a existé de telle que dans l'esprit de quelques spécialistes exclusifs. Mais elle apporte une conception nouvelle des rapports entre la terre et l'homme, conception suggérée par une connaissance plus synthétique des lois physiques qui régissent notre sphère et des relations entre les êtres vivants qui la peuplent » (Vidal de la Blache, 1922). La géographie est bien cette « science des lieux et non celle des hommes » (Vidal de la Blache, 1913). Pour conclure, cet objet scientifique « lieu » permet de définir un certain nombre d'objets d'étude. Toutefois, les objets d'étude en géographie demeurent indéfinissables : tout ce qui possède une emprise spatiale dans l'espace terrestre peut faire l'objet d'une géographie particulière (Dauphiné, 2010). Ceci précisé, on peut s'interroger sur le devenir de toutes les études qui font de la géographie humaine une science sociale. Le débat est lancé, et ne peut trouver de réponse tranchée dans cette ouverture.

Projet	Comprendre les lieux
Objet d'étude	Tout ce qui a une emprise spatiale sur la surface terrestre de manière tangible ou abstraite
Méthodes d'objectivation	Observer à différents instants Observer à différents endroits Observer à différentes échelles

Figure 193. Tableau synthétisant ce que pourrait être la science « géographie »

L'objet principal de cette géographie sociale est l'étude des représentations, c'est-à-dire la manière dont les individus perçoivent l'espace géographique qui les entoure. Dans ce cadre, il est évident que la perception d'Accra par rapport à celle de Beijing sera fortement différente, et pourtant, dans l'étude réalisée dans le chapitre 7, ces deux agglomérations possèdent la même dimension fractale (environ 1,7). Dès lors, quelle place accorder à la perception en géographie, lorsque des méthodes d'objectivation montrent qu'elles posent un problème ontologique majeur. Néanmoins, les différences ayant du sens, pourraient être définies par d'autres paramètres.

L'unification de la connaissance en géographie passe par une réconciliation entre le lieu et l'espace. Toutefois, le lieu doit redevenir l'objet central de la géographie, car s'il existe plusieurs « sciences de l'espace », il n'existe qu'une seule « science du lieu », entendue comme localisation sur la surface terrestre. Cependant, cette science du lieu ne doit pas étudier des particularismes, c'est-à-dire réaliser des études idiographiques au sens de Paul Vidal de la Blache, mais rechercher des régularités dans les phénomènes spatiaux observés. Celles-ci ne peuvent être qu'abstraites. S'il est vrai que l'ensemble des configurations spatiales est unique à la surface du globe, ce n'est pas le cas des lois de transformation d'échelles, par exemple, qui sont limitées à une dizaine de cas observés et observables à partir desquels il est possible d'effectuer des classements beaucoup plus abstraits (cf. chapitre 7), et critiquables, non pas du point de vue de la perception, mais de leur objectivation scientifique.

Les trois projets proposés sont donc vitaux pour la géographie. Au sens de cette thèse, ce n'est que par eux que la géographie pourra se construire en une science autonome, dans le sens où son discours scientifique serait fondé sur une théorie bien assise qui lui serait propre. La géographie ne doit donc pas devenir une science sociale, mais rester la science des lieux de Paul Vidal de la Blache (1913). Ceci conduit à se départir de l'idée que tout commence et tout s'achève dans l'Homme

19

Bibliographie

60 km autour d'Amiens. Echelle 1:170 000, Montreuil, Cartes - Plans - Guides Blay Foldex, projection ED50, 2004.

60 km autour de Lille. Echelle 1:145 000, Montreuil, Cartes - Plans - Guides Blay Foldex, projection ED50, 1996.

Al Khalifeh Safouk, 2008, *L'apport de la télédétection dans l'observation de l'étalement urbain. L'exemple de l'agglomération d'Avignon - France*, Avignon, Thèse de doctorat de géographie, sous la direction de P. Martin, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, 417 p.

Alawad, Hiba, Grasland, Loïc, 2009, « Nouveaux médias, nouveaux outils : pertinence et limites de l'exploitation d'images Google Earth pour l'analyse du bâti à l'aide d'un SIG », *Résumés des communications des 9^e rencontres de ThéoQuant des 4-6 mars 2009*, Besançon, p. 18-20

Allain, Rémy, 2005, *Morphologie urbaine. Géographie, aménagement et architecture de la ville*, Paris, Armand Colin, 254 p. [U]

Arrignon, Jean-Pierre, Heuclin, Jean, 2008, *Pouvoirs, églises et société dans les royaumes de France, de Bourgogne et de Germanie aux X^e et XI^e siècles (888-vers 1110)*, Paris, Editions du Temps, 350 p.

Babelon, Jean-Pierre, 1989, *Château de France au siècle de la Renaissance*, Paris, Flammarion, 840 p.

Babin, Barry M., Boles, James S., Babin, Laurie, 1991, « Retailing's contribution to the development of a theory of spatial consumer behavior », *Retrospectives in marketing*, vol. 5, p. 165-178

Bachelard, Gaston, 1934, *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, 184 p. [Quadriga]

Badariotti, Dominique, 2005, « Auto-similarité et auto-référence en urbanisme », in « 12^e journée de Rochebrune » des 24-28 janvier 2005, Paris, Ecole normale supérieure des télécommunications, p. 1-9

Barnsley, Michael, 1988, *Fractals everywhere*, Londres, Academic Press, XIV-534 p.

Barrère, Rémi, 2002, *Mathematica. Calcul formel et programmation symbolique pour l'informatique scientifique*, Paris, Vuibert, XVIII-638 p.

Barthélemy, Dominique, 1990, *L'ordre seigneurial (XI^e-XII^e siècles)*, Paris, Le Seuil, 318 p.

Batty, Michael, Longley, Paul, 1994, *Fractal cities. A geometry of form and function*, Londres, Academic press, XXII-394 p.

Baudelle, Guy, 2003, *Géographie du peuplement*, Paris, Armand Colin, 192 p.

Baudelle, Guy, Regnauld, Hervé, 2004, *Echelles et temporalités en géographie*, Paris, Sedes, 176 p.

Baulig, Henri, 1959, « Morphométrie », *Annales de Géographie, Bulletin de la Société de Géographie*, vol. 68, LXVIII^e année, n°369, p. 385-408

Béguin, Michèle, Pumain, Denise, 1994, *La représentation des données géographiques. Statistique et cartographie*, Paris, Armand Colin, 192 p. [Cursus] [réédition de 2007]

Bejan, Adrian, Lorente, Sylvie, 2004, « Chapitre 4. Thermodynamic formulation of the constructal law », in Rosa, Rui Namorado, Reis, Heitor A., Miguel, Antonio F., *Proceeding of the Symposium. Bejan's constructal theory of shape and structure*, Évora, Centro de Geofísica de Évora, p. 95-120

Bertrandias, Jean-Paul et Françoise, 1997, *Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé*, Grenoble, Presse universitaire de Grenoble, 352 p.

Black, William C., 1987, « Choice-set definition in patronage modeling », *Journal of retailing*, n°63, p. 63-83.

Bouärd, Michel (de), 1975, *Manuel d'archéologie médiévale. De la fouille à l'histoire*, Paris, Sedes, 340 p. [Regards sur l'histoire]

Bouzat, Daniel, 1990, « L'emboîtement des échelles spatio-temporelles dans la formation de l'espace géographique », *Géopoint 1990. Histoire, temps et espace*, Avignon, p. 63-68

Braudel, Fernand, 1958, « Histoire et Sciences sociales. La longue durée », *Annales. Economies, sociétés, civilisation*, n°4 (octobre-décembre), Paris, Armand Colin, p. 725-753

Braudel, Fernand, 1979, *Civilisation matérielle, économie et capitalisme*, 3 tomes, Paris, Armand Colin, 608 p.

Braudel, Fernand, 1985, *La Méditerranée et le monde méditerranéen à l'époque de Philippe II*, Paris, Armand Colin, 630 p. [réédition de 1949]

- Brunhes, Jean, 1900, « Le boulevard comme fait de géographie urbaine », *Congrès de Paris de l'Association pour l'avancement des sciences*, p. 1013-1017
- Brunet, Roger, 1968, *Les phénomènes de discontinuité en géographie*, Paris, Editions du C.N.R.S., 118 p. [Centre de recherches et documentation cartographiques et géographiques]
- Brunet, Roger, 1980, « La composition des modèles dans l'analyse spatiale », *L'espace géographique*, n°4, 253-266 p.
- Brunet, Roger, 1990, *Mondes nouveaux. Le déchiffrement du monde*, volume 1, livre 1, Paris, Hachette, 552 p. [Géographie universelle]
- Brunet, Roger, Ferras, Robert, Théry, Hervé, 1992, *Les mots de la géographie. Dictionnaire critique*, Montpellier, Reclus - Documentation française, 518 p. [Collection Dynamiques de territoire] [3e édition]
- Brunet, Roger, 2001, « Models in geography ? A sense to research », *Cybergeo*, 12th European Colloquium on quantitative and theoretical geography, Saint-Valéry-en-Caux, 10 p. [<http://www.cybergeo.eu/index4288.html>]
- Bryant, Ann, 2007, « Satellite images of world cities », NASA's GeoCover data, <http://geology.com/world-cities/> [consulté le 25 août 2009]
- Bur, Michel, 1999, *Le château*, Paris, Brepols, 164 p. [Typologie des sources du Moyen Age occidental 79]
- Buzenot, Laurence, 2007, « La démarche du géographe et raisonnement multiscalaire », <http://histgeo.ac-aix-marseille.fr/a/div/d043.htm>
- Cadène, Philippe, 1992, in *Géopoint 1992*, Avignon, p. 185-186
- Cash, Roland, Chaline, Jean, Nottale, Laurent, Grou, Pierre, 2002, « Développement humain et loi log-périodique », *C.R. Biologies*, 325, p. 585-590 [<http://www.wusr.obspm.fr/~nottale/arcash.pdf>]
- Châtelain, André, 1996, *Châteaux forts. Images de pierre des guerres médiévales*, Paris, Desclée de Brouwer, 116 p.
- Chaunu, Pierre, 1969, *Conquête et exploitation des nouveaux mondes*, Paris, PUF, 446 p. [Nouvelle Clio]
- Chorley, Richard J., Kennedy, Barbara A., 1971, *Physical geography. A systems approach*, Londres, Prentice Hall International, XXII-370 p.
- Chouquer, Gérard, 2000, *L'étude des paysages. Essais sur leurs formes et leur histoire*, Paris, Errance, 208 p.
- Chouquer, Gérard, 2008, *Traité d'archéogéographie. La crise des récits géohistoriques*, Paris, Errance, 200 p.
- Christ, Yvan, 1978, *Dictionnaire des châteaux de France*, t. 4, Thiebaut, Jacques, Artois, Flandre, Hainaut, Picardie. Nord, Pas-de-Calais, Somme, Aisne, Paris, Berger-Levrault, 328 p.
- Christaller, Walter, 1933, *Die zentralen orte in Süddeutschland : eine ökonomisch-geographische untersuchung über die gesetz massigkeit der verbreitung und entwicklung der siedlungen mit städtischen funktionen*, Jean, Fischer Verlag.
- Ciatonni, Annette (s.d.), 2005, *La géographie : pourquoi ? comment ? Objets et démarches de la géographie d'aujourd'hui*, Paris, Hatier, 286 p. [Initial]
- Clark, Colin Grant, 1967, *Population growth and land use*, London, MacMillan, 416 p.
- Claval, Paul, 2003, *Causalité et géographie*, Paris, L'Harmattan, 126 p.
- Contamine, Philippe, 1980, *La guerre au Moyen Age*, Paris, PUF, 516 p. [Nouvelle Clio]
- Converse, Paul D., 1948, « New laws of retail gravitation », *Journal of marketing*, n°13, p. 379-384
- Coque, Roger, 1993, *Géomorphologie*, Paris, Armand Colin, 504 p. [U] [réédition de 1977]
- Cuénin, René, 1972, *Cartographie générale*, t. 1, *Notions générales et principes d'élaboration*, Eyrolles, 326 p.
- Curry, Leslie, 1964, « The random spatial economy : an exploration in settlement theory », *Annals of the association of american geographers*, vol. 54, p. 138-146.
- Cuvillier, Jean-Pierre, 1998, *Histoire de l'Europe occidentale au Moyen Age*, Paris, Ellipses, 352 p. [Universités Histoire]
- Da Rocha, Daniel, 2004, *Structuration gravitationnelle en relativité d'échelle*, Meudon, Observatoire de Paris, Thèse de physique, XII-288 p.
- Dardel, Eric, 1990, *L'homme et la terre*, Paris, CTHS, 200 p.
- Dauphiné, André, 1978, « Mathématiques et concepts en géographie », in *Géopoint 1978*, Avignon, p. 7-53
- Dauphiné, André, 1987, *Les modèles de simulation en géographie*, Paris, Economica, 188 p.
- Dauphiné, André, 1995, *Chaos, fractales et dynamiques en géographie*, Paris, Reclus, 136 p.
- Dauphiné, André, 2003, *Les théories de la complexité chez les géographes*, Paris, Economica, 248 p. [Anthropos]
- Dauphiné, André, 2010, « Une théorie générale des formes géographiques », *Communication orale dans le cadre d'un séminaire de préparation au Géoooint 2010*, Avignon
- David, Olivier, 2004, *La population mondiale. Répartition, dynamique et mobilité*, Paris, Armand Colin, 192 p. [Campus géographie]
- Davis, William Morris, 1899, « The geographical cycle », *Geog. Jour.*, n°14, p. 481-504

- Debord, André, 2000, *Aristocratie et pouvoir. Le rôle du château dans la France médiévale*, Paris, Picard, 238 p. [« Espaces médiévaux »]
- Delahaye, Jean-Paul, 1999, *Information, complexité et hasard*, Paris, Hermès, 276 p.
- Derruau, Max, 2001, *Les formes du relief terrestre. Notions de géomorphologie*, Paris, Armand Colin, 120 p. [U] [8e édition]
- Desmarais, Gaétan, Ritchot, Gilles, 2000, *La géographie structurale*, Paris, L'Harmattan, 148 p.
- Dion, Roger, 1959, *Histoire de la vigne et du vin en France des origines au XIX^e siècle*, Paris, Clavreuil, 770 p.
- Djament, Géraldine, 2003, « Par-delà de la Ville Eternelle », *Espaces Temps Les Cahiers*, « Continu/Discontinu. Puissances et impuissances d'un couple », n°82-83, <http://espacestems.revues.org/document204.html>
- [DROM] 1999, *Dictionnaire raisonné de l'Occident médiéval*, Le Goff, Jacques, Schmitt, Jean-Claude, Paris, Fayard, 1236 p.
- Dodds, Peter Sheridan, Rothman, Daniel H., 1999, « Unified view of scaling laws for river networks », *Phys. Rev.*, E59(5), 14 p.
- Dodds, Peter Sheridan, Rothman, Daniel H., 2000, « Scaling, universality and geomorphology », *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, n°28, 42 p.
- Douvinet, Johnny, Delahaye, Daniel, Langlois, Patrice, 2005, « Catchment morphology and dynamics of hyperconcentrated stream flows on loamy plateaux (Basin Paris, North-West France) », *ICG2005. Abstracts volume of sixth international conference on geomorphology*, Zaragoza, p. 360
- Douvinet, Johnny, Delahaye, Daniel, Langlois, Patrice, 2007, « De la morphométrie à un champ de mesure de l'efficacité structurelle du bassin versant », *Sageo 2007*, <http://www.emse.fr/site/SAGEO2007/CDROM/p18.pdf>, 15 p.
- Dubois, Jacques, 1995, *La dynamique non linéaire en physique du globe*, Paris, Masson, XIV-266 p.
- Duby, Georges (s.d.), 1971, *Histoire de la France*, Paris, Larousse, t. 1 : *Des origines à 1348*, 414 p. ; t. 2 : *de 1348 à 1852*, 455 p. ; t. 3 : *de 1852 à nos jours*, 448 p.
- Duby, Georges (s.d.), 1987, *Atlas historique mondial*, Paris, Larousse-Bordas, 350 p.
- Duby, Georges, 1997, *Le Moyen Age de Hugues Capet à Jeanne d'Arc (987-1460)*, Paris, Hachette, 508 p. [Pluriel]
- Dumont, Gérard-François, 2004, *Les populations du monde*, Paris, Armand Colin, 288 p. [U]
- Durand, Daniel, 2002, *La systémique*, Paris, P.U.F., 128 p. [Que sais-je ? 1795]
- Durand-Dastès, François, 1984, « Systèmes et localisation : problèmes théoriques et formels », *Géopoint 1984. Systèmes et localisations*, Avignon, Groupe Dupont, p. 19-44
- Durand-Dastès, François, 1990, « La mémoire de Gaïa », in *Géopoint 1990 « Histoire, temps et espace »*, Avignon, p. 147-151
- Durand-Dastès, François, 1995, in Bailly, Antoine, Ferras, Robert, Pumain, Denise (s.d.), 1995, *Encyclopédie de géographie*, Paris, Economica, 1168 p.
- Durand-Dastès, François, 2001, « Les concepts de la modélisation en analyse spatiale », in Sanders, Léna (s.d.), *Modèles en analyse spatiale*, Paris, Lavoisier, p. 31-59
- Durliat, Jean, 2002, *De l'Antiquité au Moyen Age. L'Occident de 313 à 800*, Paris, Ellipse, 192 p.
- Eckert, Max, 1921, trad. fr. inédite, in Hangouët, Jean-François, 1998, *Approche et méthodes pour l'automatisation de la généralisation cartographique ; application en bord de ville*, Marne-la-Vallée, Thèse de l'Université de Marne-la-Vallée, p. 288-311.
- Fardin, Nader, Stephansson, Ove, Lauri, Jing, 2001, « The scale dependance of rock joint surface roughness », *International journal of rock mechanics and missing sciences*, n°38, p. 659-669
- Febvre, Lucien, 1947, « Limites et frontières », *Annales. Economies, sociétés, civilisations*, vol. 2(2), p. 201-207
- Ferras, Robert, 1993, *Les modèles graphiques en géographie*, Paris, Economica, 112 p.
- Feuchière, Pierre, 1954, « Dans le Nord de la France. La permanence des cadres territoriaux », *Annales. Economies, sociétés, civilisations*, vol. 9(1), p. 94-100
- Forriez, Maxime, 2005, *La motte de Boves permet-elle de mener une réflexion épistémologique commune en archéologie, en géographie et en histoire ?*, Arras, Mémoire de master 1 d'histoire et de géographie, 156 p.
- Forriez, Maxime, 2007, *Construction d'un espace géographique fractal. Pour une géographie mathématique et recherche d'une théorie de la forme*, Université d'Avignon, Mémoire de Master 2, 202 p.
- Forriez, Maxime, Martin, Philippe, 2007, « Structures hiérarchiques en géographie : des modèles linéaires aux modèles non linéaires (lois de puissance et corrections log-périodiques) », in *Résumés des huitièmes rencontres de Théo Quant (10-12 janvier 2007)*, Besançon, 1 p.
- Forriez, Maxime, Martin, Philippe, 2008, « De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale. Partie 2. Application d'un modèle scalaire spatio-temporel », in *Géopoint 2006. Demain la géographie. Permanences, dynamiques, mutations : Pourquoi ? Comment ?*, Avignon, Groupe Dupont et UMR Espace 6012 du CNRS éditeurs, 305-312 p.
- Forriez, Maxime, Martin, Philippe, 2009, « Structures hiérarchiques en géographie : des modèles linéaires aux modèles non linéaires (lois de puissance et corrections log-périodiques) », in *Actes des huitièmes rencontres de Théo Quant (10-12 janvier 2007)*, Besançon, 10 p.
- Forriez, Maxime, Martin, Philippe, Nottale, Laurent, 2009, « Transition fractal - non fractal en géographie. Réflexions sur les lois d'échelles possible à travers l'étude de quelques cas », in *Neuvièmes rencontres de ThéoQuant - Résumés des communications*, Besançon, p. 82

- Fossier, Robert, 1968, *La terre et les hommes en Picardie*, 2 tomes, Paris, Béatrice-Nauwelaerts, 824 p.
- Fossier, Robert, 1974, *Histoire de la Picardie*, Toulouse, Privat, 458 p.
- Fotheringham, A. Stewart, Wong, David W.S., 1991, « The modifiable areal unit problem in multivariate statistical analysis », *Environment and planning A*, Pion Ltd, vol. 23(7), p. 1025-1044
- Fourquin, Guy, 1970, *Seigneurie et féodalité au Moyen Age*, Paris, PUF, 244 p.
- Fournier, Gabriel, 1978, *Le château dans la France médiévale. Essai de sociologie monumentale*, Paris, Aubier Montaigne, 398 p.
- Franc, Alain, 2001, « Formalisation mathématique des interactions spatiales », in Sanders, Léna (s.d.), *Modèles en analyse spatiale*, Paris, Lavoisier, p. 283-300
- Frankhauser, Pierre, 1994, *La fractalité des structures urbaines*, Paris, Anthropos, 292 p.
- Frankhauser, Pierre, 1998, « La formation fractale des tissus urbains », *Cahiers de géographie du Québec*, vol. 42, n°117, p. 379-398
- Frankhauser, Pierre, Pumain, Denise, 2001, « Fractales et géographie », in Sanders, Léna (s.d.), *Modèles en analyse spatiale*, Paris, Lavoisier, p. 301-329
- Galilée, 1979, *L'Essayeur*, trad. Christine Chauviré, Paris, CUF, 308 p. [« Les Belles Lettres »] [réédition de 1623]
- Garcia-Ruiz, Juan M., Otálora, Fermín, 1992, « Fractal tree and Horton's laws », *Mathematical Geology*, vol. 24, n°1, p. 61-71
- Gay, Jean-Christophe, 2004, *Les discontinuités spatiales*, Paris, Economica, 112 p. [Poche géographie]
- George, Pierre, 1993, *Géographie de la population*, Paris, PUF, 128 p. [Que sais-je ? 1187]
- Girard, Michel-Claude, Girard, Colette M., 1999, *Traitement des données de télédétection*, Paris, Dunod, 528 p. [Techniques industrielles et sciences de l'ingénieur]
- Giraud, Gaël, 2009, *La théorie des jeux*, Paris, Flammarion, 410 p. [Champs 941]
- Gleick, James, 1991, *La théorie du chaos. Vers une nouvelle science*, trad. Christian Jeanmougin, Paris, Flammarion, 432 p.
- Goze, Antoine, 1976, *Histoire des rues d'Amiens*, Bruxelles, Editions Culture et Civilisation, 204 p., 235 p., 252 p., 178 p. [réédition de 1854-1861]
- Grasland, Claude, 1991, *Espaces politiques et dynamiques démographiques en Europe*, Paris Université de Paris I, Thèse d'université, 460 p.
- Grataloup, Christian, 1996, *Lieux d'histoire. Essai de géohistoire systématique*, Paris, Reclus, 200 p. [Espace modes d'emploi]
- Guerin-Pace, France, 1993, *Deux siècles de croissance urbaine. La population des villes françaises de 1831 à 1990*, Paris, Anthropos, XIV-206 p. [Collection VILLES]
- Guerrien, Bernard, 1995, *La théorie des jeux*, Paris, Economica, 108 p.
- Guillon, Michelle, Sztokman, Nicolas, 2008, *Géographie mondiale de la population*, Paris, Ellipses, 350 p. [Universités géographie]
- Haggett, Peter, 1965, *Localization analysis in human geography*, London, Edward Arnold Ltd, 390 p.
- Haggett, Peter, 1973, *L'analyse spatiale en géographie humaine*, Paris, Armand Colin, 390 p. [U]
- Hangouët, Jean-François, 1998, *Approche et méthodes pour l'automatisation de la généralisation cartographique ; application en bord de ville*, Marne-la-Vallée, Thèse de l'Université de Marne-la-Vallée, 350 p.
- Harouel, Jean-Louis, Barbey, Jean, Bournazel, Eric, 2006, *Histoire des institutions de l'époque franque à la Révolution*, Paris, PUF, 646 p. [Classique. Droit fondamental]
- Héliot, Pierre, 1965, « Remarques sur les châteaux forts bâtis en France du X^e au XII^e siècle », *Comptes-rendus des séances de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*, vol. 109(1), p. 169-175
- Henrot, Antoine, Sokolowski, Jan, 2003, « Qu'est-ce que l'optimisation de la forme ? », in 1903-2003. *Un siècle de mathématiques à Nancy*, Nancy, Institut Elie Cartan, p. 51-61
- Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1996, *L'optimisation*, Paris, P.U.F., 128 p. [Que sais-je ?]
- Horton, Robert Elmer, 1945, « Erosional development of streams and their drainage basins ; hydrophysical approach to quantitative morphology », *Geol. Soc. America Bull.*, n°56, p. 275-370
- Hubert, Jean-Paul, 1993, *La discontinuité critique. Essai sur les principes a priori de la géographie humaine*, Paris, Publications de la Sorbonne, 222 p.
- Huff, David, 1964, « Defining and estimating a trading area », *Journal of marketing*, n°28, p. 34-38
- Huyghe, René, 1971, *Formes et forces. De l'atome à Rembrandt*, Paris, Flammarion, 444 p.
- Keersmaecker, Marie-Laurence (de), Frankhauser, Pierre, Thomas, Isabelle, 2004, « Analyse de la réalité fractale périurbaine : l'exemple de Bruxelles », *L'espace géographique*, n°3, p. 219-240
- Kerheve, Jean, 1998, *Histoire de France. La naissance de l'Etat moderne (1180-1492)*, Paris, Hachette, 272 p. [Carré histoire n°44]

- Isard, Walter, 1956, *Location and space economy*, New York, J. Wiley, 350 p.
- La Barbara, Paolo, Rosso, Renzo, 1989, « On the fractal dimension of stream networks », *Water Resources Research*, vol. 25, p. 735-741
- Labelle, Jacques, 1981, *La théorie des graphes*, Mont-Royal, Modulo, VIII-184 p.
- Lacoste, Yves, 1976, *La géographie ça sert d'abord à faire la guerre*, Paris, La Découverte, 214 p. [réédition en 1985]
- Laherrère, Jean, 1996, « Distributions de type « fractal parabolique » dans la nature », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 322, série IIa, p. 535-541
- Lanco Bertrand, Sophie, 2005, *Analyse comparée des dynamiques spatiales des poissons et des pêcheurs. Mouvements et distributions dans la pêche d'anchois (engraulis ringens) du Pérou*, Rennes, Thèse de l'Ecole nationale supérieure agronomique, 194 p.
- Le Bras, Hervé, 1993, *La planète au village. Migrations et peuplement en France*, Paris, Editions de l'aube, 222 p. [Monde en cours]
- Le Bras, Hervé, 2000, *Essai de géométrie sociale*, Paris Odile Jacob, 402 p.
- Le Bras, Hervé, 2005, *La démographie*, Paris, Odile Jacob, 456 p.
- Le Corre, Sébastien, Guillaume, Régis, Galaup, Maylis, Boissezon (de), Hélène, 2000, « Intérêts et limites de l'utilisation des images satellites en vue de la constitution d'un SIG pour la région urbaine d'Istanbul », in Colloque « Représenter Istanbul hier et aujourd'hui » des 19 et 20 mai 2000, Toulouse, Centre Interdisciplinaire d'Etudes Urbaines - SCOT, 23 p.
- Le Jan, Régine, 1999, *Histoire de France. Origine et premier essor (480-1180)*, Paris, Hachette, 254 p. [Carré histoire]
- Le Méhauté, Alain, 1990, *Les géométries fractales. L'espace-temps brisé*, Paris, Hermès, 198 p.
- Lebecq, Stéphane, 1990, *Nouvelle histoire de la France médiévale*, t. 1, *Les origines franques (Ve - IXe siècle)*, Paris, Le Seuil, 318 p. [Points]
- Leblanc, Olivier, 2003, *Les seigneurs de Boves. Origines et exercices du pouvoir en Picardie (IXe-XIIIe siècle)*, Amiens, Thèse de l'Université de Picardie.
- Lesne, Annick, 2004, « Fractales : les limites du réel », *Tangente. L'aventure mathématique. Les Fractales. Art, nature et modélisation*, HS n°18, Paris, Pole, p. 102-108.
- Lévy, Albert, 2005, « Formes urbaines et significations : revisiter la morphologie urbaine », *Espaces et sociétés*, n°3, 122, p. 25-48
- Lévy, Jacques, Lussault, Michel, 2003, *Dictionnaire de la géographie et de l'espace des sociétés*, Paris, Belin, 1034 p.
- Losch, Albert, 1940, *Die räumliche ordnung der wirtschaft*, Iena, Fischer.
- Maby, Jean (s.d.), 2003, *Objets et indicateurs géographiques*, Avignon, Université d'Avignon, 316 p. [Collection Actes Avignon n°5]
- Maignant, Gilles, 2007, « Dispersion de polluants et morphologie urbaine », *L'espace géographique*, n°2, p. 141-154
- Mandelbrot, Benoît, 1963, « New methods in statistical economics », *Journal of political economy*, n°71, p. 421-440 [Repris dans Mandelbrot, 1997]
- Mandelbrot, Benoît, 1967, « How long is the coast of Britain ? Statistical self similarity and fractional dimension », *Science*, n°156, p. 637-640
- Mandelbrot, Benoît, 1975, *Les objets fractals*, Paris, Flammarion, 208 p.
- Mandelbrot, Benoît, 1977, *The fractal geometry of nature*, New York, W. H. Freeman and Compagny, 460 p.
- Mandelbrot, Benoît, 1982, *The fractal geometry of nature*, San Francisco, W. H. Freeman and Compagny, 468 p. [réédition complétée de 1977]
- Mandelbrot, Benoît, 1997, *Fractales, hasard et finances (1959-1997)*, Paris, Flammarion, 246 p.
- Mangiavillano, Adrien, 2008, *Multi-scalarité du phénomène feu de forêt en régions méditerranéennes françaises de 1973 à 2006*, Avignon, Thèse de l'Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, 485 p.
- Marceau, Danielle J., 1999, « The scale issue in social and natural sciences », *Canadian Journal of Remote Sens.*, vol. 25, n°4, p. 347-356
- Martin, Philippe, Forriez, Maxime, 2008, « De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale. Partie 1. Recherche d'un modèle scalaire spatio-temporel », in *Géopoint 2006. Demain la géographie. Permanences, dynamiques, mutations : Pourquoi ? Comment ?*, Avignon, Groupe Dupont et UMR Espace 6012 du CNRS éditeurs, 297-303 p.
- Martin, Philippe, 1991, *Hydromorphologie des géosystèmes karstiques des versants nord et ouest de la Sainte-Baume (Bouche du Rhône, Var ; France). Etude hydrologique, hydrochimique et de vulnérabilité à la pollution*, Marseille, Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II, 321 p.
- Martin Philippe, 1997, Structures hiérarchiques dans le karst de la Sainte Baume (B. du Rh, Var ; France), *12e Congrès de spéléologie*, Symposium 7, Vol.1, Union internationale de spéléologie et Société suisse de spéléologie éditeurs, p. 129-132.
- Martin, Philippe, 2003a, « Construire un objet géographique. Recherche d'une méthodologie. » in Maby, Jacques (s.d.), *Objets et indicateurs géographiques*, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 42-88 [En ligne : <http://www.um-respace.org> et <http://www.geo.univ-avignon.fr>]
- Martin, Philippe, 2003b, « Objectivation des formes en géographie et calculs d'indicateurs fractals. Exemples karstiques. » in *Objets et indicateurs géographiques* sous la direction de J. MABY, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 153-268 [En ligne : <http://www.umrespace.org> et <http://www.geo.univ-avignon.fr>]

- Martin, Philippe, 2003c, « Les limites en géographie physique. Eléments de réflexion », *Travaux de l'Institut de géographie de Reims*, « Frontières, limites et continuité », Reims, vol. 29, n°113-114, p. 127-143.
- Martin, Philippe, 2004, *Modélisation fractale et structurale des formes en géographie. Réflexion développée à partir d'exemples karstiques*, 3 tomes, Avignon, HDR, 169 p., 314 p., 179 p.
- Martin Philippe, 2005, (sous la direction de Volvey A.), Géométrie fractale et géographie : l'exemple des formes physiques. in *Echelles et temporalités*, Atlande, Paris, p. 65-71.
- Martin, Philippe. 2006a, La forme peut-elle libérer la prisonnière du carrefour ? Vers une théorie de la forme en géographie. *Colloque Géopoint 2004 : La forme en géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 19-38.
- Martin, Philippe, 2006b, La dimension fractale d'un relief varie-t-elle avec l'altitude ? L'exemple de l'Aigoual (France). *Colloque Géopoint 2004 : La forme en géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 327-332.
- Martin, Philippe, 2006c, Des courbes de niveau fractales « scale dependent » à l'Aigoual (France) ? Mesure et signification d'une courbure, in *Colloque Géopoint 2004 : La forme en géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 333-340.
- Martin, Philippe, 2006d, Fractale parabolique et fractale « scale dependent » : Un problème de courbure ? Echelle et finitude, in *Colloque Géopoint 2004 : La forme en géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 341-352.
- Martin, Philippe, 2006e, « Synthèse du thème 3 (atelier 2). L'instrumentation pour la reconnaissance et la construction des formes en géographie ; de la carte à la morphologie mathématique », in *Colloque Géopoint 2004. La forme en géographie*, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 383-390
- Martin, Philippe, 2008a, « Les limites du temps et la géographie de demain », in *Colloque Géopoint 2006. Demain la géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, Brouillons Dupont, p. 37.
- Martin, Philippe, 2008b, « Ne faudrait-il pas renaturaliser la géographie ? », in *Colloque Géopoint 2006. Demain la géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, Brouillons Dupont, p. 81.
- Martin, Philippe, 2008c, « Caractérisation fractale du relief « stationnarisé » du Lodévois », in *Colloque SAGEO 2006*, Cdrom ISBN 2-9526014-1-0, Laboratoire : Image et ville et Université L. Pasteur, Strasbourg éditeur, 23 p.
- Martin, Philippe, 2009, « Approche fractale des Grands Causses (Massif Central, France). Structure spatiale de la relation existant entre l'altitude et la dimension fractale de courbes de niveau covariantes », in *Actes des Journées de l'Association Française de Karstologie de Sion (Suisse)*, Université de Lausanne éditeur.
- Mathian, Hélène, Piron, Marie, 2001, « Echelles géographiques et méthodes statistiques multidimensionnelles », in Sanders, Léna (s.d.), *Modèles en analyse spatiale*, Paris, Lavoisier, p. 61-103
- Mathieu, Jérôme, 2007, « La notion d'échelle en écologie », http://www.jerome.mathieu.freesurf.fr/ppt/cours_echelles.ppt, 109 diapositives.
- Mathis, Philippe, 2001, « Graphe et fractale. Le fractal comme réalisation sous contraintes et méthodes d'extension - réduction des graphes », in *ThéoQuant 2001*, <http://thema.univ-fcomte.fr/theoq/pdf/2001/mathis.pdf/>, 20 p.
- Mathis, Philippe (s.d.), 2003a, *Graphes et réseaux. Modélisation multiniveau*, Paris, Lavoisier, 362 p.
- Mathis, Philippe, 2003b, « Puissance et insuffisances des graphes pour la description et la modélisation des réseaux », in Mathis, Philippe (s.d.), *Graphes et réseaux. Modélisation multiniveau*, Paris, Lavoisier, p. 19-47
- Mayet, Laurent, 2005, « L'émergence d'une nouvelle science ? », *Sciences et avenir*. « L'énigme de l'émergence », HS n°143, juillet-août 2005, p. 5.
- [MCFAPH] 1973, *Merveilles des châteaux des Flandres, d'Artois, de Picardie et du Hainaut*, Paris, Hachette, 286 p. [Librairie hachette et société d'étude et de publications économiques]
- Medina-Nicolas, Lucile, 2004, « L'étude des frontières : un état des lieux à travers la production doctorale française », *Annales de géographie*, n°636, Paris, Armand Colin, p. 74-86
- Melchior-Bonnet, Christian (s.d.), 1980, *Le grand livre de l'histoire de France*, Paris, Librairie Jules Tallandier, 368 p.
- Mesqui, Jean, 1997, *Châteaux forts et fortifications en France*, Paris, Flammarion, 494 p.
- Miossec, Alain, 1998, *Les littoraux entre nature et aménagement*, Paris, Armand Colin, 192 p. [Campus]
- Miossec, Jean-Marie, 2008, *Géohistoire de la régionalisation de la France. L'horizon régional*, Paris, PUF, XX-602 p. [Quadrige]
- Mirot, Léon, Mirot, Albert, 1947, *Manuel de géographie historique de la France*, Paris, Picard, XXVIII-620 p. [réédition de 1928]
- Morency, Catherine, Chapleau, Robert, 2003, « Fractal geometry for the characterization of urban-related states : greater Montreal case », *Harmonic and fractal image analysis*, e-journal, p. 30-34 [<http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/>]
- Morgenthaler, Stephan, 2007, *Introduction à la statistique*, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, XII-386 p. [Enseignement des mathématiques] [3e édition augmentée]
- Moriconi-Ébrard, François, 1994, *Geopolis. Pour comparer les villes du monde*, Paris, Anthropos, 246 p. [Collection VILLES]
- Mottet, Gérard, 1999, *Géographie physique de la France*, Paris, P.U.F., XVI-768 p.
- Moussa, Roger, Bocquillon, Claude, 1993, « Morphologie fractale du réseau hydrographique », in *Hydrological sciences - Journal des Sciences hydrologiques*, n°38, 3, 6, p. 187-201

- Murray, Cecil D., 1927, « A relationship between circumference and weight and its bearing on branching angles », *J. Gen. Physiol.*, n°10, p. 725-729
- Noin, Daniel, 1979, *Géographie de la population*, Paris, Armand Colin, VIII-280 p. [U]
- Noin, Daniel, Thumerelle, Pierre-Jean, 1993, *L'étude géographique des populations*, Paris, Masson, VIII-124 p.
- Nordmann, Daniel, 1977, « Géographie ou histoire d'une frontière franco-belge », *Annales. Economies, sociétés, civilisations*, vol. 32(3), p. 433-444
- Nottale, Laurent, Chaline, Jean, Grou, Pierre, 2000, *Les arbres de l'évolution. Univers, vie, sociétés*, Paris, Hachette, 380 p.
- Nottale, Laurent, Chaline, Jean, Grou, Pierre, 2002, *Evolution morphologique et culturelle humaine : l'apport des modèles fractales*, <http://www.usr.obspm.fr/~nottale/arGNCaix.pdf/>, 12 p.
- Nottale, Laurent, Chaline, Jean, Grou, Pierre, 2009, *Des fleurs pour Schrödinger. La relativité d'échelle et ses applications*, Paris, Ellipses, 422 p.
- Nottale, Laurent, Forriez, Maxime, Martin, Philippe, 2009, « Analyse fractale du bassin des Gardons dans le cadre de la relativité d'échelle », in Journées TRANS-ERI-COD – Livret des résumés, Journées tenues les 15-17 juin 2009 à Avignon, p. 14
- Nottale, Laurent, Martin, Philippe, Forriez, Maxime, 2010, « Analyse en relativité d'échelle du bassin versant du Gardon. Etude de la variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude et de l'échelle » (titre temporaire), in *Rencontres TRANS-ERI-COD des 15 au 17 juin 2009*, Avignon, UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeur, 24 p.
- Nottale, Laurent, Schneider, Jean, 1984, « Fractals and Non-Standard Analysis », *J. Math. Phys.*, 25, 1296.
- Nottale, Laurent, 1989, « Fractals and the quantum theory of space-time », *Int. J. Mod. Phys. A* 4, p. 5047-5117
- Nottale, Laurent, 1992, « The theory of scale relativity », *Int. J. Mod. Phys. A* 7, 4899-4936 [http://luth.obspm.fr/_luthier/nottale/arIIMP2.pdf].
- Nottale, Laurent, 1993, *Fractal space-time and microphysics. Toward a theory of scale relativity*, Singapour, World scientific, XIV-338 p.
- Nottale, Laurent, 1994, « Scale relativity, fractal space-time, and quantum mechanics », *Chaos, Solitons & Fractals*, n°4, p. 361-388.
- Nottale, Laurent, 1997, « Scale relativity » in *Scale invariance and beyond*, EDP Sciences Springer, p. 249-261
- Nottale, Laurent, 1998, *La relativité dans tous ses états. Au-delà de l'espace-temps*, Paris, Hachette, 320 p.
- Nottale, Laurent 2001a, « Relativité d'échelle. Structure de la théorie », in *Objets d'échelles, Revue de synthèse*, n°1, T.122, p. 11-25.
- Nottale, Laurent, 2001b, « Relativité d'échelle et morphogenèse », in *Objets d'échelles, Revue de synthèse*, n°1, T.122, p. 93-116.
- Nottale, Laurent, 2002a, « Relativité d'échelle, non différentiabilité et espace-temps fractal », in Abry, P., Goncalves, P. et Lévy-Véhel, J., *Traité IC2*, volume n°2, « Lois d'échelle, fractales et ondelettes », Chapitre 7, Hermès Lavoisier, 234 p.
- Nottale, Laurent, 2002b, « La relativité d'échelle », in Réda Benkirane, *La Complexité, vertiges et promesses. 18 histoires de sciences*, Paris, Le Pommier, p. 331-356.
- Nottale, Laurent, 2010, *The theory of scale relativity. Nondifferentiable space-time, fractal geometry and quantum mechanics* [en cours d'édition]
- [OMT] 1995, *Ondelettes, multifractales et turbulences. De l'ADN aux croissances cristallines*, Arnéodo, Alain, Argoul, Françoise, Bacry, Emmanuel, Elezgaray, Juan, Muzy, Jean-François, Paris, Diderot, 168-XXXIII p.
- Octavia, Gaël, 2005, « Des formes optimales », *Tangente*, « Ces formes qui nous fascinent », n°106, septembre-octobre 2005, p. 14-15
- Openshaw, Stan, 1981, « Le problème de l'agrégation spatiale en géographie », *L'Espace géographique*, n°1, p. 15-24.
- Pareto, Vilfredo, 1896, *Cours d'économie politique*, in Pareto, Vilfredo, *Œuvres complètes*, Droz, Genève, 1965.
- Parisi, Giorgio, Frisch, Uriel, 1985, « A multifractal model of intermittency », in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, North-Holland, Amsterdam, Editions M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, p 84-88
- Parrochia, Daniel, 2006, « Pour une théorie de la relativité géographique. Vers une généralisation du modèle gravitaire », *Cybergeo*, n°337, 18 p.
- Petitot, Jean, 1998, « Nature et enjeux de la modélisation en sciences sociales », *Interdisciplinarités*, Hiver 1998, p. 75-102
- Petitot, Jean, 2004, *Morphologie et esthétique*. Maisonneuve & Larose éditeur, Paris, 374 p.
- Pirenne, Henri, 1992, *Mahomet et Charlemagne*, Paris, PUF, 224 p. [Quadrige] [réédition de 1937]
- Piron, Marie, 1990, *Structuration de l'information à plusieurs niveaux et analyse des données : application aux données d'une enquête socio-économique à Ouagadougou (Burkina Faso)*, Paris, Université de Paris VI, Thèse d'université, 265 p.
- Piron, Marie, 1992, *Analyse statistique d'un système d'échelles*, Bondy-ORSTOM, 211 p. [Document de travail - Réseau ADOC, 4]
- Piron, Marie, 1993, « Changer d'échelle : une méthode pour l'analyse des systèmes d'échelles », *L'espace géographique*, n°2, p. 147-165
- Pitte, Jean-Robert, 2003, *Histoire du paysage français de la préhistoire à nos jours*, Paris, Tallandier, 550 p. [Approche] [réédition de 1983]
- Planhol, Xavier (de), 1988, *Géographie historique de la France*, Paris, Fayard, 636 p.
- Poirrier, Philippe, 2000, *Aborder l'histoire*, Paris, Le Seuil, 95 p. [Mémo 126]

- Popper, Karl R., 1998, *Des sources de la connaissance et de l'ignorance*, trad. fr. Michèle-Irène et Marc B. de Launay, Paris, Payot, 158 p. [réédition de 1963]
- Prusinkiewicz, Przemyslaw, Hammel, Mark, 1993, « A Fractal model of mountains with rivers », *Proceeding of graphics interface*, Toronto, p. 174-180
- Pumain, Denise, 1982, *La dynamique des villes*, Paris, Economica, 232 p. [Géographie économique]
- Pumain, Denise, 2003, « Du local au global, une géographie sans échelle », *Cybergeo*, 1 p.
- Pumain, Denise, 2006, *Hierarchy in natural and social sciences*, Dordrecht, Springer, X-244 p. [Methodos series volume 3]
- Pumain, Denise, Robic, Marie-Claire, 2002, « Le rôle des mathématiques dans une « révolution » théorique et quantitative : la géographie française depuis les années 1970 », *Sciences Humaines*, n°6, p. 123-144 [http://www.cairn.info/article.php?ID_REVUE=RHSH&ID_NUMPUBLIE=RHSH006&ID_ARTICLE=RHSH0060123]
- Pumain, Denise, Saint-Julien, Thérèse, 2001, *Les interactions spatiales*, Paris, Armand Colin, 192 p. [Cursus]
- Quadros Da Silveira, Nará de Fátima, 2006, *Análise fractal de bacias hidrográficas de região de encosta e região de planalto com base em cartas topográficas e em fotografias aéreas*, Florianópolis, Thèse de doctorat de l'Université fédérale de Santa Catarina, XXIII-164 p.
- Racinet, Philippe (s.d.), 1996a, *Recherches pluridisciplinaires sur le terroir picard de l'époque antique à la Révolution française : Boves. Complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame »*, Amiens.
- Racinet, Philippe, 1996b, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Dossier de programmation de fouilles*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 78 p.
- Racinet, Philippe, 1996c, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 1996*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 282 p.
- Racinet, Philippe, 1997a, « Un centre de pouvoir et de peuplement : l'exemple de Boves [Somme] », in *Aux sources de la gestion publique. Actes du colloque des 26 et 27 janvier 1997*, t. 3, « Hommes de Pouvoir. Ressources et lieux de Pouvoir V^e-XIII^e siècles », MAGNOU-NORTIER, Elisabeth (Ed.), Septentrion, Lille, 314 p.
- Racinet, Philippe, 1997b, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 1997*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 348 p.
- Racinet, Philippe, 1998, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 1998*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 391 p.
- Racinet, Philippe, 1999a, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 1999*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 242 p.
- Racinet, Philippe, 1999b, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Document final de synthèse. Campagnes 1996-1999*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 395 p.
- Racinet, Philippe, 2000, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 2000*, 2 tomes, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 230 p., 435 p.
- Racinet, Philippe, 2001, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 2001*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 350 p.
- Racinet, Philippe, 2002a, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Document final de synthèse. Campagnes 2000-2002*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 408 p.
- Racinet, Philippe, 2002b, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Document final de synthèse. Campagnes 2003-2005*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 168 p.
- Racinet, Philippe, 2003, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame ». Campagne 2003*, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 212 p.
- Racinet, Philippe, 2004a, « 1000 ans d'architecture dans le château de Boves », *Archeologia*, 414, p. 36-49.
- Racinet, Philippe (s.d.), 2004b, « Site castral de Boves du X^e au XVII^e siècle », *Revue archéologique de Picardie*, Hors série.
- Racinet, Philippe, 2004c, « Un lieu de pouvoir exceptionnel aux portes d'Amiens : Boves (X^e-XII^e siècles) », in *Lieux de pouvoir en Normandie et sur ses marges*, Caen, Publications du CRAHM.

- Racinet, Philippe, 2004d, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame »*. Campagne 2004, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie, 219 p.
- Racinet, Philippe, 2005, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame »*. Campagne 2005, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie
- Racinet, Philippe, 2006, « Un lieu de pouvoir exceptionnel aux portes d'Amiens : Boves (X^e - XII^e siècles) », in *Lieux de pouvoir en Normandie et sur les marges*. A. M. FLAMBARD HERIDIER (Dir.). Publications du Centre de Recherches Archéologiques et Historiques Médiévales (CRAHM), Caen, 256 p.
- Racinet, Philippe, 2007, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame »*. Campagne 2007, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie
- Racinet, Philippe, 2008, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame »*. Campagne 2008, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie
- Racinet, Philippe, 2009, *Recherches pluridisciplinaires sur un terroir picard de l'époque antique à la Révolution française. Boves, complexe castral et prioral du « Quartier Notre-Dame »*. Campagne 2009, Amiens, SRA Picardie et Laboratoire d'histoire et d'archéologie de l'Université de Picardie
- Racinet Philippe, Drouin Lionel, 2002, « De la résidence carolingienne à la motte : le complexe castral et prioral de Boves (somme, France), des IX^e-X^e au XIII^e siècle », in Château - Gaillard, colloque de Gwatt, Publications Centre de Recherches Archéologiques et Historiques Médiévales (CRAHM), Caen, 312 p.
- Racinet, Philippe, Racinet, Sabine, 2000, « Le siège de Boves en 1185 », in NIVET Philippe (s.d.), *La bataille en Picardie, combattre de l'Antiquité au XX^e siècle*, Amiens, Encrage.
- Racinet, Philippe, Schwerdroffer, Joël (coord.), 2004, *Méthodes et initiations d'histoire et d'archéologie*, Paris, Edition du temps, 382 p.
- Raffestin, Claude, 2001, *Pour une géographie du pouvoir*, Paris, Litec, 250 p.
- Ratzel, Friedrich, 1988, *Précis de géographie politique*, trad. fr., Paris, Editions régionales européennes/Economica, 221 p. [édition allemande de 1897]
- Reilly, William James, 1931, *The law of retail gravitation*, New York, William Reilly Company.
- Renard, Jean-Pierre, 2002, « La frontière : limite géopolitique majeure mais aussi aire de transition, in *Limites et discontinuités en géographie*, Paris, Sedes, p. 40-66
- Reynaud Alain, 1971, *Epistémologie de la géomorphologie*, Paris, Masson, 126 p. [Premier cycle géographie]
- Richardson, Lewis Fry, 1961, « The problem of contiguity : an appendix of statistics of deadly quarrels », *General systems yearbook*, n°6, p. 139-187
- Riché, Pierre, 1997, *Les Carolingiens. Une famille qui fit l'Europe*, Paris, Hachette, 490 p. [Pluriel]
- Robic, Marie-Hélène, 2002, « Note sur la notion d'échelle dans la géographie française de la fin du XIX^e siècle et du début du XX^e siècle », *Cybergeo*, Journée à l'E.H.E.S.S. Echelles et territoires, Paris, 7 p. [<http://www.cybergeo.eu/index3961.html>]
- Robic, Marie-Hélène, 2003, « La ville, objet ou problème ? La géographie urbaine en France (1890-1960) », *Sociétés contemporaines*, n°49-50, p. 107-138
- Robin, Marc, 2002, *Télédétection des satellites aux SIG*, Paris, Nathan, 318 p.
- Rocolle, Pierre, 1994, *Le temps des châteaux (X^e-XV^e siècles)*, Paris, Armand Colin, 230 p.
- Rodríguez-Iturbe, Ignacio, Rinaldo, Andrea, 1997, *Fractal river basins. Chance and self-organisation*, Cambridge, Cambridge University Press editor, XIV-547 p.
- Rosen, Kenneth T., Resnick, Mitchell, 1980, « The size distribution of cities : an examination of the Pareto law and primacy », *Journal of urban economics*, vol.8, p.165-186
- Rosso, Renzo, Bacchi, Baldassare, La Barbera, Paolo, 1991, « Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks », *Water resources research*, vol. 27, n°3, p. 381-387
- Rouche, Michel, 1970, *Des Barbares à la Renaissance*, Paris, Hachette, 280 p. [Hachette]
- Rozenblat, Catherine, 1989, « Différenciations spatiales et sociales dans un espace urbain : les quartiers de Paris », *L'Espace géographique*, n°3, p. 264-272
- Sagar, Daya D.S., Omeregic, Charles, Rao, Prakasa, 1998, « Morphometric relations of fractal-skeletal based channel network model », *Discrete dynamics in Nature and Society*, vol. 2, p. 77-92
- Salch, Charles-Laurent, 1979, *Dictionnaire des châteaux et des fortifications du Moyen Age en France*, Strasbourg, XVI-1288 p.
- Sanders, Léna, 1989, *L'analyse des données appliquées à la géographie*, Montpellier, GIP-Reclus, 267 p. [Alidade]
- Sanders, Léna, 2001, « Modèles en analyse spatiale », in Sanders, Léna (s.d.), *Modèles en analyse spatiale*, Paris, Lavoisier, p. 17-29
- Sanders, Léna (s.d.), 2001, *Modèles en analyse spatiale*, Paris, Lavoisier, 334 p.
- Sapoval, Bernard, 1997, *Universalités et fractales*, Paris, Flammarion, 276 p.

- Schnerb, Bertrand, 1999, *L'Etat bourguignon (1363-1477)*, Paris, Perrin, 474 p.
- Schumm, Stanley A., 1956, « Evolution of drainage systems and slopes in badlands at Perth Amboy, New Jersey », *American Bull.*, n°67, p. 597-646
- Sinclair, Stéphane, 1985, *Atlas de la géographie historique de la France et de la Gaule. De la conquête césarienne à nos jours*, Paris, Sedes, 260 p.
- Sitte, Camillo, 1996, *L'art de bâtir les villes. L'urbanisme selon ses fondements artistiques*, Paris, Le Seuil, XXVI-188 p. [réédition de 1889]
- Small, Christopher, 2005, « A global analysis of urban reflectance », *International Journal of Remote Sensing*, vol. 26(4), p. 661-681
- Small, Christopher, 2006, « Urban Landsat : Cities from Space », New York, Palisades, Socioeconomic Data and Applications Center (SEDAC) et Columbia University. [En ligne : <http://sedac.ciesin.columbia.edu/ulandsat/> le 25 juillet 2009]
- Sornette, Didier, 1998, « Discrete scale invariance and complex dimensions », *Physics Reports*, n°297, p. 239-270
- Sornette, Didier, 2000, *Critical phenomena in natural sciences. Chaos, fractals, selforganization and disorder : concepts and tools*. Springer éditeur, 434 p.
- Sornette, Didier, 2003, *Why stock markets crash. Critical events in complex financial systems*. Princeton university press, Princeton & Oxford, 421 p.
- Sornette, Didier, 2006, *Critical phenomena in natural sciences. Chaos, fractals, selforganization and disorder : concepts and tools*, Berlin - Heidelberg - New York, Springer, XXII-528 p. [2e édition augmentée]
- Soyer, Jacqueline, 1970, *La conversation de la forme circulaire dans le parcellaire français, étude basée sur l'interprétation des photographies aériennes*, Paris, Ecole Pratique des Hautes Etudes - VIe section, 146 p.
- Staszak, Jean-François, 2001, « Espaces domestiques : pour une géographie de l'intérieur », *Annales de Géographie*, n°620, p. 339-363
- Staszak, Jean-François, 2003, in Lévy, Jacques, Lussault, Michel, *Dictionnaire de la géographie et de l'espace des sociétés*, Paris, Belin, p. 465-466
- Stewart, Ian, 1998, *Dieu joue-t-il aux dés ? Les mathématiques du chaos*, trad. Marianne Robert et Marcel Filoche, Paris, Flammarion, VIII-602 p. [Champ 411]
- Stiegler, Bernard et Ars Industrialis, 2006, *Réenchâter le monde. La valeur esprit contre le populisme industriel*, Paris, Flammarion, 176 p. [Champs 855]
- Strahler, Arthur N., 1954a, « Quantitative geomorphology of erosional landscapes », *C.-R. 19th Intern. Geol. Cong.*, Algiers, 1952, p. 341-354
- Strahler, Arthur N., 1954b, « Statistical analysis in geomorphic research », *J. Geol.*, n°62, p. 1-25
- Strahler, Arthur N., 1957, « Quantitative analysis of watershed geomorphology », *Am. Geophys. Union Trans.*, n°38-6, p. 913-920
- Tannier, Cécile, Pumain, Denise, 2005, « Fractals in urban geography : a theoretical outline and an empirical example », *Cybergeo*, n°303, 22 p.
- Tarboton, David G., 1996, « Fractal river networks, Horton's laws and Tokunaga cyclicity », *Journal of hydrology*, n°187, p. 105-117
- Tarboton, David G., Bras, Rafael L., Rodríguez-Iturbe, Ignacio, 1988, « The fractal nature of river network », *Water Resources Research*, vol. 24, n°8, p. 1317-1322
- Thom, René, 1974, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Paris, Union générale des éditions, 320 p. [collection 10-18 n°887]
- Thom, René, 1983, *Paraboles et catastrophes*, Paris, Flammarion, 190 p.
- Thom, René, 1991, *Esquisse d'une sémiophysique. Physique aristotélécienne et théorie des catastrophes*, Paris, InterEditions, 272 p.
- Thom, René, 1993, *Prédire n'est pas expliquer*, Paris, Flammarion, 192 p. [Champs n°288]
- Thumerelle, Pierre-Jean, 1996, *Les populations du monde*, Paris, Nathan, 384 p. [FAC géographie]
- Tonye, Emmanuel, Akono, Alain, Ndi Nyoungui, André, 2000, *Le traitement des images de télédétection par l'exemple*, Paris, Overseas Publishers Association, XII-180 p.
- Tokunaga, Eiji, 1994, « Self similar natures of drainage basins », in R. Takaki, *Research of pattern formation*, Tokyo, KTK Scientific Publishers, p. 445-468 [En ligne : <http://www.scipress.org/e-libray/rpf/>]
- Toubert, Pierre, 1973, *Les structures du Latium médiéval : le Latium et la Sabine du IX^e à la fin du XII^e siècle*, 2 tomes, Paris, Brocard, XXVII-1-1500 p. - II-XVI p.
- Trochet, Jean-Marie, 1988, *Géographie historique. Hommes et territoires dans les sociétés traditionnelles*, Paris, Nathan Université, 252 p.
- Varenne, Franck, 2005, « Quelques avatars du recours à l'optimalité dans les modélisations de la morphogénèse: le cas des plantes supérieures au XX^e siècle », in *Notion d'optimalité et morphogénèse*, Paris, Berder, 12 p.
- Veltri, Massimo, Veltri, Pierluigi, Maiolo, Mario, 1996, « On the fractal description of natural channel networks », *Journal of hydrology*, n°187, p. 137-144
- Verdier, Nicolas, 2004, « L'échelle dans quelques sciences sociales : petite histoire d'une absence d'interdisciplinarité », in Olivier Orain, Denise Pumain, Céline Rozemblat et Nicolas Verdier, *Géographie, échelles et temporalités en géographie*, Paris, CNED.
- Vidal de la Blache, Paul, 1913, « Des caractères distinctifs de la géographie », *Annales de la géographie*, t. 22, n°124, Paris, Armand Colin, p. 289-299
- Vidal de la Blache, Paul, 1917, *La France de l'est*, Paris, Armand Colin, 280 p.

- Vidal de la Blache, Paul, 1922, *Principes de géographie humaine*, Paris, Utz, 348 p. [réédité en 1995]
- Vinci, Léonard (de), 1949, *Les carnets de Léonard de Vinci*, t. 1, *Botanique*, I, Paris, Gallimard, 323 p. [réédition]
- Vitruve, 1999, *Les dix livres d'architectures*, trad. Claude Perrault, Paris, Errance, 160 p. [réédition]
- Volvey, Anne (s.d.), 2005, *Echelles et temporalités*, Paris, Atlande, 240 p. [Clefs concours]
- Voiron-Canaccio, Christine, 1995, *Analyse spatiale et analyse d'images par la morphologie mathématique*, Montpellier, Reclus, 192 p.
- White, Robert, 1998, « Cities and cellular automata », *Discrete dynamics in Nature and Society*, n°2, p. 111-125.
- White, Robert, Engelen, George, 1993, « Cellular automata and fractal urban form : a cellular modelling approach to the evolution of urban land use patterns », *Environment and planning A*, Planning & Design n°25, p. 1175-1199.
- White, Robert, Engelen, George, 1997, « Cellular automata as the basis of integrated dynamic regional modeling », *Environment and planning B*, Planning & Design n°24, p. 235-246.
- Zajdenweber, Daniel, 1976, *Hasard et prevision*, Paris, Economica, 128 p.
- Zajdenweber, Daniel, 2009, *Economie des extremes. Krachs, catastrophes et inégalités*, Paris, Flammarion, 236 p. [Champs Essais 940]
- Zipf, George Kingsley, 1941, *National unity and disunity. The nation as a bio-social organism*, Principia Press, Bloomington Indiana.
- Zipf, George Kingsley, 1949, *Human behavior and the principle of least effort*, Addison-Wesley.
- Zwirn, Hervé P., 2006, *Les systèmes complexes. Mathématiques et biologie*, Paris, Odile Jacob, 220 p.

20

Annexes

20.1. Table de conversion d'une variable exponentielle

x	Exp(x) à 0,01 près	x	Exp(x) à 0,01 près	x	Exp(x) à 0,01 près	x	Exp(x) à 0,01 près
0,0	1,00	3,9	49,4	7,8	2 440,6	11,7	120 571,71
0,1	1,11	4,0	54,6	7,9	2 697,28	11,8	133 252,35
0,2	1,22	4,1	60,34	8,0	2 980,96	11,9	147 266,63
0,3	1,35	4,2	66,69	8,1	3 294,47	12,0	162 754,79
0,4	1,49	4,3	73,7	8,2	3 640,95	12,1	179 871,86
0,5	1,65	4,4	81,45	8,3	4 023,87	12,2	198 789,15
0,6	1,82	4,5	90,02	8,4	4 447,07	12,3	219 695,99
0,7	2,01	4,6	99,48	8,5	4 914,77	12,4	242 801,62
0,8	2,23	4,7	109,95	8,6	5 431,66	12,5	268 337,29
0,9	2,46	4,8	121,51	8,7	6 002,91	12,6	296 558,57
1,0	2,72	4,9	134,29	8,8	6 634,24	12,7	327 747,9
1,1	3,00	5,0	148,41	8,9	7 331,97	12,8	362 217,45
1,2	3,32	5,1	164,02	9,0	8 103,08	12,9	400 312,19
1,3	3,67	5,2	181,27	9,1	8 955,29	13,0	442 413,39
1,4	4,06	5,3	200,34	9,2	9 897,13	13,1	488 942,41
1,5	4,48	5,4	221,41	9,3	10 938,02	13,2	540 364,94
1,6	4,95	5,5	244,69	9,4	12 088,38	13,3	597 195,61
1,7	5,47	5,6	270,43	9,5	13 359,73	13,4	660 003,22
1,8	6,05	5,7	298,87	9,6	14 764,78	13,5	729 416,37
1,9	6,69	5,8	330,3	9,7	16 317,61	13,6	806 129,76
2,0	7,39	5,9	365,04	9,8	18 033,74	13,7	890 911,17
2,1	8,17	6,0	403,43	9,9	19 930,37	13,8	984 609,11
2,2	9,03	6,1	445,86	10,0	22 026,47	13,9	1 088 161,36
2,3	9,97	6,2	492,75	10,1	24 343,01	14,0	1 202 604,28
2,4	11,02	6,3	544,57	10,2	26 903,19	14,1	1 329 083,28
2,5	12,18	6,4	601,85	10,3	29 732,62	14,2	1 468 864,19
2,6	13,46	6,5	665,14	10,4	32 859,63	14,3	1 623 345,99
2,7	14,88	6,6	735,1	10,5	36 315,5	14,4	1 794 074,77
2,8	16,44	6,7	812,41	10,6	40 134,84	14,5	1 982 759,26
2,9	18,17	6,8	897,85	10,7	44 355,86	14,6	2 191 287,88
3,0	20,09	6,9	992,27	10,8	49 020,8	14,7	2 421 747,63
3,1	22,2	7,0	1 096,63	10,9	54 176,36	14,8	2 676 445,06
3,2	24,53	7,1	1 211,97	11,0	59 874,14	14,9	2 957 929,24
3,3	27,11	7,2	1 339,43	11,1	66 171,16	15,0	3 269 017,37
3,4	29,96	7,3	1 480,3	11,2	73 130,44	15,1	3 612 822,93
3,5	33,12	7,4	1 635,98	11,3	80 821,64	15,2	3 992 786,84
3,6	36,6	7,5	1 808,04	11,4	89 321,72	15,3	4 412 711,89
3,7	40,45	7,6	1 998,2	11,5	98 715,77	15,4	4 876 800,85
3,8	44,7	7,7	2 208,35	11,6	109 097,8	15,5	5 389 698,48

20.2. Structure du DVD-annexes

Un DVD fournissant l'intégralité des résultats a été élaboré. Son arborescence est la suivante :

Chateaux-Annexes-Densite regroupe toutes les mesures de densité autour des châteaux et des communes.

→ chateaux

→ Densite aleatoire : graphiques correspondant à la variation locale de la densité de points aléatoires en fonction de chaque château-centre

→ Densite réelle : graphiques correspondant à la variation locale de la densité de châteaux en fonction de chaque château-centre

→ Densite-cercles-chateaux : graphiques montrant les anneaux avec un intervalle de 10 km en fonction de chaque château-centre

→ Rapport de densite : graphiques montrant le rapport entre la densité aléatoire et la densité réelle pour un intervalle de 10 km

→ communes

→ Densite aleatoire : graphiques correspondant à la variation locale de la densité de points aléatoires en fonction de chaque commune-centre

→ Densite réelle : graphiques correspondant à la variation locale de la densité de communes en fonction de chaque commune-centre

→ Densite-cercles-communes : graphiques montrant les anneaux avec un intervalle de 10 km en fonction de chaque commune-centre

→ Rapport de densite : graphiques montrant le rapport entre la densité aléatoire et la densité réelle pour un intervalle de 10 km

Gardons-Annexes

→ Images-RESEAU-1

→ amont-aval : graphiques correspondant à la variation du rapport LC/VO moyennée de confluence en confluence de chaque source au Pont de Ners

→ aval-amont : graphiques correspondant à la variation du rapport LC/VO moyennée de confluence en confluence du Pont de Ners à chacune des sources

→ diagramme LC - LC-VO : graphiques correspondant aux relevés des rapports LC/VO de confluence en confluence en fonction de chaque chemin possible

→ dim globale par chemin : graphiques correspondant aux dimensions fractales de chaque chemin

→ dim locale par branche : graphiques correspondant aux dimensions fractales locales de chaque branche

→ distance au Pont de Ners - dim fractale locale moyennée branche par branche : graphiques correspondant à la valeur de la dimension fractale locale de chaque branche moyennée de confluence en confluence

- distance au Pont de Ners - dim locale par branche : graphiques correspondant aux dimensions fractales locales de confluence en confluence en fonction de chaque chemin possible
- releve de talweg
- dimfractalelocale.png : carte montrant la répartition des dimensions fractales locales par branches
- variationLCVOlocal.png : carte montrant la répartition des variations du rapport LC/VO par branches
- Images-RESEAU-2
 - amont-aval : graphiques correspondant à la variation du rapport LC/VO moyennée de confluence en confluence de chaque source au Pont de Ners
 - aval-amont : graphiques correspondant à la variation du rapport LC/VO moyennée de confluence en confluence du Pont de Ners à chacune des sources
 - diagramme LC - LC-VO : graphiques correspondant aux relevés des rapports LC/VO de confluence en confluence en fonction de chaque chemin possible
 - dim globale par chemin : graphiques correspondant aux dimensions fractales de chaque chemin
 - dim locale par branche : graphiques correspondant aux dimensions fractales locales de chaque branche
 - distance au Pont de Ners - dim fractale locale moyennée branche par branche : graphiques correspondant à la valeur de la dimension fractale locale de chaque branche moyennée de confluence en confluence
 - distance au Pont de Ners - dim locale par branche : graphiques correspondant aux dimensions fractales locales de confluence en confluence en fonction de chaque chemin possible
 - dimfractalelocale.png : carte montrant la répartition des dimensions fractales locales par branches
 - variationLCVOlocal.png : carte montrant la répartition des variations du rapport LC/VO correspondant par branches

20.3. *Mathematica* en géographie

Toute cette thèse a été réalisée sur le logiciel *Mathematica*, des simples calculs jusqu'à l'édition de cette thèse. Cet outil méconnu, en géographie, emploie un codage très simple, et permet de mener à bien de nombreux projets scientifiques. L'intérêt pour la géographie a été évoqué au cours du chapitre 6. Aussi, pour conclure sur ce logiciel, on peut citer Rémi Barrère. « Il est dans la nature des problèmes scientifique de n'être ni confinés à des calculs, ni restreints à de la programmation, ni réduits à de la visualisation, ni limités à de l'édition, mais de mêler un peu tout cela. Il est dans la nature des problèmes mathématiques de n'être ni exclusivement logiques, ni entièrement numériques, ni purement algébriques mais tout cela à la fois. C'est pour cette raison qu'un logiciel polyvalent comme *Mathematica* répond à un besoin des scientifiques et des ingénieurs. Mais nous savons bien que si le besoin engendre l'outil, ce dernier en retour crée de nouveaux besoins. C'est pourquoi on peut s'attendre à un développement intense du calcul symbolique dans des décennies à venir » (Barrère, 2002, p. 13). Tel est l'esprit de *Mathematica*.

Table des figures

Chapitre 1.

Figure 1. Espace géographique et causalités	9
Figure 2. Espace de configuration et espace de contrôle	10
Figure 3. Typologie des morphogenèses	11

Chapitre 2.

Chapitre 3.

Figure 4. Synthèse des différents types de langage en géographie	32
Figure 5. La table des chorèmes de Roger Brunet (Brunet, 1980)	33
Figure 6. Avantages et inconvénients des chorèmes en géographie	35
Figure 7. La théorie géographique	36
Figure 8. Double typologie des modèles	41
Figure 9. Objet géographique et résolution (Cuénin, 1972)	45
Figure 10. Objet ou espace	49
Figure 11. Quelques formes optimales	51
Figure 12. Formes optimales et objet géographique	51

Chapitre 4.

Figure 13. Définitions des dimensions topologiques	54
Figure 14. Agrandissement ou réduction d'un carré par un facteur 3	56
Figure 15. Agrandissement ou réduction d'un carré par un facteur 5	56
Figure 16. La courbe de Helge von Koch	57
Figure 17. Arpentage d'une courbe fractale	58
Figure 18. Loi d'échelle fractale	60
Figure 19. Loi d'échelle non fractale	60
Figure 20. Méthode de calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées	62

Figure 21. Générateur pour fabriquer une grille hexagonale	63
Figure 22. Grilles hexagonales à mailles variables	63
Figure 23. Hexagone et signe des équations de droites	64
Figure 24. Comparaison entre une mesure de dimension fractale par comptage de boîtes carrées et une mesure de dimension fractale par comptage de boîtes hexagonales	64
Figure 25. Méthode de calcul par une grille composée de boîtes circulaires	65
Figure 26. Schéma d'une dilatation infinitésimale	66
Figure 27. Le modèle à une transition fractal – non fractal (Nottale, 1993)	67
Figure 28. Fluctuation log-périodique et mesure de la dimension fractale	68
Chapitre 5.	
Figure 29. Mouvement et échelle en morphométrie	78
Chapitre 6.	
Figure 30. Réseau hydrographique des Gardons (des sources jusqu'au pont de Ners)	81
Figure 31. Embranchements élémentaires d'un arbre déterministe pour $k = 2$	82
Figure 32. Arbre déterministe avec un générateur possédant deux embranchements	84
Figure 33. Base 2 et arbre à déterministe à deux branches	84
Figure 34. Arbre déterministe avec un générateur possédant trois embranchements	85
Figure 35. Base 3 et arbre déterministe à trois branches	85
Figure 36. Rapport entre le rayon et la longueur des branches d'un arbre	89
Figure 37. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du RESEAU 1	91
Figure 38. Calcul de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du RESEAU 2	91
Figure 39. Classification de Horton appliquée aux Gardons	93
Figure 40. Relation entre l'ordre, l'effectif et la longueur	93
Figure 41. Classification de Horton appliquée aux Gardons	94
Figure 42. Relation entre l'ordre, l'effectif et la longueur	94
Figure 43. Tableau de mesures des dimensions fractales par comptage de boîtes carrées pour les deux représentations du réseau	95
Figure 44. Tableau de comparaison entre les mesures du RESEAU 1	95
Figure 45. Tableau de comparaison entre les mesures du RESEAU 2	95
Figure 46. Arbre du RESEAU 1	97
Figure 47. Arbre du RESEAU 2	98
Figure 48. Distribution de probabilité du rapport LC / VO	99
Figure 49. Estimation du facteur d'échelle LC / VO	100
Figure 50. Arborescence : niveaux et branches dans le cas de structure auto-similaire	101
Figure 51. Arborescence : modèle parabolique observé	102
Figure 52. Statistique des longueurs des branches du RESEAU 1 ($n = 618$)	103
Figure 53. Statistique des longueurs des branches du RESEAU 2 ($n = 1\ 694$)	104
Figure 54. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est courte	105
Figure 55. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est moyenne	105
Figure 56. Exemple d'un graphique bi logarithmique où la gamme d'échelle est correcte	106

Figure 57. Rapport LC / VO du chemin de la branche 6401–RESEAU 1 à l'exutoire	107
Figure 58. Relevé de la dimension fractale par branche du chemin de la branche 6401-RESEAU 1 à l'exutoire	107
Figure 59. Rapport LC / VO du chemin de la branche 9402–RESEAU 2 à l'exutoire	107
Figure 60. Relevé de la dimension fractale par branche du chemin de la branche 9402-RESEAU 2 à l'exutoire	107

Chapitre 7.

Figure 61. Couleurs potentielles obtenues par le filtre	113
Figure 62. Extraction de la tache urbaine de Beijing	113
Figure 63. Image monochrome de la tache urbaine de Beijing	114
Figure 64. Taches urbaines de quelques agglomérations de par le monde	116 à 128
Figure 65. Tableau présentant les corrections des dimensions fractales des douze agglomérations en double	129
Figure 66. Distribution de probabilité de la dimension fractale centrée et réduite	129
Figure 67. Distribution de probabilité de la dimension fractale centrée et réduite de la base Christopher Small	130
Figure 68. Distribution de probabilité de la dimension fractale centrée et réduite de la base d'Ann Bryant	130
Figure 69. Localisation des dimensions fractales de chacune des taches urbaines mesurées	131
Figure 70. Taches urbaines, dimensions fractales mesurées et population de la ville principale	132
Figure 71. Population de la ville principale et dimension fractale de la tache	132
Figure 72. Surface relative et dimension fractale de chaque des taches	133

Chapitre 8.

Figure 73. Tableau de la résolution des images capturées d'Avignon	135
Figure 74. Images capturées de Mappy traitées pour étudier la morphologie d'Avignon	136
Figure 75. Calcul de la dimension fractale de l'image 1	138
Figure 76. Calcul des dimensions fractales des différentes images	139
Figure 77. Toutes les courbes estimées	140
Figure 78. Tableau de synthèse des dimensions fractales obtenues en fonction de leur résolution	140
Figure 79. Graphique de synthèse des résolutions en fonction des dimensions fractales obtenues	141
Figure 80. Graphique de synthèse des dimensions fractales obtenues en fonction de leur résolution	141
Figure 81. Relation quadratique entre la dimension fractale et le logarithme du nombre de boîtes comptées	142
Figure 82. Relation exponentielle entre la dimension fractale et le nombre de boîtes comptées	142

Chapitre 9.

Figure 83. Carte des éléments bâtis de Montbéliard	146
Figure 84. Calcul de la dimension fractale par la méthode de comptage de boîtes carrées	147
Figure 85. Construction d'une fractale pseudo-aléatoire à partir d'un tapis de Sierpinski	150
Figure 86. Construction d'une fractale pseudo-aléatoire à partir d'un tapis de Sierpinski avec une condition supplémentaire à la première itération	151
Figure 87. Estimation de la dimension fractale du modèle par la méthode du comptage de boîtes carrées	152
Figure 88. Estimation par une loi de transition fractal – fractal du modèle par la méthode du comptage de boîtes carrées	152

Figure 89. Schéma de synthèse de l'organisation des cinq niveaux d'organisation d'une agglomération	154
Chapitre 10.	
Figure 90. Rappel épistémologique sur l'objet d'étude « motte »	161
Chapitre 11.	
Figure 91. État des limites historiques connues entre 900 et 1100 d'après Robert Fossier (1968)	173
Figure 92. État des limites historiques connues entre 1100 et 1300 d'après Robert Fossier (1968)	178
Figure 93. État des limites historiques connues entre 1300 et 1400 d'après Jean Kerheve (1998)	180
Figure 94. État des limites historiques connues entre 1400 et 1500 d'après Jean Kerheve (1998)	182
Figure 95. État des limites historiques connues entre 1500 et 1700 d'après Georges Duby (1987)	184
Figure 96. État des limites historiques connues de 1700 à nos jours	186
Figure 97. Carte représentant la Flandre vers l'an 900	190
Chapitre 12.	
Figure 98. Les dates calendaires observées et premières estimations de g et T_C	194
Figure 99. L'ajustement de g et de T_C par un tirage Monte–Carlo	195
Figure 100. La relation entre le rang et le $\ln(T_n - T_C)$	195
Figure 101. Les dates théoriques obtenues par l'équation de l'évolution	196
Figure 102. L'arbre de l'évolution spatio-temporelle du site de Boves de la fin de l'empire carolingien au XXI ^e siècle	196
Figure 103. Exemple d'analyse radiale avec pour centre le château de Boves	198
Figure 104. Nuage de points des châteaux connus	200
Figure 105. Encadrement du nuage de points	201
Figure 106. Tableau de synthèse de la répartition des châteaux autour de Boves	202 à 206
Figure 107. Tableau de synthèse de la répartition des lieux aléatoires autour de Boves	207 à 211
Figure 108. Variation du rapport entre le nombre de lieux aléatoires et le nombre de châteaux dans chaque anneau	212
Figure 109. Tableau de synthèse des résultats de l'analyse radiale en tout lieu	214 à 218
Chapitre 13.	
Figure 110. Transitions fractal – non fractal observées dans le cas de la répartition des communes centres et hameaux en dépendant et de la répartition des châteaux dans l'espace géohistorique étudié	223
Figure 111. Représentation des grilles carrées de résolution ε (en km) contenant au moins un château pour une résolution donnée	225
Figure 112. Représentation tridimensionnelle des carrés de résolution ε (en km) et du nombre de châteaux dans chaque carré	226
Figure 113. Représentation tridimensionnelle des carrés de résolution ε (en km) et de leurs densités respectives	227
Figure 114. Représentation tridimensionnelle des carrés de résolution ε (en km) et de leurs dimensions fractales respectives	228
Figure 115. Localisation des centres urbains de l'espace géohistorique étudié par l'intermédiaire des pics de dimensions fractales « locales » avec une maille de 6,375 km	229
Figure 116. Résultats numériques de l'analyse fractale locale des châteaux ($N_T = 1\,413$)	229
Figure 117. Résultats numériques de l'analyse fractale locale des communes centres et des hameaux ($N_T = 3\,738$)	230
Figure 118. Modèle fractal – non fractal et dimension fractale « locale » par grille appliquée aux résultats de la distribution des châteaux	230

Figure 119. Modèle fractal – non fractal et dimension fractale « locale » par grille appliquée aux résultats de la distribution des communes centres et hameaux en dépendant	231
--	-----

Chapitre 14.

Figure 120. Dimension fractale territoriale globale de chacune des périodes géographiques	234
Figure 121. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 900 – vers 1100	235
Figure 122. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 1100 – vers 1300	235
Figure 123. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 1300 – vers 1400	236
Figure 124. Dimension fractale territoriale de la période géographique vers 1400 – vers 1500	236
Figure 125. Dimension fractale territoriale aux deux dernières périodes géographiques sur le territoire de la France	236
Figure 126. Dimension fractale territoriale locale moyenne	237
Figure 127. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 900-1100	238
Figure 128. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1100-1300	239
Figure 129. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1300-1400	240
Figure 130. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1400-1500	241
Figure 131. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1500-1700	242
Figure 132. Localisation des dimensions fractales dans chaque territoire vers 1700-1900	243

Chapitre 15.

Chapitre 16.

Figure 133. Schéma des différentes lois rang – taille possibles (Forriez, Martin, 2009)	256
Figure 134. Tableau récapitulatif des régressions linéaires effectuées dans l'espace bi logarithmique des rangs et du nombre d'habitants	258 à 282
Figure 135. Statistique de la pente q centrée et réduite	283
Figure 136. Tableau récapitulatif l'ensemble des pentes q et des ordonnées estimées	284 à 288
Figure 137. Comparaison entre la population totale de la loi rang – taille et de la population totale respective	289 à 293
Figure 138. Distributions parétiennes observées pour chacun des États du monde	297 à 321
Figure 139. Distribution statistique de l'exposant α de Pareto	322
Figure 140. La valeur numérique des exposants α de Pareto obtenu	323 à 327

Chapitre 17.

Figure 141. Répartition des géolocalisations de la base <i>Tageo</i>	329
Figure 142. Analyse fractale globale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire	330
Figure 143. Paramètres de la structure fractale globale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire	330
Figure 144. Paramètres de la dimension fractale locale	331
Figure 145. Dimension fractale locale contenue dans chaque carré	331
Figure 146. Structure locale de la répartition de la population à l'échelle du monde	332
Figure 147. Projection du nuage de points de la population locale et de la dimension fractale locale	333
Figure 148. Loi rang – taille à l'échelle du monde avec un seuil de 144 300 habitants	334

Figure 149. Distribution parétienne observée	335
Figure 150. Classe statistique et exposant de Pareto	335
Figure 151. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto	336
Figure 152. Répartition de l'établissement humain avec un seuil de 144 300 habitants	337
Figure 153. Analyse fractale globale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 144 300 habitants	337
Figure 154. Paramètres de la structure fractale globale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 144 300 habitants	337
Figure 155. Dimension fractale locale contenue dans chaque carré avec un seuil de 144 300 habitants	338
Figure 156. Paramètres de la dimension fractale locale avec un seuil de 144 300 habitants	338
Figure 157. Structure locale de la répartition de la population à l'échelle du monde avec un seuil de 144 300 habitants	339
Figure 158. Projection du nuage de points de la population locale et de la dimension fractale locale	339
Figure 159. Répartition de l'établissement humain avec un seuil de 1 000 000 habitants	340
Figure 160. Loi rang – taille à l'échelle du monde avec un seuil de 1 000 000 habitants	341
Figure 161. Paramètres de l'exposant de Pareto	341
Figure 162. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto	341
Figure 163. Dimension fractale globale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 1 000 000 habitants	342
Figure 164. Dimension fractale locale de la répartition de l'établissement humain avec un seuil de 1 000 00 habitants	342
Figure 165. Dimension fractale globale du continent eurasiatique	344
Figure 166. Dimensions fractales locales du continent eurasiatique	344
Figure 167. Loi rang – taille sur la répartition de l'établissement humain à l'échelle du continent eurasiatique	345
Figure 168. Paramètres de l'exposant de Pareto	345
Figure 169. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto	345
Figure 170. Dimension fractale globale du continent américain	346
Figure 171. Dimensions fractales locales du continent américain	346
Figure 172. Loi rang – taille sur la répartition de l'établissement humain à l'échelle du continent américain	347
Figure 173. Paramètres de l'exposant de Pareto	347
Figure 174. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto	347
Figure 175. Dimension fractale globale du continent africain	348
Figure 176. Dimensions fractales locales du continent africain	348
Figure 177. Loi rang – taille sur la répartition de l'établissement humain à l'échelle du continent africain	349
Figure 178. Paramètres de l'exposant de Pareto	349
Figure 179. Estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto	349
Figure 180. Dimension fractale globale du continent océanien	350
Figure 181. Dimensions fractales locales du continent océanien	351
Figure 182. Loi rang – taille sur la répartition de l'établissement humain à l'échelle du continent océanien	351
Figure 183. Paramètres de l'exposant de Pareto	351
Figure 184. Représentation graphique de la variation de l'exposant de Pareto en fonction de la classe statistique et estimations des lois possibles pour la « dynamique d'échelle » avec un exposant de Pareto	352
Figure 185. Estimation des dimensions fractales territoriales à l'échelle étatique	354 à 358

Figure 186. Statistique des dimensions fractales territoriales centrées et réduites	359
Figure 187. Dimension fractale territoriale moyenne en fonction des continents	359

Chapitre 18.

Figure 188. Tableau résumant les données utilisées dans cette thèse en termes d'information	365
Figure 189. Critique externe des données utilisées dans la thèse	366
Figure 190. Critique interne des données utilisées dans la thèse	367
Figure 191. Système de connaissance de l'objet géographique	368
Figure 192. Tableau résumant la combinaison entre mouvement et échelles vs. géographie structurale et géographie dynamique	371
Figure 193. Tableau synthétisant ce que pourrait être la science « géographie »	373

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	3
Résumé	5
Chapitre 1. Introduction générale	7
1.1. Objectif 1. Un lien entre la morphologie et la relativité d'échelle	10
1.1.1. Mesure de caractéristiques morphologiques	10
1.1.2. Place de la thèse dans les théories de la morphogenèse	10
1.2. Objectif 2. Un cadre multi-scalaire théorique général en géographie	12
1.3. Objectif 3. Une démarche géographique articulant temps, espace et échelles	15
<hr/>	
Partie 1. Échelles, limites et modèles : la forme en géographie	19
Chapitre 2. Échelles en géographie	21
2.1. Échelle, résolution et niveau	21
2.1.1. L'échelle en géographie	22
2.1.2. Échelles et géométrie fractale	24
2.2. Multi-échelle, multi-résolution et multi-niveau	25
2.2.1. L'approche multi-scalaire	25
2.2.2. L'approche multi-résolution	25
2.2.3. L'approche multi-niveau	25
2.3. Effet d'échelle et effet de maillage	26

Chapitre 3. Limites et discontinuités en géographie	27
3.1. L'approche classique : la théorie des discontinuités de Roger Brunet	28
3.1.1. Le concept de discontinuité en géographie	28
3.1.2. Les dix-sept points de la théorie de Roger Brunet (1968)	29
3.2. L'approche par la modélisation	30
3.2.1. Définition d'un modèle	31
3.2.1.1. Le modèle discursif	32
3.2.1.2. Le modèle graphique	32
3.2.1.3. Le modèle analogique	40
3.2.1.4. Le modèle mathématique	40
3.2.2. La modélisation mathématique	40
3.2.2.1. Étapes préliminaires à la modélisation mathématique	41
3.2.2.2. Typologie des modèles	41
3.2.2.3. Processus de la modélisation mathématique	42
3.2.2.4. La simulation	43
3.2.2.5. La théorisation	43
3.2.3. La modélisation mathématique est-elle possible en géographie ?	43
3.3. L'approche relativiste	44
3.3.1. La nature de l'espace géographique	44
3.3.1.1. Homogène et isotrope	44
3.3.1.2. Hétérogène et anisotrope	44
3.3.1.3. Continu ou discontinu	44
3.3.1.4. Synthèse : l'émergence des limites	45
3.3.2. La position relativiste	46
3.3.2.1. Principe de relativité	46
3.3.2.2. Objet ou espace géographique ?	48
3.3.2.3. Espace géographique fractal	49
3.3.3. Les formes optimales	49
3.3.3.1. Définition de l'optimisation	49
3.3.3.2. Optimisation en géographie	50
3.3.3.3. Échelle comme condition d'optimalité	51

Chapitre 4. Structures fractales en géographie	53
4.1. Position du problème	53
4.2. Les fractales et la relativité d'échelle	55
4.2.1. La dépendance d'échelle	55
4.2.2. L'invariance d'échelle – L'approche empirique	55
4.2.2.1. Dimension topologique et dimension fractale	56
4.2.2.2. La dimension fractale non auto-similaire	58
4.2.3. Évaluer une dimension fractale	61
4.2.3.1. Dimension par comptage de boîtes carrées	61
4.2.3.2. Dimension par comptage de boîtes hexagonales	63
4.2.3.3. Grilles et densités locales	64
4.2.3.4. Dimension fractale par comptage de boîtes circulaires	64
4.2.3.5. Dimension radiale	65
4.2.4. De l'invariance d'échelle aux lois d'échelle généralisées – L'approche analytique	65
4.2.4.1. Fonction scalante	65
4.2.4.2. Opérateur différentiel de dilatation	66
4.2.4.3. L'invariance d'échelle démontrée analytiquement	66
4.2.4.4. L'apparition spontanée d'une zone de transition fractal – non fractal	66
4.2.5. La dépendance d'échelle et la construction de lois d'échelle	67
4.2.6. Les multifractales	68
4.2.7. La correction log-périodique	68
4.2.7.1. La version de Didier Sornette (1997)	68
4.2.7.2. La version de Laurent Nottale (1997)	69
4.2.8. L'idée de « dynamique d'échelles »	70
4.2.9. Les échelles de coupure	70
4.3. Retour sur la nature de l'espace géographique	71

Partie 2. Morphométrie en géographie **73**

Chapitre 5. L'analyse morphologique	75
5.1. La définition de l'analyse morphologique	75
5.1.1. Morphologie en géographie	75
5.1.2. Morphométrie en géographie	76
5.2. L'analyse temporelle et spatiale des formes	76
5.2.1. La stabilité et la stationnarité des formes	76
5.2.2. L'instabilité et la non-stationnarité des formes	77
5.3. L'analyse morphologique et les échelles	78

Chapitre 6. L'analyse morphologique du réseau du bassin versant des Gardons	79
6.1. Présentation des données	79
6.1.1. Critiques de la base CARTHAGE	80
6.1.2. Extraction des données sur <i>Mathematica</i> ©Wolfram	80
6.2. Cartographie	80
6.3. Données générales sur les arborescences	81
6.3.1. Définition d'une arborescence	82
6.3.2. Construire une arborescence	82
6.3.3. Arborescence et base de numération	83
6.3.3.1. Le cas d'un double embranchement (base 2)	84
6.3.3.2. Le cas d'un triple embranchement (base 3)	85
6.3.4. Arbre et log-périodicité	86
6.3.4.1. Relations entre la longueur des branches et le niveau	86
6.3.4.2. Étude de la longueur d'un chemin – Longueur critique	86
6.3.4.3. Longueur totale d'une arborescence et nombre de branches	87
6.3.5. Arbre et fractalité	88
6.4. Caractéristiques fractales et non fractales de l'arborescence d'un réseau hydrographique	88
6.4.1. La « loi » de Léonard de Vinci	89
6.4.2. La loi de Cecil Murray	90
6.4.3. Les méthodes de mise en arborescence du réseau	90
6.4.3.1. Le calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau	90
6.4.3.2. La méthode hortonienne	92
6.4.3.3. La classification hiérarchique ascendante des confluences (C.H.A.C.)	96
Chapitre 7. L'analyse morphologique des images <i>Landsat</i> des principales villes du monde	111
7.1. Extraction des données	112
7.1.1. Les satellites <i>Landsat</i>	112
7.1.2. Les couleurs de l'urbain	112
7.1.3. L'extraction de la tache urbaine	112
7.1.4. Les limites de l'extraction	114
7.2. Analyse fractale des données	115
7.2.1. Les résultats	115
7.2.2. La critique des données extraites	129
7.3. Interprétations	130
7.3.1. Dimension fractale et localisation des taches	130
7.3.2. Dimension fractale et population urbaine	131
7.3.3. Dimension fractale et surface relative	132

Chapitre 8. L'analyse morphologique d'images à résolution variable de la ville d'Avignon	135
8.1. Présentation des données	135
8.2. Étude fractale des données	136
8.2.1. L'état de la question	137
8.2.2. L'analyse multi-résolution de la ville d'Avignon	137
8.2.2.1. Traitement de l'image 1	137
8.2.2.2. Traitement des images 2 à 6	138
8.3. Interprétation des résultats obtenus	140
Chapitre 9. Morphologie de l'objet « ville » défini par ses éléments bâtis	145
9.1. L'organisation multi-échelle des agglomérations	147
9.1.1. Les « vides »	148
9.1.2. Les « pleins »	149
9.1.3. L'articulation des vides et des pleins	149
9.2. Le poids de l'histoire (hypothèse 1)	153
9.3. Le rôle de l'interaction entre le réseau inter-urbain et le réseau intra-urbain (hypothèse 2)	154
<hr/>	
Partie 3. Morphométrie et analyse spatio-temporelle en géographie	157
Étude du cas de la répartition des châteaux	
dans l'espace géohistorique du nord de la France (Picardie et Artois)	
Chapitre 10. Présentation de l'analyse de la répartition des châteaux en Picardie historique	159
10.1. Les mottes et les châteaux : éléments de définition	160
10.1.1. La motte castrale	160
10.1.1.1. La motte, objet historique	161
10.1.1.2. L'archéologie et les mottes	162
10.1.1.3. La motte, une forme spatiale	163
10.1.2. Les châteaux	163
10.2. Les données	164
10.2.1. Les sources	164
10.2.2. La nature des données	164
10.2.2.1. La localisation spatiale	165
10.2.2.2. La localisation temporelle	165
10.2.3. La constitution de la base de données « Catiau »	166

Chapitre 11. Géohistoire du nord de la France de la fin du Haut Moyen Âge à nos jours	169
11.1. Géohistoire ou géographie historique	169
11.2. Géohistoire du Nord de la France, approche multi-scalaire	170
11.2.1. Le <i>Regnum francorum</i>	170
11.2.2. L'Empire d'Occident	171
11.2.3. L'enchâtellement et le début de construction du royaume de France (IX ^e – XI ^e siècles)	174
11.2.4. De la <i>Francia Occidentalis</i> à la France (XI ^e – XIII ^e siècles)	175
11.2.5. Le Royaume de France (XIV ^e – XV ^e siècles)	179
11.2.6. Le Royaume de France (XVI ^e – XVII ^e siècles)	183
11.2.7. Du Royaume de France à la France républicaine (XVIII ^e siècle à nos jours)	185
11.2.8. Limites et frontières en géohistoire	186
11.2.8.1. La limite entre la <i>Francia Occidentalis</i> et la Lotharingie	187
11.2.8.2. Les subdivisions administratives	189
11.2.8.3. Note sur le trait de côte	189
11.3. Choix des limites temporelles	190
Chapitre 12. La réflexion sur l'analyse spatio-temporelle à partir du cas bovois	193
12.1. Le temps et la loi de l'évolution de Laurent Nottale (2000)	193
12.1.1. L'archétype temporel de Boves	194
12.1.2. Bilan et perspectives	197
12.2. L'espace	197
12.2.1. La méthode de l'analyse radiale	197
12.2.2. Exemple de la répartition des châteaux autour de Boves	201
12.2.3. Analyse radiale moyenne de la répartition de tous les châteaux	213
Chapitre 13. L'analyse fractale généralisée	221
13.1. Nuage de points et dimension fractale	221
13.2. Le champ des rapports scalaires	223
13.3. Châteaux et centres urbains	228
13.4. Statistique des dimensions fractales locales	229
Chapitre 14. L'étude multi-échelle d'un espace-temps	233
14.1. Caractéristiques de la population statistique de référence	233
14.2. Étude diachronique multi-échelle de la répartition territoriale des châteaux	234
14.2.1. Présentation des résultats	234
14.2.2. Cartographie des résultats	237

Partie 4. Étude multi-échelle de la répartition de l'établissement humain sur Terre	245
Chapitre 15. Géographie du peuplement et analyse multi-échelle	247
15.1 Géographie et populations	248
15.2 Géographie du peuplement et analyse fractale	250
Chapitre 16. Présentation de la base de données Tageo	253
16.1. Tageo, site officiel de la loi rang – taille	253
16.1.1. La nature des données	254
16.1.2. L'objectif de l'analyse et les corrections apportées à la base	254
16.1.3. Le sens des variables utilisées	254
16.1.3.1. La variable « position »	255
16.1.3.2. La variable « nombre d'habitants »	255
16.2. Lois rang – taille à l'échelle étatique	255
16.2.1. État des lieux des connaissances concernant les lois rang – taille	256
16.2.2. Présentation des résultats obtenus à partir des données Tageo	258
16.2.3. Interprétations de ces résultats	295
16.3. Les statistiques parétiennes et les lois rang – taille	295
16.3.1. Les lois parétiennes	295
16.3.2. Les distributions des lois rang – taille	296
Chapitre 17. Structure multi-échelle de la répartition de la population	329
17.1. À l'échelle du monde	329
17.1.1. Données brutes	329
17.1.1.1. Analyse fractale globale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire	330
17.1.1.2. Analyse fractale locale de la répartition de l'établissement humain à l'échelle planétaire	331
17.1.1.3. Analyse locale du nombre d'habitants à l'échelle planétaire	332
17.1.1.4. Loi rang – taille et distribution parétienne	333
17.1.2. Données avec un filtre de population à 144 300 habitants	333
17.1.2.1. Loi rang – taille et distribution parétienne	333
17.1.2.2. Analyse fractale de la répartition de l'établissement humain à un seuil de 144 300 habitants	336

17.1.3.	Données avec un filtre de population à 1 million d'habitants	340
17.1.3.1.	Loi rang – taille et distribution parétienne à un seuil de 1 000 000 d'habitants	340
17.1.3.2.	Analyse fractale de la répartition de l'établissement humain à un seuil de 1 000 000 d'habitants	341
17.2.	À l'échelle continentale	343
17.2.1.	L'Eurasie	343
17.2.2.	L'Amérique	345
17.2.3.	L'Afrique	347
17.2.4.	L'Océanie	349
17.2.5.	Conclusion	352
17.3.	À l'échelle étatique	353
<hr/>		
Chapitre 18.	Conclusion générale	361
18.1.	Projet 1. De la nécessité de rapprocher l'information et l'échelle	363
18.1.1.	L'information	364
18.1.1.1.	Le contenu brut de l'information	364
18.1.1.2.	La valeur de l'information	365
18.1.2.	Les savoirs	368
18.1.3.	La connaissance	368
18.2.	Projet 2. De la nécessité de redevenir français en géographie	369
18.3.	Projet 3. De l'unification de la connaissance en géographie	371
Chapitre 19.	Bibliographie	375
Chapitre 20.	Annexes	387